

Effets d'entrée dans les panaches plans

Pierre-Yves LAGRÉE

Laboratoire de Modélisation en Mécanique
U.M.R. 7607
Université PARIS VI, Boîte 162
4, Place Jussieu, F-75252 Paris
mel: pyl@ccr.jussieu.fr

Résumé - La formation du panache plan est étudiée dans le cadre de la théorie de la couche limite laminaire. La résolution du système d'équations couplées (thermique/ dynamique) obtenu permet de calculer l'évolution spatiale d'un profil initial provenant de la sortie d'un canal. Il se forme d'abord un jet autosemblable, puis celui ci étant freiné par son étalement, la force d'Archimède devient prépondérante et on obtient finalement la solution autosemblable de panache plan

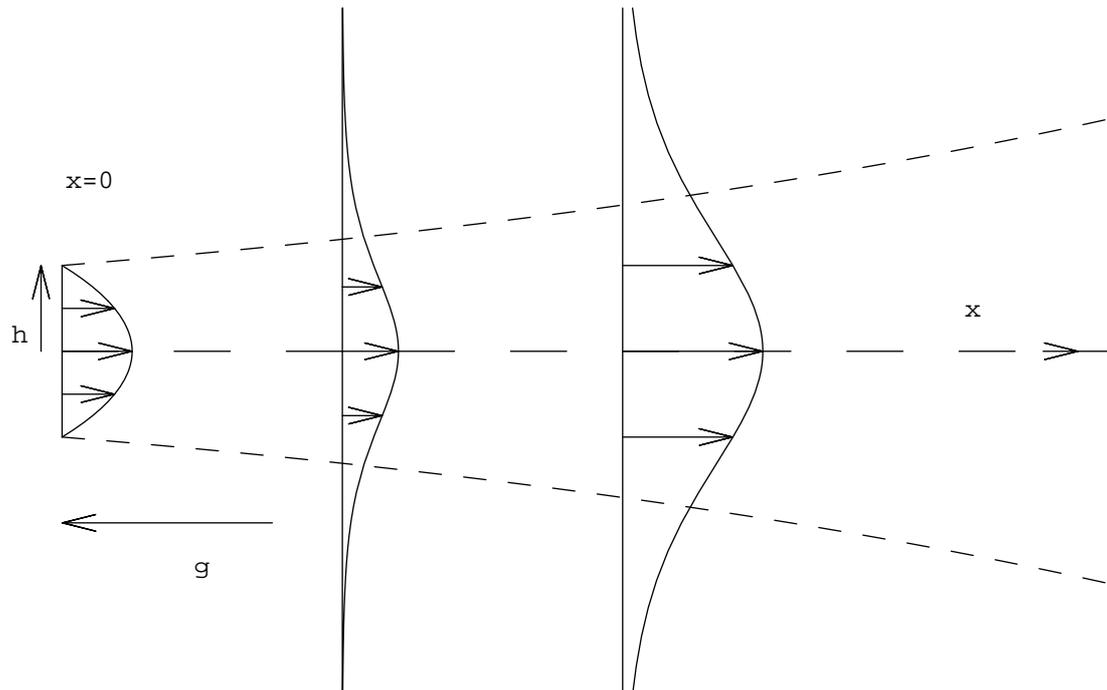


Figure 1: En $x=0$, un canal débouche dans une atmosphère au repos, dans un premier temps un jet se forme, puis, la force d'Archimède devenant de plus en plus grande, un panache se développe.

On veut savoir:

- quelles sont les échelles mises en jeux, quels sont les profils de vitesse et de température
- si on retrouve les solutions classiques autosemblables
- comment on passe de l'une à l'autre

Équations asymptotiques: couche limite libre

En posant:

$$x = h \operatorname{Re} \bar{x}, \quad y = h \tilde{y}, \quad u = U_0 \tilde{u}, \quad v = U_0 \operatorname{Re}^{-1} \tilde{v}, \quad p = p_0, \quad T = T_0 + \Delta T \tilde{T}$$

il faut alors résoudre (dans le cadre de la couche limite "libre",
à $\operatorname{Re} \gg 1$, $\operatorname{Pr} = O(1)$ et $J = O(1)$)

le problème:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + J \tilde{T}, \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} &= \operatorname{Pr}^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}. \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $\tilde{T}(\bar{x}=0, \tilde{y})$ et $\tilde{u}(\bar{x}=0, \tilde{y})$ deux profils donnés (par ex. 1 et $1-\tilde{y}^2$) et les conditions de symétrie et de raccord:

$$\tilde{v}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, \tilde{y}=0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, \tilde{y}=0) = 0, \quad \tilde{u}(\bar{x}, \infty) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{T}(\bar{x}, \infty) = 0.$$

Résultats classiques

Dans le cadre théorie de la couche limite laminaire. Les solutions sont dites "de similitude", elles existent indépendamment de ce qui se passe à l'origine, qui est un point non défini.

Solution de Bickley

Pour les jets laminaires, la variable de similitude est $\eta=y/x^{2/3}$ ($\xi=x$)

$$T = u = \xi^{-1/3}f(\eta) \quad v = \frac{\xi^{-2/3}}{3}(2\eta f - f)$$

puis, on obtient le problème autosemblable:

$$3 f''' + f f'' + f^2 = 0.$$

avec comme conditions aux limites $f(0)=0$ $f'(0)=0$, $f(\infty)=0$

et la normalisation: $\int_0^{\infty} f^2 d\eta = 1/2$,

Le panache

Pour les panaches laminaires plans, la variable de similitude est $\eta=y/x^{2/5}$ ($\xi=x$)

$$u = \xi^{1/5}f(\eta) \text{ donc } \psi = \xi^{3/5}f(\eta) \text{ et } v = 5^{-1} \xi^{-2/5} (2 \eta f' - 3 f)$$

puis, on obtient le problème autosemblable:

$$\frac{1}{5} (f'^2 - 3 f f'') = f''' + g \quad \& \quad \frac{-3}{5} f' g = g''.$$

avec comme conditions aux limites $f'(0)=0$, $f(\infty)=0$, $g'(0)=0$ $g(\infty)=0$.

et la normalisation: $\int_0^{\infty} f' g d\eta = 1/2$,

La résolution se fait par différences finies, avec itérations à chaque pas d'espace \bar{x} ,

le système est parabolique en \bar{x} .

La variation éventuelle des intégrales définies plus haut est un résultat du calcul et sert à vérifier la précision globale du schéma.

On observe alors un premier effet d'entrée (à l'échelle hRe), c'est le passage d'un écoulement débouchant d'un tuyau (ici Poiseuille) au jet de Bickley (en $\bar{x}^{-1/3}$). Sur la figure 2, on a tracé (en log-log) la solution à $J=0.01$ et à $J=0$ ainsi que la droite de pente $-1/3$.

Puis, on observe un second effet d'entrée: au fur et à mesure que la vitesse décroît, la force d'Archimède augmente relativement. Elle réaccélère le jet pour aboutir à un panache autosemblable (dont le développement de la vitesse longitudinale au centre est en $\bar{x}^{1/5}$),

Si on redimensionne le système initial en changeant:

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x}X, \quad \tilde{y} \rightarrow \tilde{y}J^{-1/5}X^{2/5}, \quad \tilde{u} \rightarrow \tilde{u}J^{2/5}X^{1/5} \quad \text{et} \quad \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}J^{-1/5}X^{-3/5}$$

le coefficient devant la température est mis à un (J disparaît) et on est dans les échelles "naturelles" du panache; on en déduit alors que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}^2 dy \text{ se transforme en } J^{3/5}X^{4/5} \text{ et devient très supérieure à un pour:}$$

$$X \gg J^{-3/4}.$$

Le passage à la solution autosemblable de panache se produit à l'échelle (si $J \ll 1$):

$$J^{-3/4}hRe$$

Résultats numériques

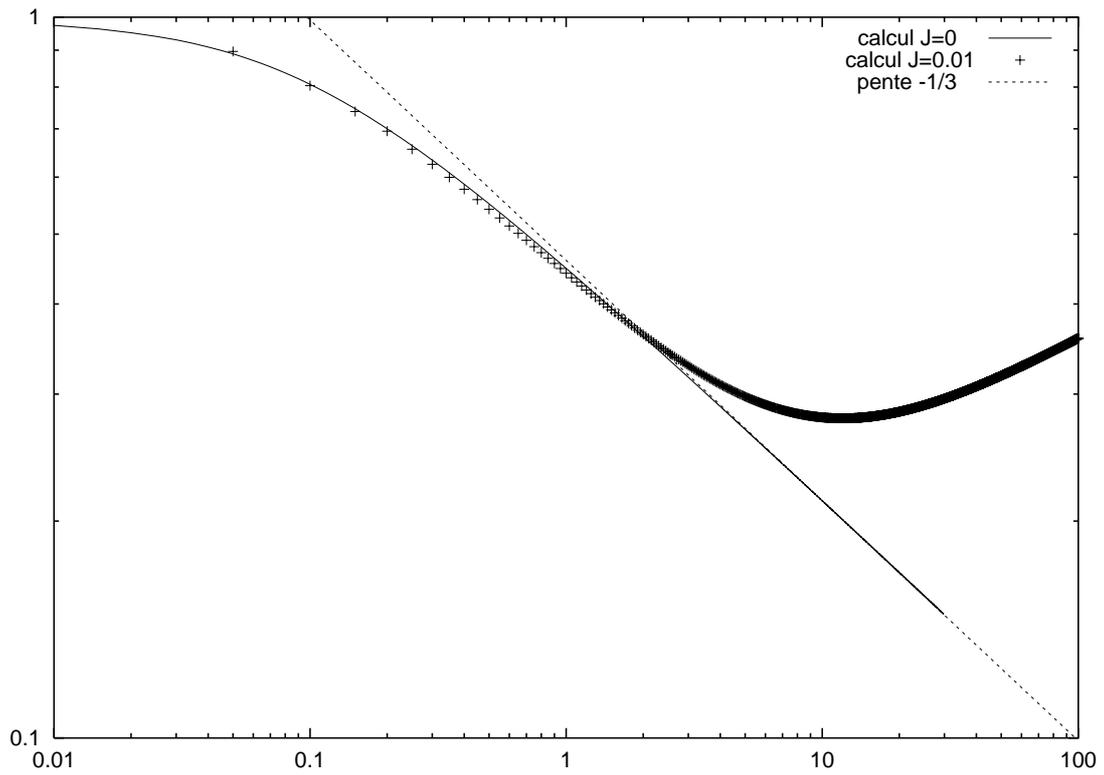


Figure 2: Premier effet d'entrée: passage du profil de Poiseuille à la solution de Bickley.

En abscisse \tilde{x} , en ordonnée la vitesse au centre $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}=0)$. La vitesse sur l'axe décroît bien en $x^{-1/3}$

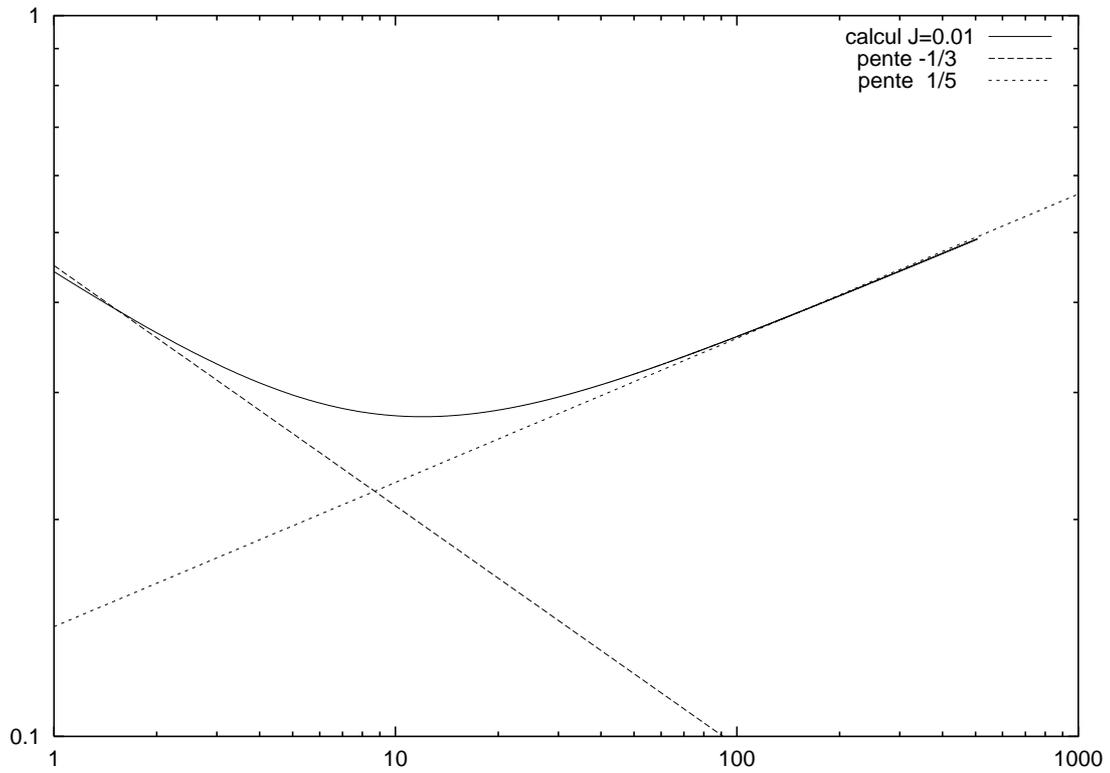
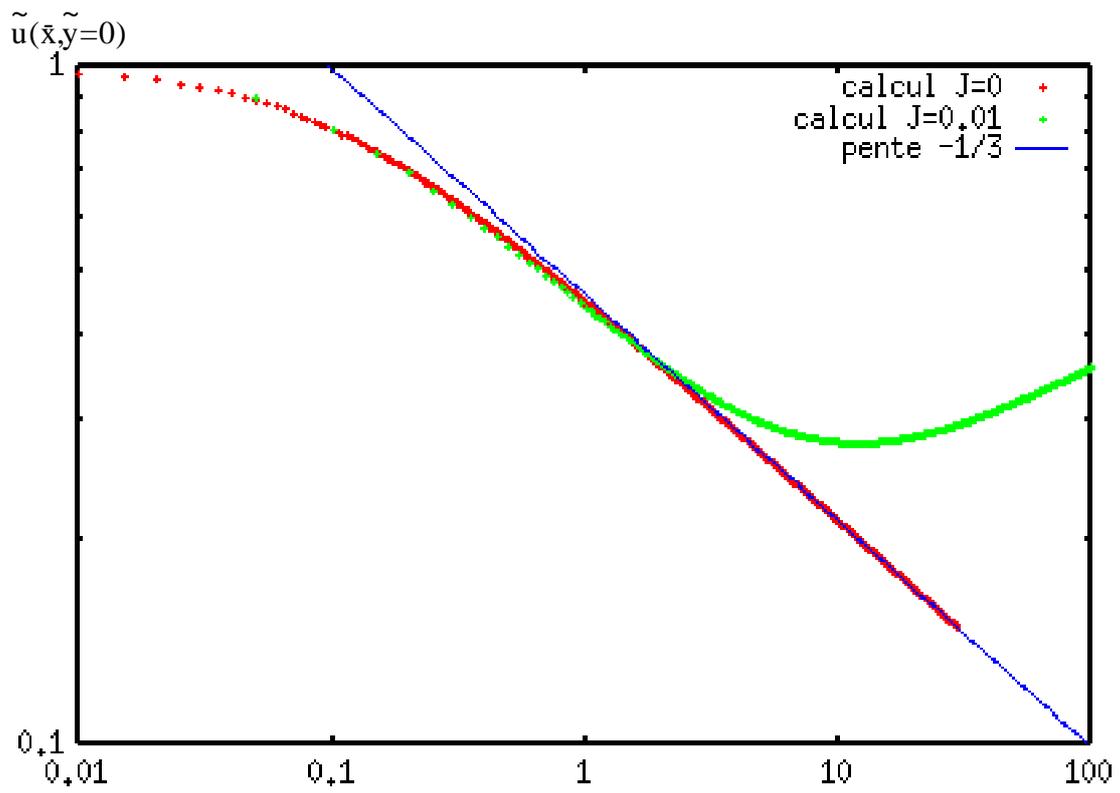
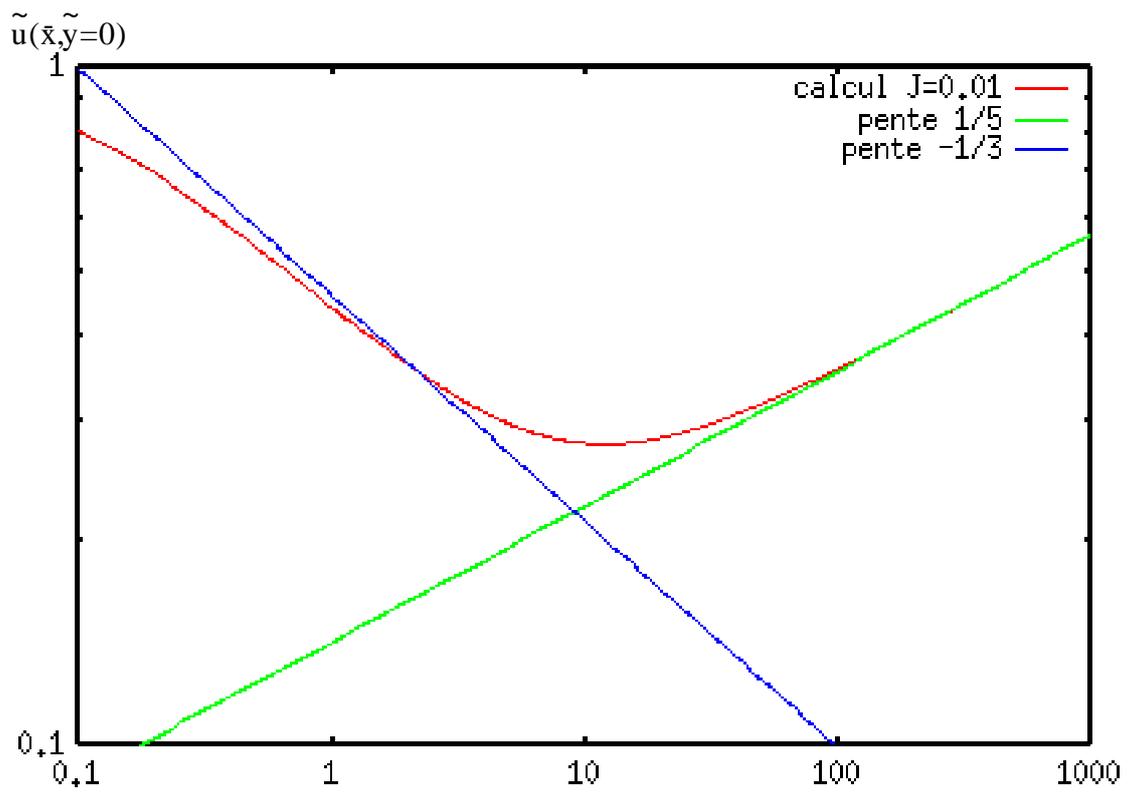


Figure 3: *Second effet d'entrée: passage de la solution de jet où la température est passive à la solution autosemblable finale du panache, où la température est active.*

*En abscisse \tilde{x} en ordonnée la vitesse au centre $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}=0)$.
La vitesse croît en $x^{1/5}$*

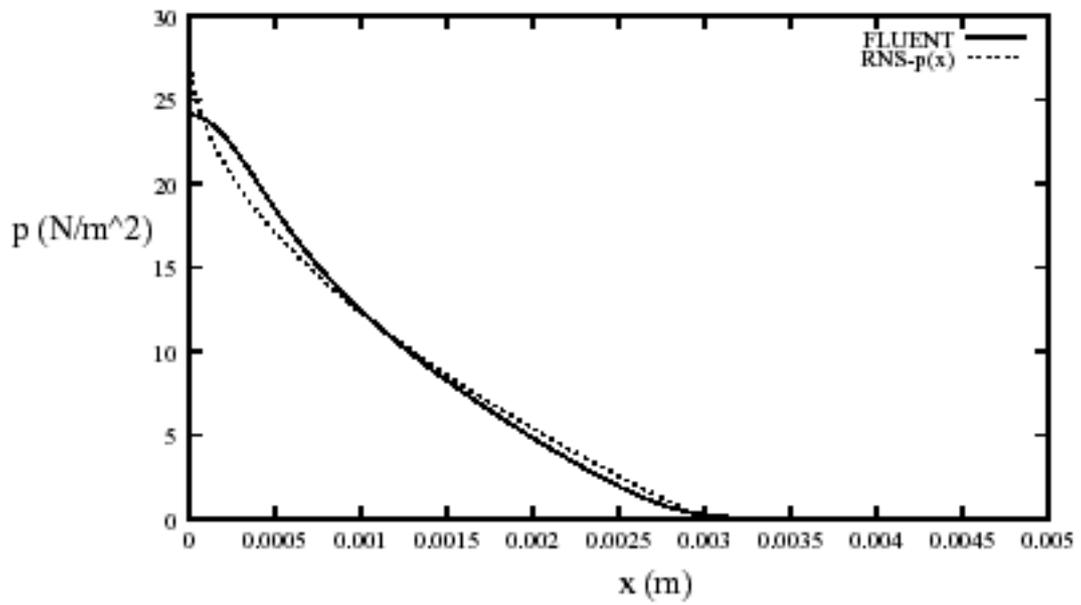
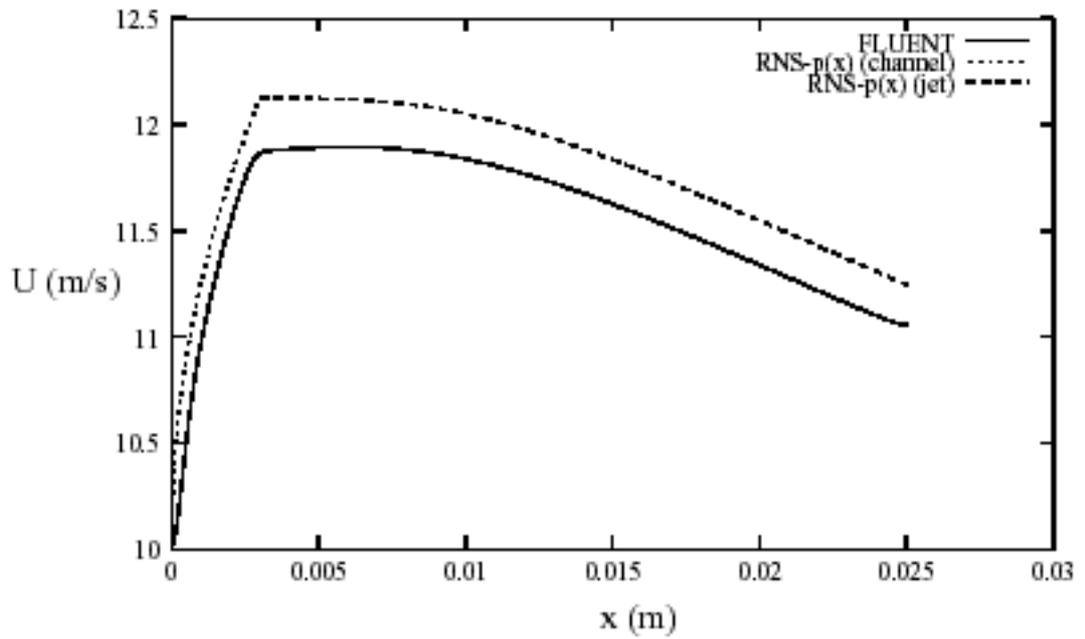


\tilde{x}
Figure 2: *Premier effet d'entrée: passage de Poiseuille à Bickley*

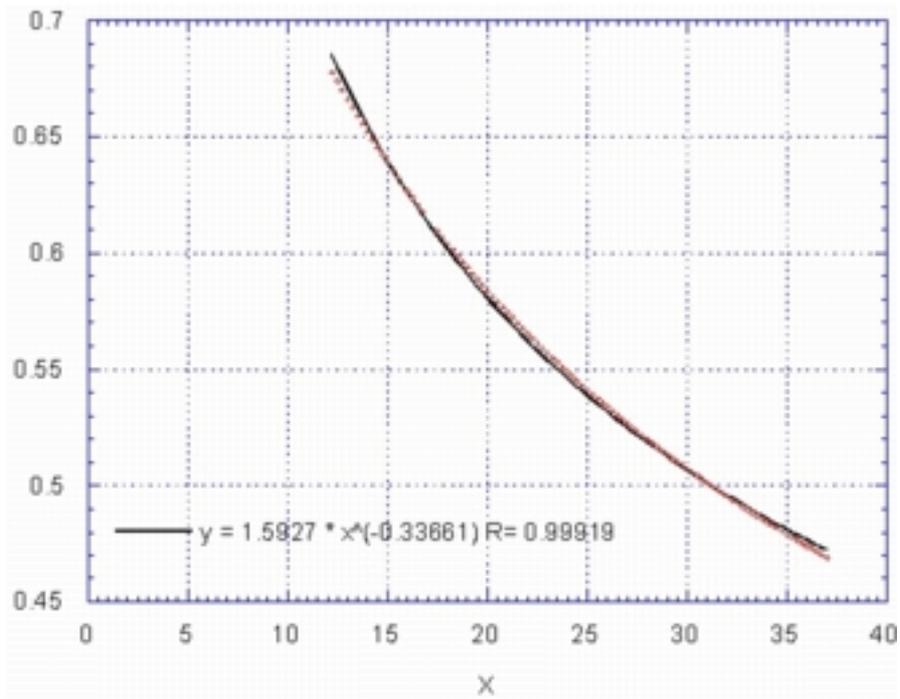
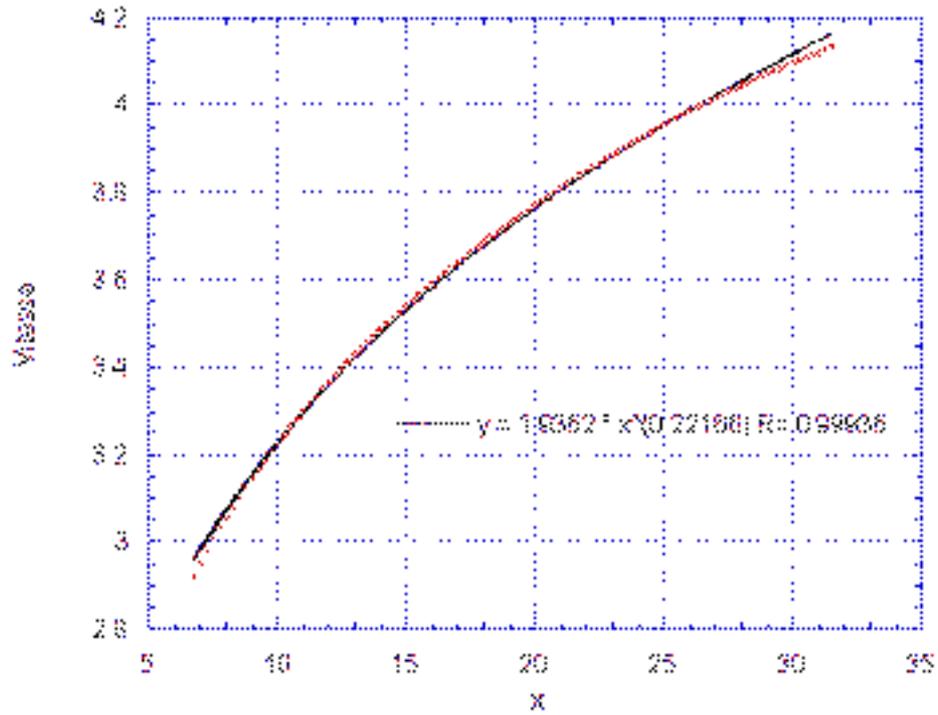


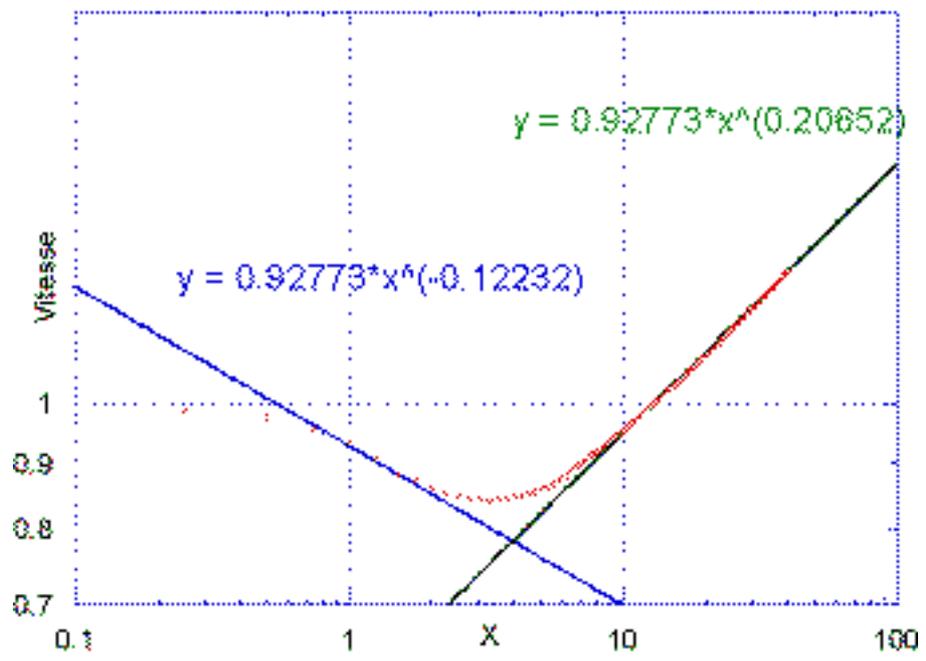
\tilde{x}
 Figure 3: *Second effet d'entrée: passage à la solution autosemblable finale du panache.*

Influence du canal sur la formation du jet (K. Goorman, C. Ségoufin)



Panache (Re50 gb-1) - Vitesse sur l'axe





Conclusion

Alternative aux équations de NS complètes....

Validation d'un modèle simplifié de résolution: les solutions se calculent en "marchant en x".

Application: calcul de stabilité de profils...

Références

- [1] K. Gersten, H. Hervig, Strömungsmechanik : Grundlagen der Impuls-Wärme-und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht, Vieweg, Wiesbaden, 1992.
- [2] H. Schlichting , Boundary layer theory, 7th ed Mc Graw Hill, 1987.
- [3] M. Van Dyke, Perturbation methods in fluid mechanics, The Parabolic press, Standford, 1962.
- [4] V. V. Sychev, A. I. Ruban, V. V. Sychev & G. L. Korolev, Asymptotic theory of separated flows", Cambridge University Press, 1998
- [5] K. Goorman, P.-Y. Lagrée, C. Ségoufin & B. Fabre, Inviscid stability of a jet, application to sound production in a recorder', 4th EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Eindhoven, 2000.