Les équations RNS/Prandtl,

leur lien avec la double et la triple couche.

Lagrée P.-Y. & Lorthois S.
LMM Paris 6 / IMF Toulouse
pyl@ccr.jussieu.fr

Nous considérons ici l'écoulement dans un canal axisymétrique présentant une constriction avec en vue des applications en biomécanique (écoulement dans des artères sténosées). On suppose que le régime est stationnaire, laminaire, que le fluide est newtonien et que le nombre de Reynolds est grand (Re= U_0R_0/ν, U_0 vitesse moyenne, R_0 rayon initial). On suppose de plus que la sténose se développe avec une échelle bien plus longue que sa hauteur.
Nous revisitons en fait les travaux classiques de Smith en montrant que les équations RNS/Prandtl contiennent la plupart des effets présents dans les équations de double et triple couche.

1. RNS/Prandt

Partant des équations de Navier Stokes (NS) en posant les échelles suivantes:

$$x^* = x\, R_0\, Re,\ r^* = r\, R_0,,\ u^*= U_0u,\ v^*=U_0v/Re,\ p^*= p_0^* + \rho_0U_0^2p$$

on obtient, lorsque Re$\to\infty$, le système suivant:

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv=0,$$

$$(u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial r}u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1\partial}{r\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}u) \text{ et } 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}\ .$$

Il s'agit d'équations cohérentes asymptotiquement que l'on peut appeler "Reduced NS" (Rubin Himansu 89 gardent une variation transverse qui n'a pas de sens asymptotique), mais, il s'agit en fait des équations de Prandtl. Les conditions aux limites sont: la condition de symétrie au centre ($\partial_r u=0$ et v=0 en r=0), l'adhérence aux parois (u=v=0 en r=1-f(x), f(x) est la forme de la perturbation de la paroi, dont les échelles sont supposées compatibles), et à l'entrée, on peut imposer un profil plat u(0,r)=1, v(0,r)=0 (ou tout autre profil, dont Poiseuille). Ces équations peuvent se résoudre en marchant en x.

2. dégénérescences de ces équations.

2.1 équations IBL

Partant d'un profil plat en entrée, on voit alors qu'il existe une gamme d'échelles longitudinales $x^*=Lx$ avec $L<<R_0$ Re, $y^*=(L/(LU_0/\nu)^{1/2})x$, $u^*= U_0u$,...*etc.* pour lesquelles, partant de NS ou des équations RNS/Prandtl on obtient alors les équations de couche limite interactives (IBL). Ces équations sont paraboliques en x.

2.3. Équations de double couche

Partant d'un profil de Poiseuille, on peut faire varier les dimensions de la bosse, Les équations de "double couche" s'obtiennent en examinant les équations NS près de la paroi au voisinage de la position de la bosse en utilisant une nouvelle échelle longitudinale. On constate alors (Smith 76, Saintlos & Mauss 96) que ces équations sont valides pour des longueurs de bosses plus petites que R_0Re et d'épaisseur plus petite que R_0 jusqu'à une longueur de bosse égale au rayon R_0 et d'épaisseur $R_0Re^{-1/3}$. Les équations du §1 permettent de retrouver ces résultats au premier ordre. Il faut noter qu'il existe un cas particulier pour la longueur $R_0Re^{1/7}$ et la hauteur $R_0Re^{-2/7}$, tel qu'il peut y avoir une remontée de l'information. En fait dans le cas axisymétrique, cette remontée de l'information disparaît et les équations sont toujours paraboliques en x.

2.2 Équations de triple couche

Les équations du §1 permettent aussi de retrouver le problème de "triple couche" dans un tuyau lorsqu'il existe un coeur potentiel. Si la position de la bosse x_0 est telle que $R_0 Re^{2/5} << x_0 << R_0 Re$, on obtient un problème encore parabolique en x (Ruban Timoshin 86). Si $x_0 = R_0 Re^{2/5}$ et que sa largeur est R_0 on a alors le problème de triple couche avec comme pont supérieur (upper Deck) toute la largeur du tuyau (Smith 76).

3. Applications

Les équations du §1 permettent de calculer la longueur d'établissement du régime de Poiseuille (Schlichting 87), on comparera à des calculs NS directs. Le cas des sténoses est remarquable dans Lorthois & Lagrée 00 il est montré que l'on peut estimer le pic de frottement pariétal par une formule approchée qui permet de retrouver les résultats de calculs NS de la littérature.

Conclusion

Dans le cas des tuyaux, le système RNS/Prandtl inclut les jeux d'équations de double couche/ de triple couche/ de couche limite interactive. Le caractère de marche en avant (parabolique en x) des équations est donc justifié. Le gain de temps en calcul est très important, l'adimensionalisation permet en outre d'exhiber les bonnes échelles.

Références

Rubin S.G. & Himansu A. (1989) IJNMF vol 9 pp. 1395-1411.

Smith (1976) QJMAM vol XXIX, Pt3, pp. 345-368.

Lorthois & Lagrée (2000) CRAS IIb 328 pp. 33-40.

Ruban A.I. & Timoshin S.N. (1986) MZG 2, pp. 74-79.

Saintlos S. & Mauss J. (1996), Int. J. Engng. Sci.,Vol 34, No 2, pp. 201-211.

Schlichting H. (1987) "Boundary layer theory" 7th ed *Mc Graww Hill.*

Smith F.T. (1976) JFM vol 78, part 4, pp. 709- 736.