

# Effets d'entrée dans les panaches plans

**Pierre-Yves LAGRÉE**

Laboratoire de Modélisation en Mécanique  
U.M.R. 7607  
Université PARIS VI, Boîte 162  
4, Place Jussieu, F-75252 Paris  
mel: pyl@ccr.jussieu.fr

**Résumé** - La formation du panache plan est étudiée dans le cadre de la théorie de la couche limite laminaire. La résolution du système d'équations couplées (thermique/ dynamique) obtenu permet de calculer l'évolution spatiale d'un profil initial provenant de la sortie d'un canal. Il se forme d'abord un jet autosemblable, puis celui-ci étant freiné par son étalement, la force d'Archimède devient prépondérante et on obtient finalement la solution autosemblable de panache plan

## 1. Introduction

Les solutions laminaires, stationnaires et bidimensionnelles de jet chaud et de panache sont bien connues ([1], [2]). Les hypothèses pour résoudre sont principalement que le nombre de Reynolds est très grand et que l'écoulement reste confiné près de l'axe dans une couche mince semi infinie ( $x > 0$ ) qui s'étend faiblement transversalement, le reste du fluide restant non perturbé. On aboutit alors à des équations de type couche limite libre sans gradient de pression (le fluide parfait est immobile, sauf sur une ligne singulière). On en cherche alors des solutions autosemblables. La solution de jet correspond à la conservation de l'intégrale du flux de vitesse, tandis que la solution de panache (avec gravité et approximation de Boussinesq) correspond à la conservation de l'intégrale du flux de température.

La solution de similitude dans le cas du jet est notamment telle que la vitesse décroît le long de l'axe en  $x^{-1/3}$ . En revanche, si la gravité est présente, la solution de similitude est telle que la vitesse croît le long de l'axe en  $x^{1/5}$ .

Le problème que nous résolvons est le suivant (figure 1): comment un profil initialement donné (de vitesse maximale  $U_0$ ) sortant d'un orifice de largeur  $2h$  va se développer pour former un jet puis un panache? Nous allons voir que ce passage d'une description à l'autre est contrôlé par un nombre sans dimensions  $J$  qui est le rapport entre les effets de la force d'Archimède et de l'inertie du jet.

## 2. Équations

### 2.1. Mise en oeuvre

On adimensionne les équations de Navier Stokes avec les quantités initiales: l'échelle transverse est  $h$ , la demi largeur du canal, l'échelle de vitesse longitudinale est  $U_0$ , la jauge de la vitesse sortant du canal. Le nombre de Reynolds est alors  $Re = U_0 h / \nu$ , il est supposé très grand. Pour garder le maximum de termes dans les équations (principe de moindre dégénérescence [3]) et notamment garder les effets inertiels et les effets visqueux transverses, il faut choisir  $h Re$  comme échelle longitudinale (en général, on fait l'inverse: on choisit l'échelle longitudinale et on en déduit l'échelle transverse). L'échelle de la température est choisie en prenant l'écart entre la température initiale et l'extérieur qui est au repos au loin. Il apparaît finalement dans le système sans dimensions un terme que l'on note  $J$ , avec  $J = g \alpha \Delta T h Re / U_0^2$ , il provient de l'effet de la gravité (dirigée suivant l'axe des  $-x$ ) et de la légère dilatabilité  $\alpha$  du fluide (on se place dans le cadre de l'approximation de Boussinesq). Ce terme est le rapport entre les effets de la force

d'Archimède et de l'inertie du jet. L'influence de l'échauffement visqueux mesurée par le nombre d'Eckert  $E$  est négligée,  $E=0$ .

## 2.2. Système

En posant:

$$x = h Re \bar{x}, \quad y = h \tilde{y}, \quad u = U_0 \tilde{u}, \quad v = U_0 Re^{-1} \tilde{v}, \quad p = p_0, \quad T = T_0 + \Delta T \tilde{T}$$

il faut alors résoudre (dans le cadre de la couche limite,  $Re \gg 1$ ,  $Pr = O(1)$  et  $J = O(1)$ ) le problème:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + J \tilde{T}, \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = Pr^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}$$

avec les conditions initiales  $\tilde{T}(\bar{x}=0, \tilde{y})$  et  $\tilde{u}(\bar{x}=0, \tilde{y})$  deux profils donnés (par ex. 1 et  $1-\tilde{y}^2$ ) et:

$$\tilde{v}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, \tilde{y}=0) = 0 \text{ et } \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, \tilde{y}=0) = 0, \quad \tilde{u}(\bar{x}, \infty) = 0 \text{ et } \tilde{T}(\bar{x}, \infty) = 0.$$

## 2.3. Remarques

La solution autosemblable de jet correspond à  $J=0$ . Elle est obtenue en oubliant la donnée initiale de  $\tilde{T}(\bar{x}=0, \tilde{y})$  et  $\tilde{u}(\bar{x}=0, \tilde{y})$ , mais en remarquant que l'intégration transverse de l'équation

de quantité de mouvement donne que  $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}^2 d\tilde{y}$  est constant. La solution de similitude (de

Bickley) est telle que la vitesse longitudinale décroît alors en  $\bar{x}^{-1/3}$ . La solution autosemblable de panache correspond à  $J=1$ . Elle est aussi obtenue en oubliant la donnée initiale de température et de vitesse en  $\bar{x}=0$  (où les deux solutions ne sont d'ailleurs pas définies), mais en remarquant

que l'intégration transverse de l'équation de quantité de mouvement donne que  $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u} \tilde{T} d\tilde{y}$  est

constant. La solution est alors telle que la vitesse longitudinale croît alors en  $\bar{x}^{1/5}$ .

## 3. Résultats et discussion

À titre d'illustration le système proposé avec un  $J$  petit ( $J=0.01$ ) et  $Pr=1$  est résolu numériquement. La résolution se fait par différences finies, avec itérations à chaque pas d'espace  $\bar{x}$ , le système est parabolique en  $\bar{x}$ . La variation éventuelle des intégrales définies plus haut est un résultat du calcul et sert à vérifier la précision globale du schéma. On observe alors un premier effet d'entrée (à l'échelle  $hRe$ ), c'est le passage d'un écoulement débouchant d'un tuyau (ici Poiseuille) au jet de Bickley (en  $\bar{x}^{-1/3}$ ). Sur la figure 2, on a tracé (en log-log) la solution à  $J=0.01$  et à  $J=0$  ainsi que la droite de pente  $-1/3$ .

Puis, on observe un second effet d'entrée: au fur et à mesure que la vitesse décroît, la force d'Archimède augmente relativement. Elle réaccélère le jet pour aboutir à un panache autosemblable (dont le développement de la vitesse longitudinale au centre est en  $\bar{x}^{1/5}$ ),

Bien entendu, si on redimensionne le système initial en changeant:

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x} X, \quad \tilde{y} \rightarrow \tilde{y} J^{-1/5} X^{2/5}, \quad \tilde{u} \rightarrow \tilde{u} J^{2/5} X^{1/5} \quad \text{et} \quad \tilde{T} \rightarrow \tilde{T} J^{-1/5} X^{-3/5}$$

le coefficient devant la température est mis à un ( $J$  disparaît) et on est dans les échelles

"naturelles" du panache; on en déduit alors que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}^2 d\tilde{y}$  se transforme en  $J^{3/5} X^{4/5}$  et

devient très supérieure à un pour  $X \gg J^{-3/4}$ . On constate donc que si on fait tendre  $J$  vers zéro, le passage à la solution autosemblable de panache se produit à l'échelle  $J^{-3/4}hRe$ .

Notons qu'une description en triple couche [4] permettrait de mieux préciser le premier profil: en effet l'écoulement sortant du canal ne peut être un profil de Poiseuille car il y a ajustement sur une distance très courte de la pente de la vitesse, cet effet faible a été ici négligé. La famille de profils ainsi obtenue pourra servir au calcul des caractéristiques de stabilité du panache lui même. Cela a déjà été fait dans le cas du jet plan [5] où la solution de base a été calculée avec différents codes commerciaux et comparée très favorablement avec le cas  $J=0$  et pour  $Re=666$ .

Le même type de démarche peut être étendu au cas axisymétrique sans difficultés, puis au cas turbulent à condition de se donner une longueur de mélange proportionnelle à la largeur du jet multipliée par sa vitesse au centre.

#### 4. Références

- [1] K. Gersten, H. Hervig, Strömungsmechanik : Grundlagen der Impuls-Wärme-und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht, Vieweg, Wiesbaden, 1992.
- [2] H. Schlichting , Boundary layer theory, 7th ed Mc Graw Hill, 1987.
- [3] M. Van Dyke, Perturbation methods in fluid mechanics, The Parabolic press, Standford, 1962.
- [4] V. V. Sychev, A. I. Ruban, V. V. Sychev & G. L. Korolev, Asymptotic theory of separated flows", Cambridge University Press, 1998
- [5] K. Goorman, P.-Y. Lagrée, C. Ségoufin & B. Fabre, Inviscid stability of a jet, application to sound production in a recorder', 4th EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Eindhoven, 2000.

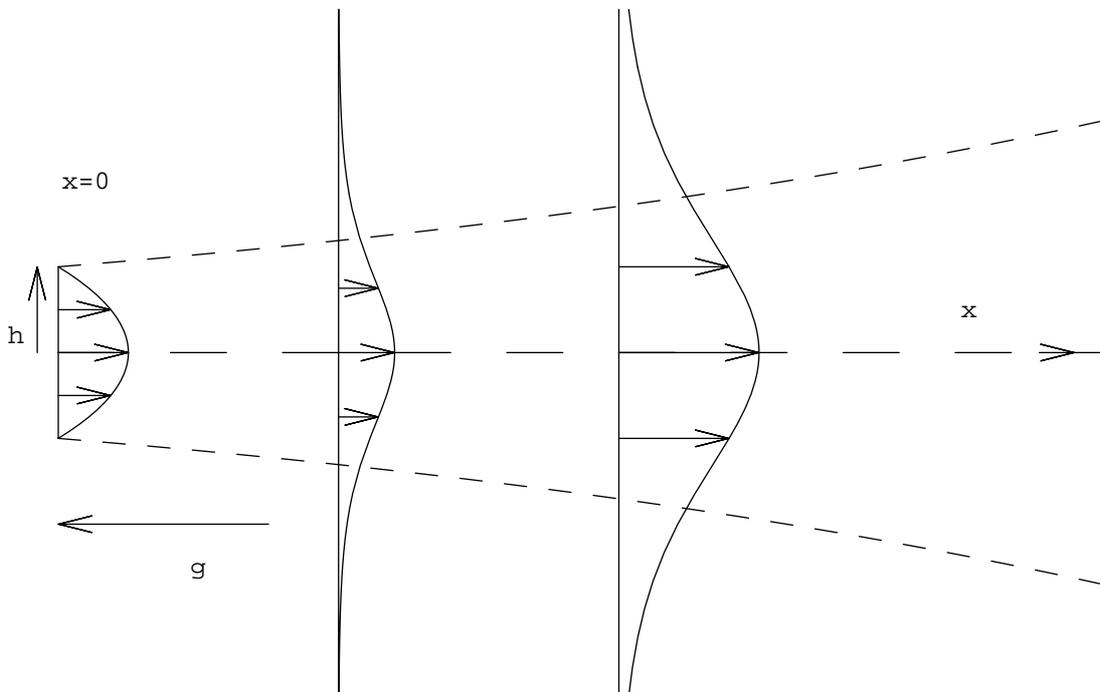


Figure 1: En  $x=0$ , un canal débouche dans une atmosphère au repos, dans un premier temps un jet se forme, puis, la force d'Archimède devenant de plus en plus grande, un panache se développe.

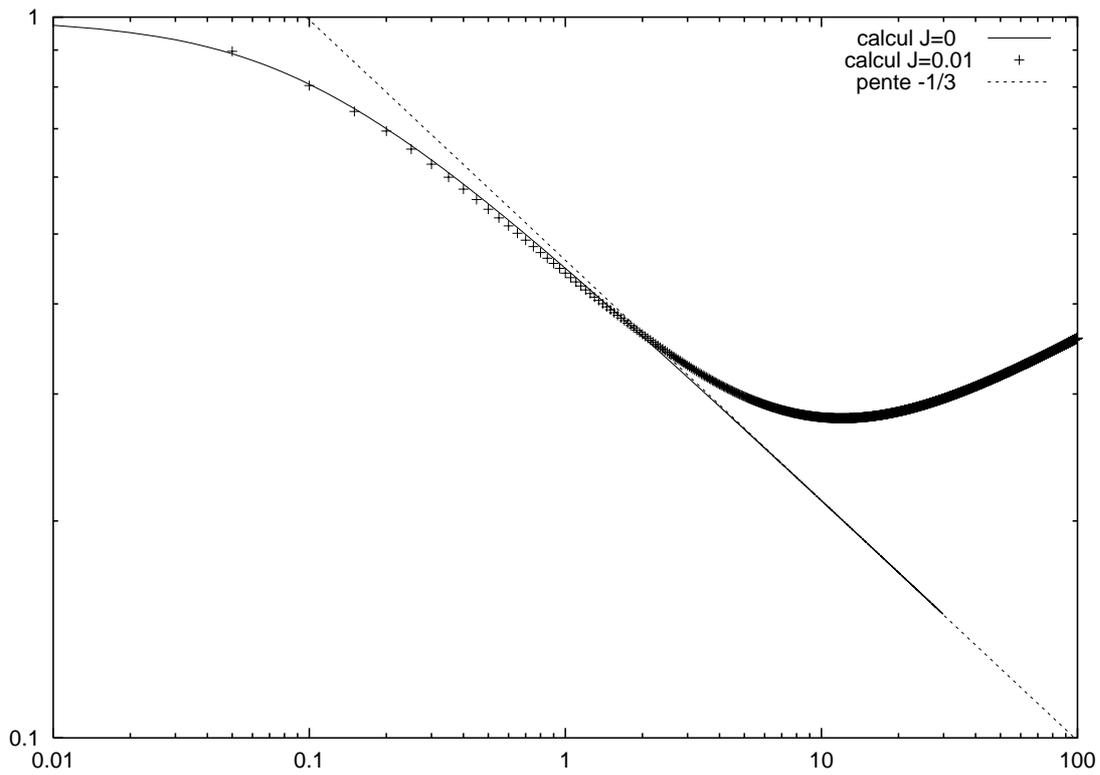


Figure 2: *Premier effet d'entrée: passage de Poiseuille à Bickley, en abscisse  $\tilde{x}$  en ordonnée la vitesse au centre  $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}=0)$ .*

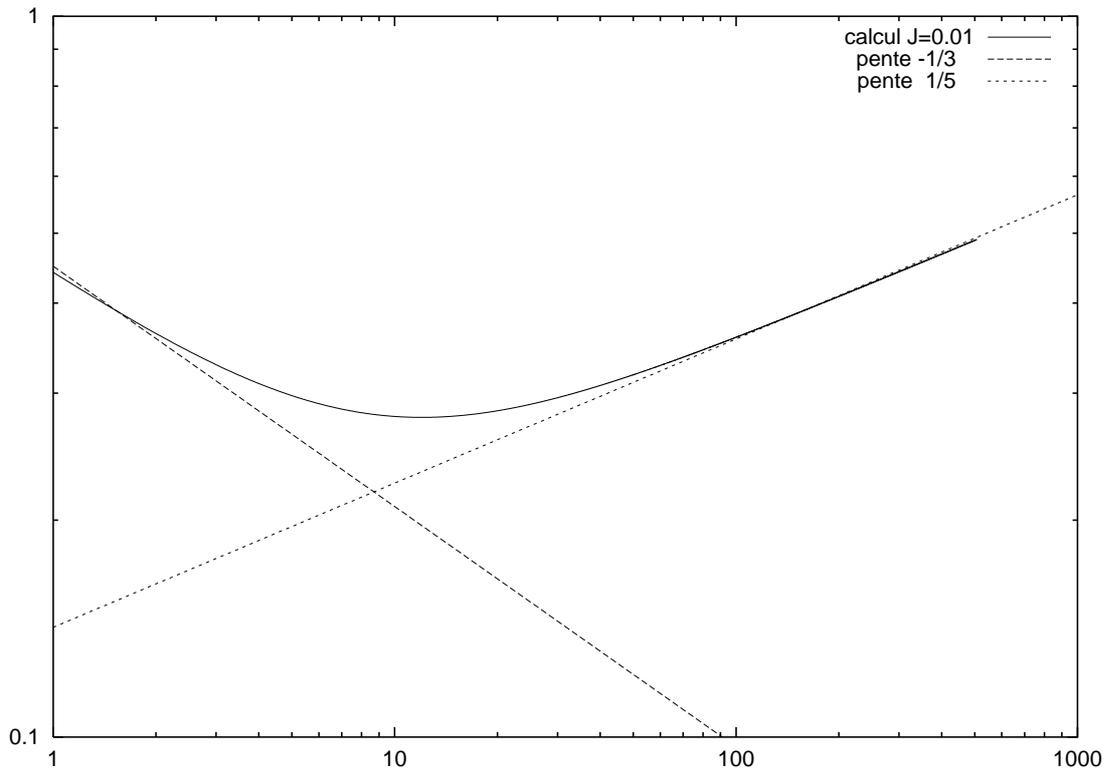


Figure 3: *Second effet d'entrée: passage à la solution autosemblable finale du panache, en abscisse  $\tilde{x}$  en ordonnée la vitesse au centre  $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}=0)$ .*