

# Biomécanique au LMM Paris 6 Jussieu

- Simplifications asymptotiques des équations
- méthode inverse



# Acteurs

- PY Lagrée:  
S. Lorthois (IMFT), A. Van Hirtum (ICP G), X. Pelorson (ICP G), F. Chouly (TICM), A. Ivan Fernolendt (TUWT)...
- M. Rossi:  
J. Fullana (Innothera), P. Flaud (LBHP)...
- D. Gens, B. Elmabsout, A. Vogel...

# Problèmes traités

- chambres à flux
- méthode inverse dans une artère élastique
- méthode inverse dans une artère rigide
- bolus
- artères sténosées
- apnée du sommeil

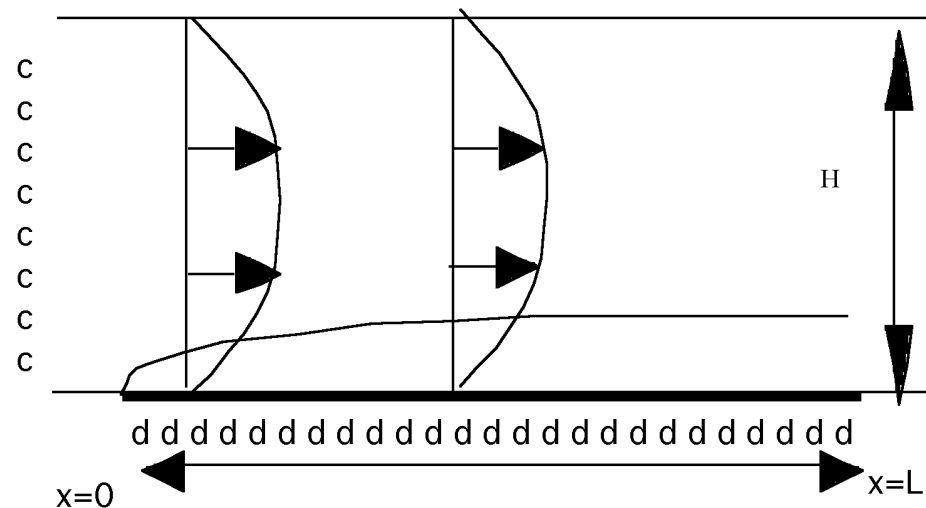
# Chambres à flux

- P.-Y. Lagrée (LMM P6)
- A. IVAN FERNOLENDT (UW Timihoara)

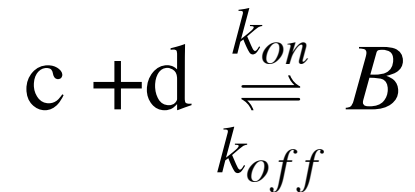
# Convection/ Diffusion dans le fluide

$$u(x, y) = 4U_{max} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad v = 0.$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \left[ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right]$$



# Chimie

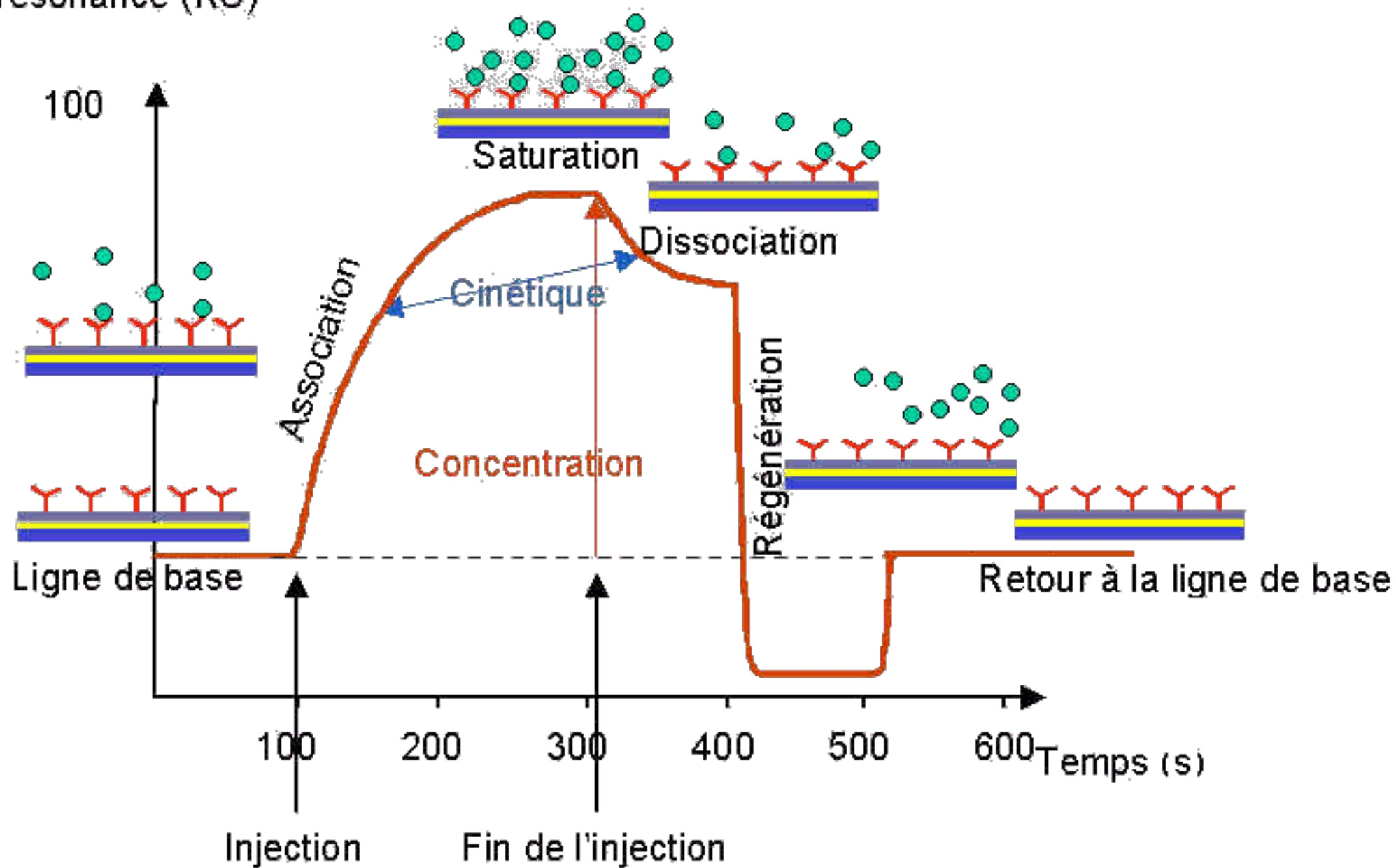


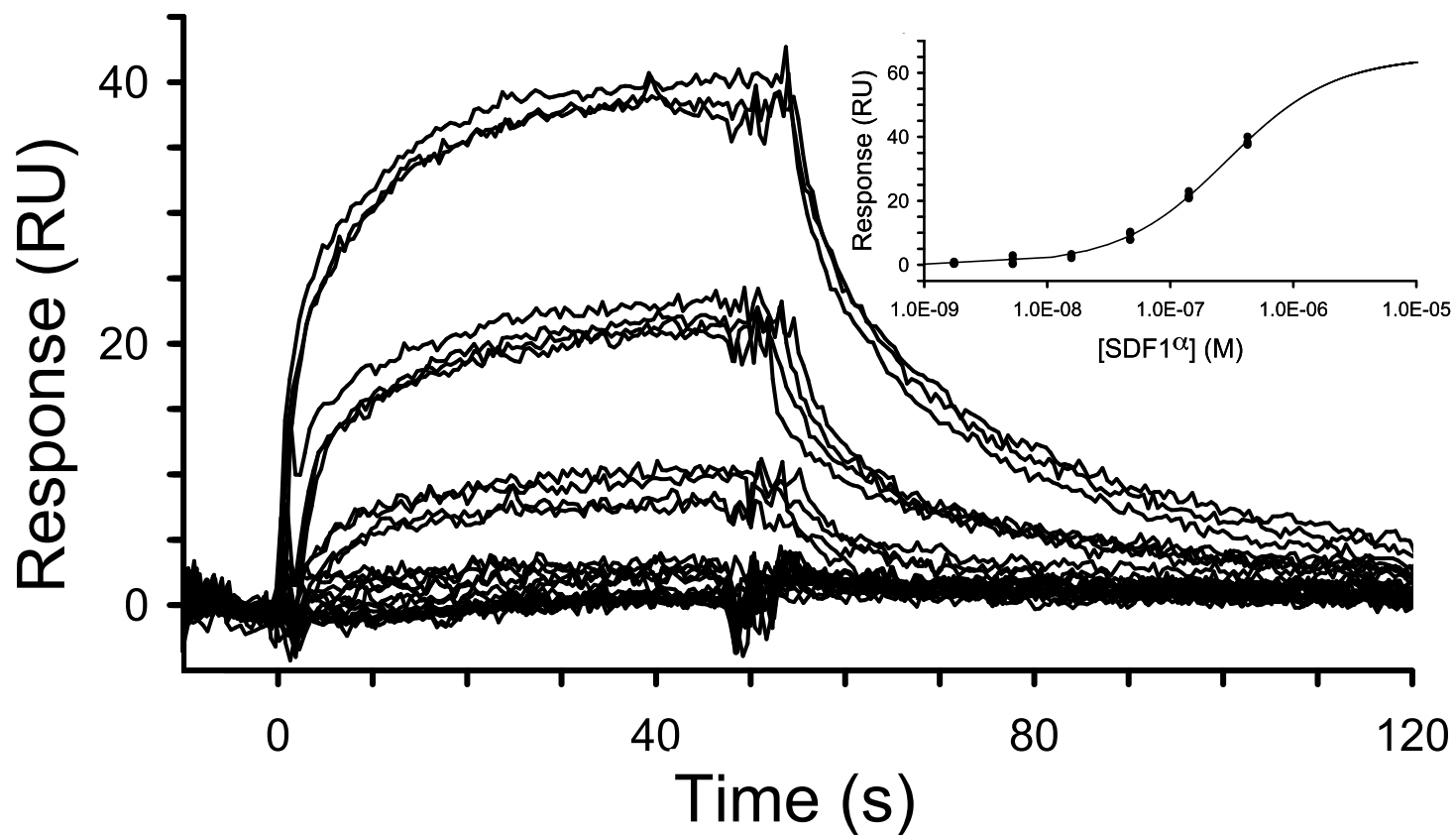
$$\frac{\partial B}{\partial t}(x, t) = k_{on}c(x, h, t)d(x, t) - k_{off}B(x, t)$$

Condition à la paroi: flux de C

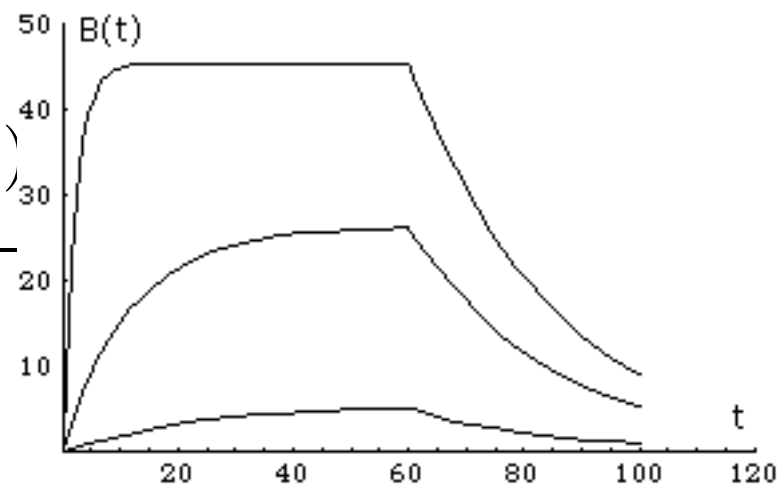
$$D \frac{\partial c}{\partial y}(x, h, t) = - \frac{\partial B}{\partial t}(x, t)$$

Signal de résonance (RU)





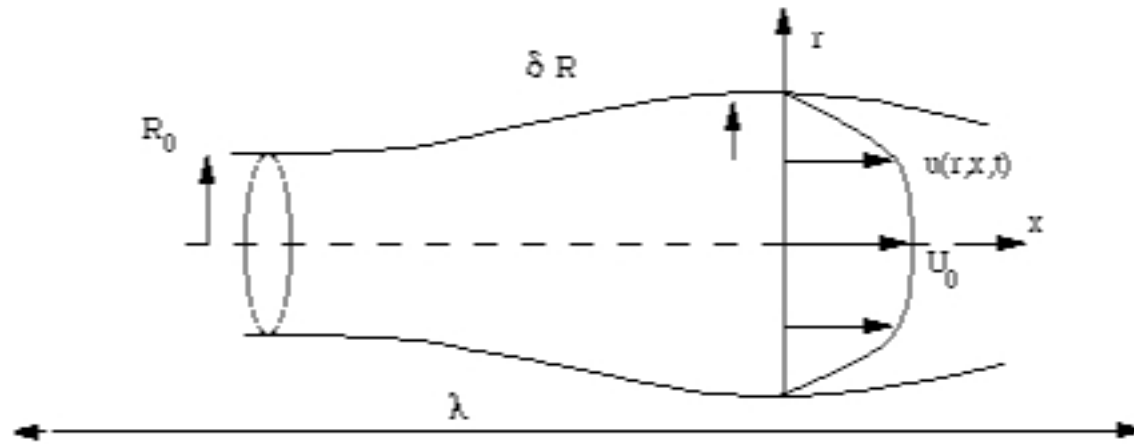
$$B(t) = R_T \frac{1 - e^{-(1 + k_{off}/(k_{on}C_T))(tk_{on}C_T)}}{1 + k_{off}/(k_{on}C_T)}$$





# Méthode inverse dans les artères

- P.-Y. Lagrée (LMM P6)



$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon_2 \left( u \frac{\partial}{\partial x}u + v \frac{\partial}{\partial r}u \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{\partial}{r\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r}u \right), 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}.$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta R}{R_0}, \quad \alpha = R_0 \sqrt{\frac{2\pi/T}{\nu}}$$

- élasticité de la paroi:  $p(x, t) = k(R(x, t) - R_0)$

+ Conditions aux limites: ici hyperboliques ( $R(x_{in}, t)$  and  $R(x_{out}, t)$ ) données.

- Intégral 1D

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x} (R^2 U_0 - q) = 0, \quad R = 1 + \varepsilon_2 h.$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \varepsilon_2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \Gamma - U_0 \frac{\partial}{\partial x} q \right) = -2 \frac{2\pi}{\alpha^2} \tau, \quad \tau = \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \Big|_{\eta=0}.$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + \varepsilon_2 U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{\tau_0}{R^2}, \quad \tau_0 = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \Big|_{\eta=0}.$$

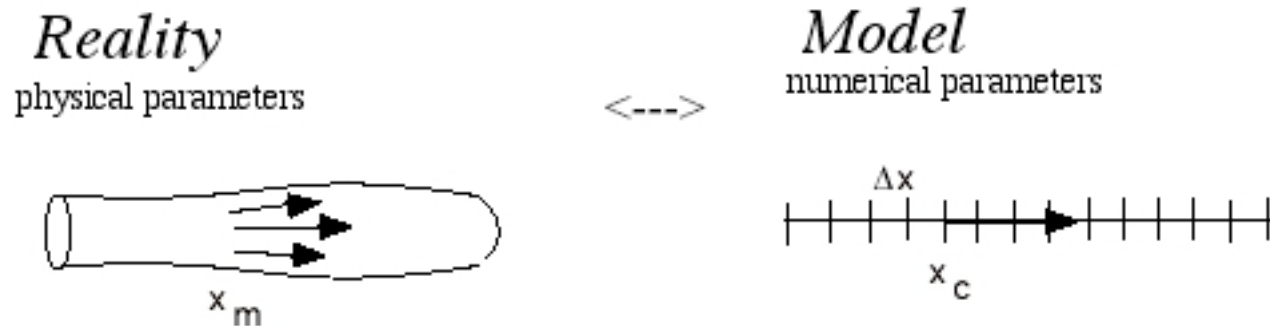
$$p(x, t) = k(h(x, t))$$

+ relation de fermeture issue des profils de Womersley

# Méthode inverse

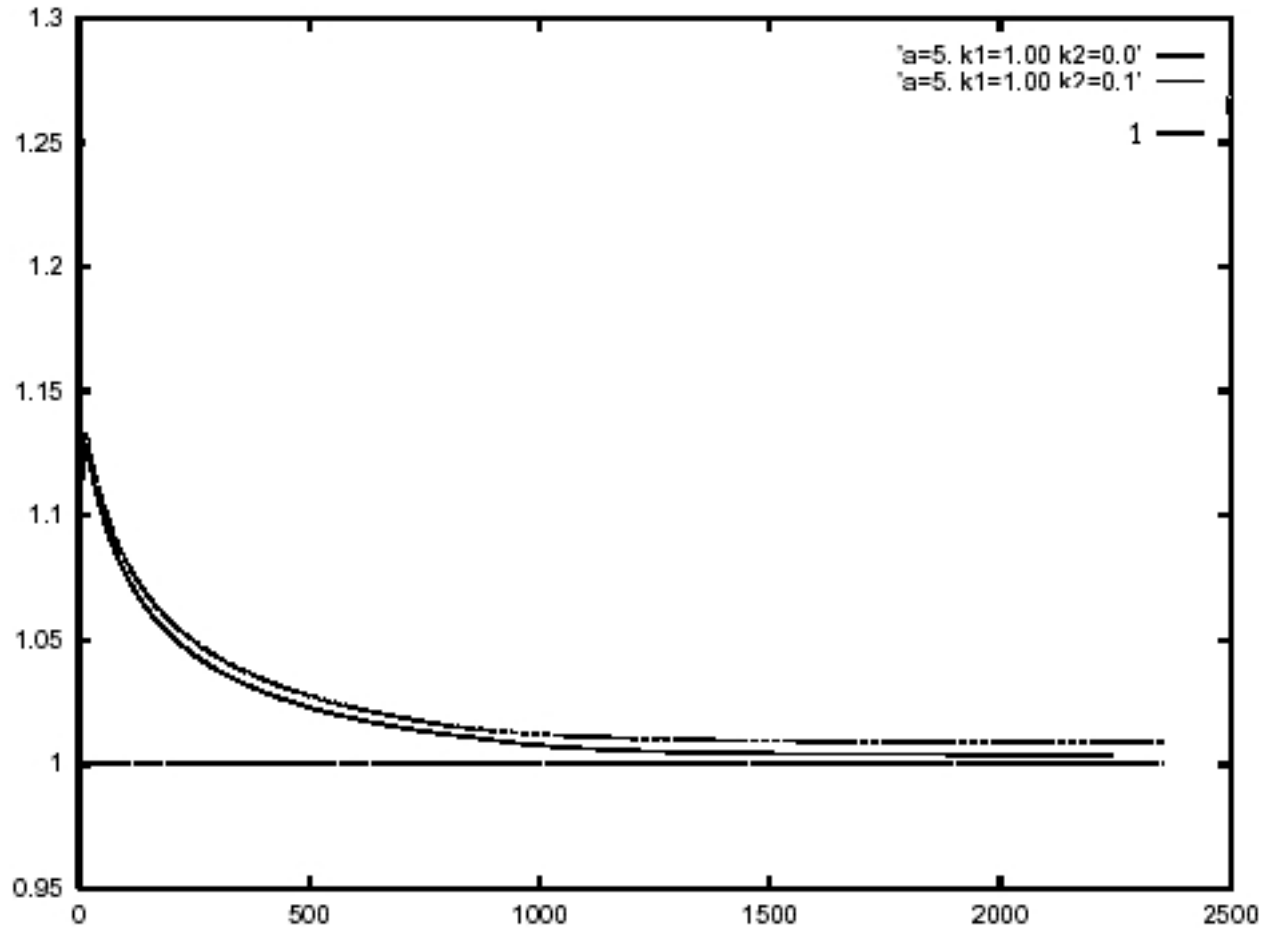
En utilisant les équations RNSP comme données synthétiques on cherche à retrouver les paramètres par une méthode inverse (rétropropagation...)

Settle a non invasive method to estimate wall elasticity



Minimisation entre la "mesure" et le calcul 1D en un point.

# Méthode inverse



Exemple de résolution: historique des itérations pour retrouver la valeur visée  $k = 1$ .

# Méthode inverse non invasive pour mesurer la viscosité

P. Flaud (LBHP PVII),  
J.M. Fullana (inothera),  
M. Rossi (LMM PVI)

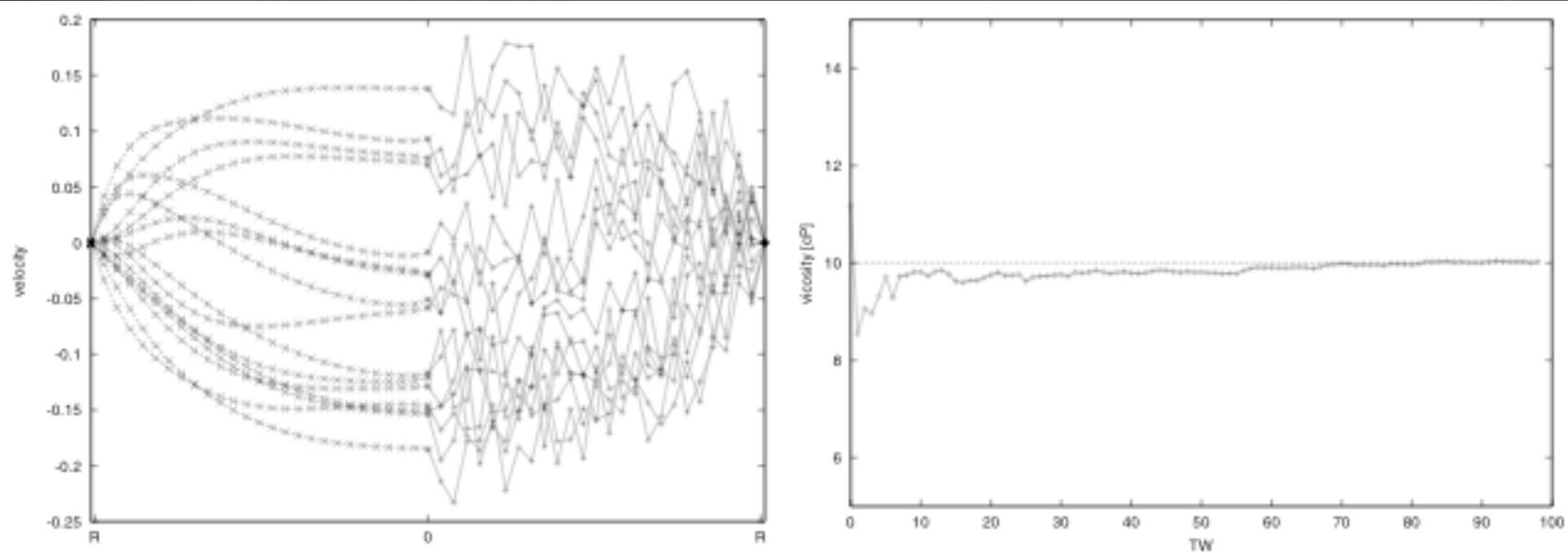
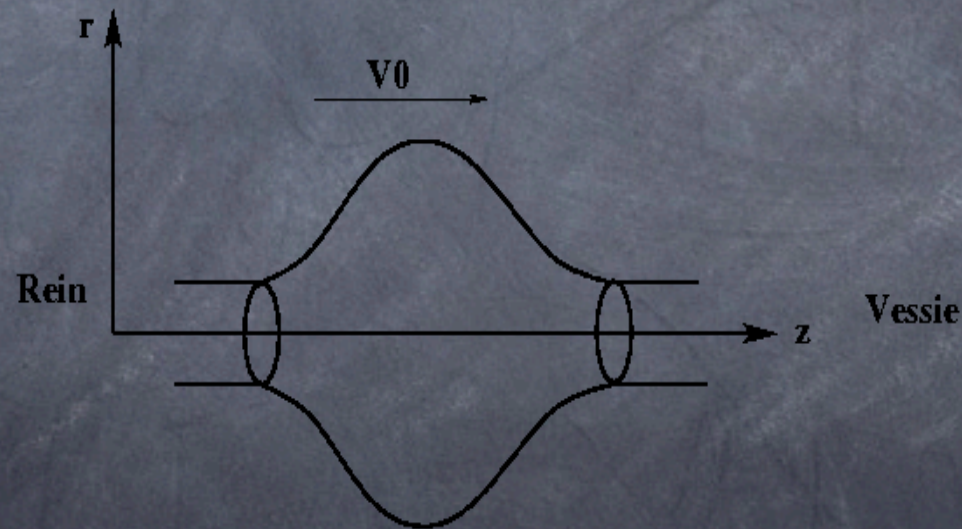


FIG. 4: (a) Temporal evolution of synthetic data (right side of the profile) for a noise level of 9.96dB. The reconstructed data is depicted on the left side of the profile. Each curve corresponds to a different time  $S_k$ . (b) Optimal viscosity  $\nu_{opt}$  as function of learning window size  $TW$  for a relative noise level of 9.96dB.

# Modélisation du champ des vitesses dans un bolus urétéral

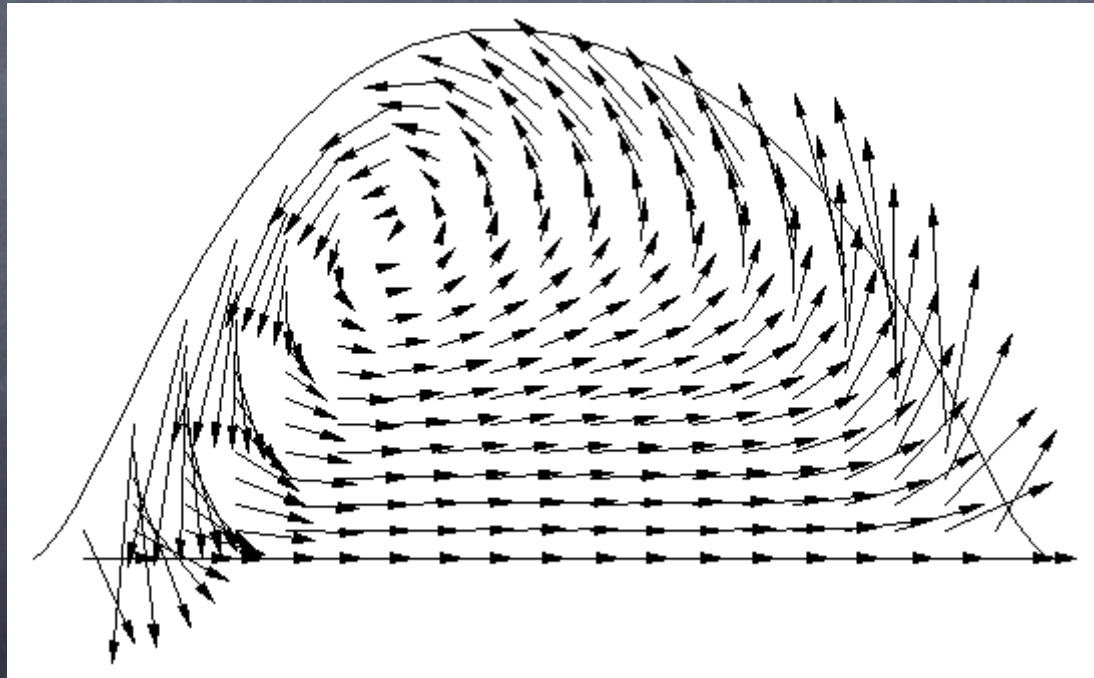
- A. VOGEL (LMM P6)
- B. ELMABSOUT (LMM P6)
- D. GINTZ (LMM P6)





$$\begin{cases} U^1(r, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{r}{2} B_n I_0 \left( \frac{n\pi r}{L} \right) + \frac{n\pi}{L} A_n I_1 \left( \frac{n\pi r}{L} \right) \right] \cos \left( \frac{n\pi z}{L} \right) \\ U^3(r, z) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{n\pi}{L} A_n I_0 \left( \frac{n\pi r}{L} \right) + \left[ \frac{L}{n\pi} I_0 \left( \frac{n\pi r}{L} \right) + \frac{r}{2} I_1 \left( \frac{n\pi r}{L} \right) \right] B_n \right\} \sin \left( \frac{n\pi z}{L} \right) \end{cases}$$

Pour un ordre  $s = 78$ , une convergence numérique est obtenue:

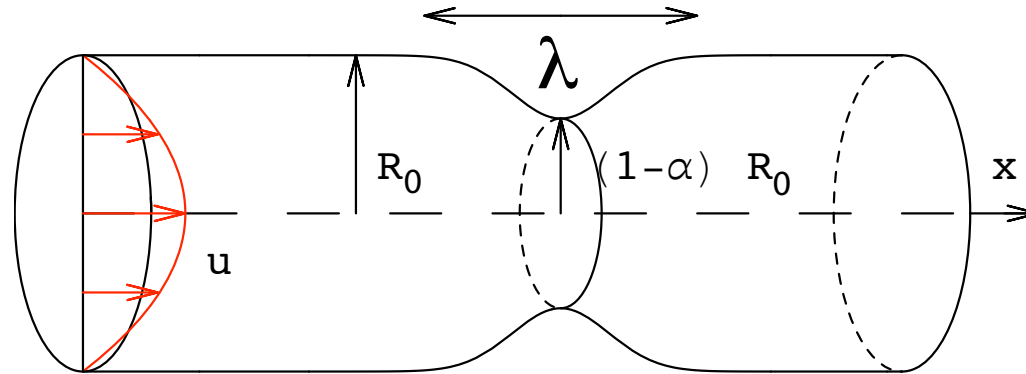


Résultat obtenu sous *Mathematica* avec un développement de  $\phi$  en série de Fourier impaire de 20 termes

# Ecoulement dans les artères sténosées

- PYL
- S. Lorthois (IMFT)

## RNSP Scales



En utilisant:

$$x^* = xR_0Re, \quad r^* = rR_0, \quad u^* = U_0u, \quad v^* = \frac{U_0}{Re}v, \quad t^* = t\frac{R_0}{U_0}Re,$$
$$p^* = p_0^* + \rho_0U_0^2p \quad \text{and} \quad \tau^* = \frac{\rho U_0^2}{Re}\tau$$

le système suivant d'équations différentielles est obtenu à partir de Navier Stokes, lorsque  $Re \rightarrow \infty$ :

## RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

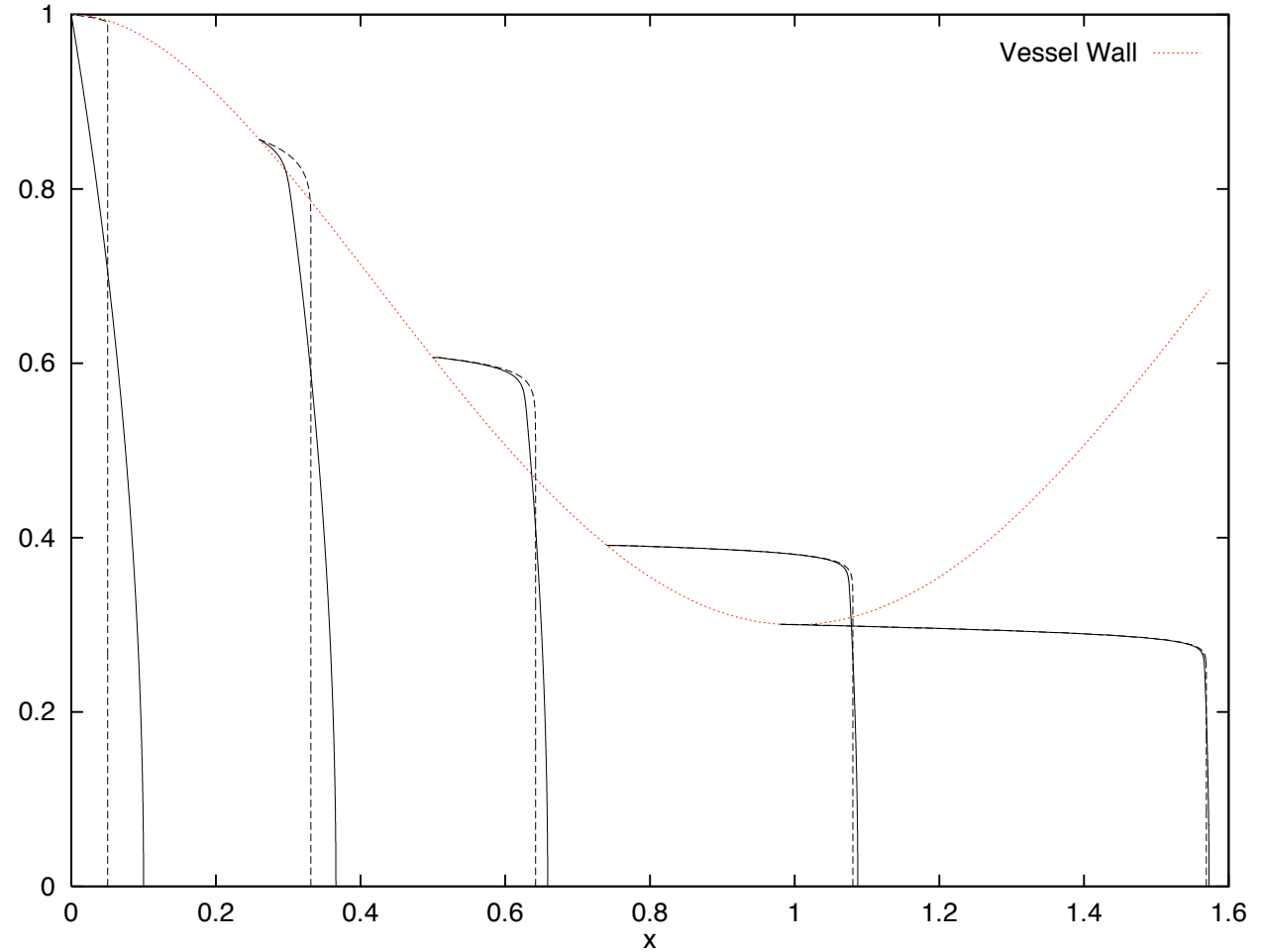
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv &= 0, \\ (u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial r}u) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{r\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}u), \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial r}.\end{aligned}$$

- symétrie axiale ( $\partial_r u = 0$  et  $v = 0$  en  $r = 0$ ),
- adhérence à la paroi ( $u = v = 0$  en  $r = 1 - f(x)$ ),
- profils d'entrée ( $u(0, r)$  et  $v(0, r)$ ) donnés
- *pas* de condition de sortie en  $x_{out} = \frac{x_{out}^*}{R_0 Re}$
- streamwise marching (résolution en suivant l'écoulement)  
même lorsqu'il y a séparation .

Evolution du profil de vitesse le long du convergent dans une sténose à 70% ( $Re = 500$ ) ;

— trait plein:  
Poiseuille en entrée

- - - - trait pointillé:  
profil plat en entrée



## IBL intégral: équation 1D

$$\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\bar{\delta}_1}{H}\right) = \bar{\delta}_1\left(1 + \frac{2}{H}\right)\frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}} + \frac{f_2 H}{\bar{\delta}_1 \bar{u}_e},$$
$$\bar{u}_e = \frac{1}{(R^2 - 2(\lambda/Re)^{-1/2}\bar{\delta}_1)}.$$

Pour résoudre ce problème une relation de fermeture liant  $H$  et  $f_2$  à la vitesse et à l'épaisseur de déplacement doit être trouvée:

On définit  $\Lambda_1 = \bar{\delta}_1^2 \frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}}$ ,

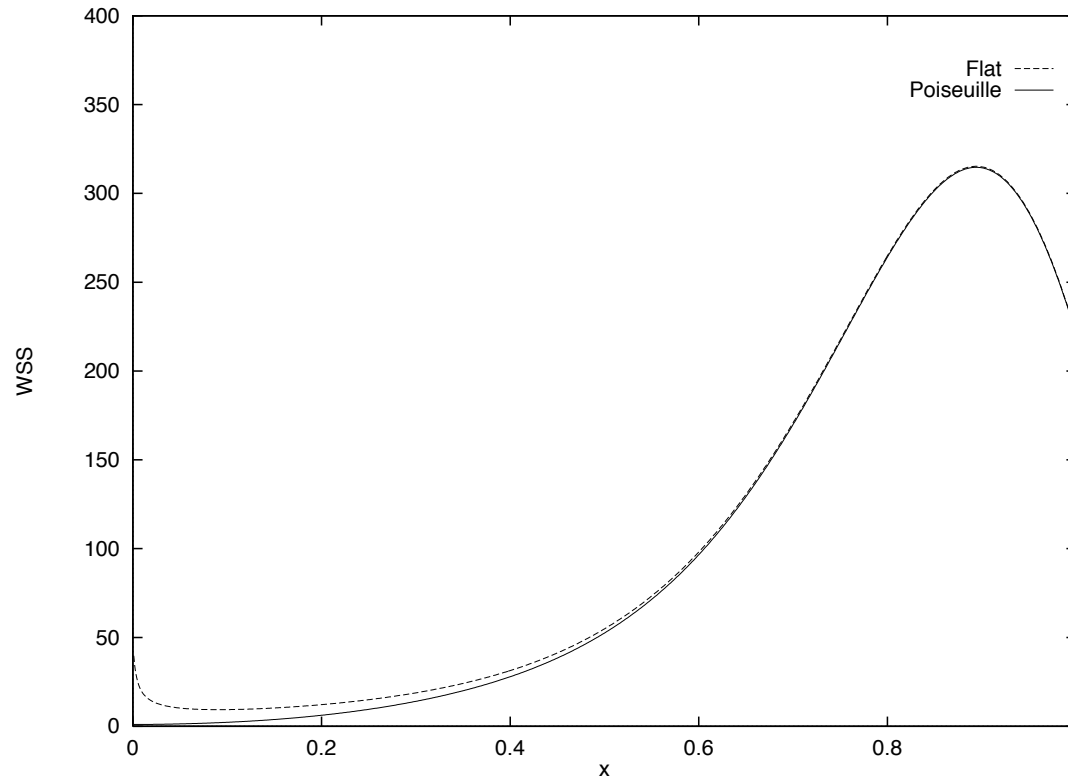
le système est fermé par la résolution des profils de Falkner Skan:

si  $\Lambda_1 < 0.6$  alors  $H = 2.5905 \exp(-0.37098\Lambda_1)$ , sinon  $H = 2.074$ .

De  $H$ ,  $f_2$  est calculé par  $f_2 = 1.05(-H^{-1} + 4H^{-2})$ .

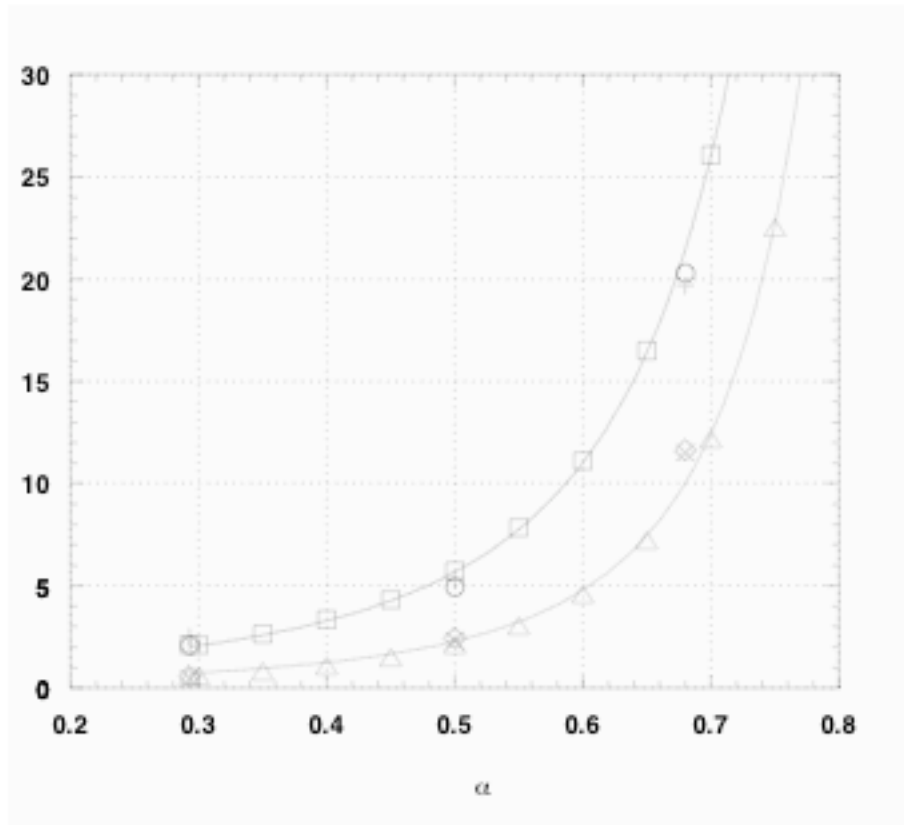
exemples de profils

# Frottement pariétal – Wall Shear Stress



Evolution de la distribution de WSS le long du convergent (sténose de 70%  $Re = 500$ );  
—— trait plein: Poiseuille en entrée, - - - - trait pointillé: profil plat

# IBL intégral: Comparaison avec Navier Stokes (Siegel et al. 1994)



$$WSS = aRe^{1/2} + b$$

Coefficient  $a$  et  $b$  du maximum de WSS.

lignes avec triangle  $\triangle$  et "carré" : coefficient  $a$  et  $b$  obtenus en utilisant la méthode IBL;

$\diamond$  : coefficient  $a$  obtenu par Siegel pour  $\lambda = 3$  ;

$\times$  : coefficient  $a$  obtenu par Siegel pour  $\lambda = 6$  ;

$\circ$  : coefficient  $b$  obtenu par Siegel pour  $\lambda = 3$  ;

$+$  : coefficient  $b$  obtenu par Siegel pour  $\lambda = 6$ .



# Apnée du Sommeil: paroi rigide

P.-Y. Lagrée (LMM P6)

A. van Hirtum (ICP Grenoble)

X. Pelorson (ICP Grenoble)

A. Hirschberg (TU Eindhoven)

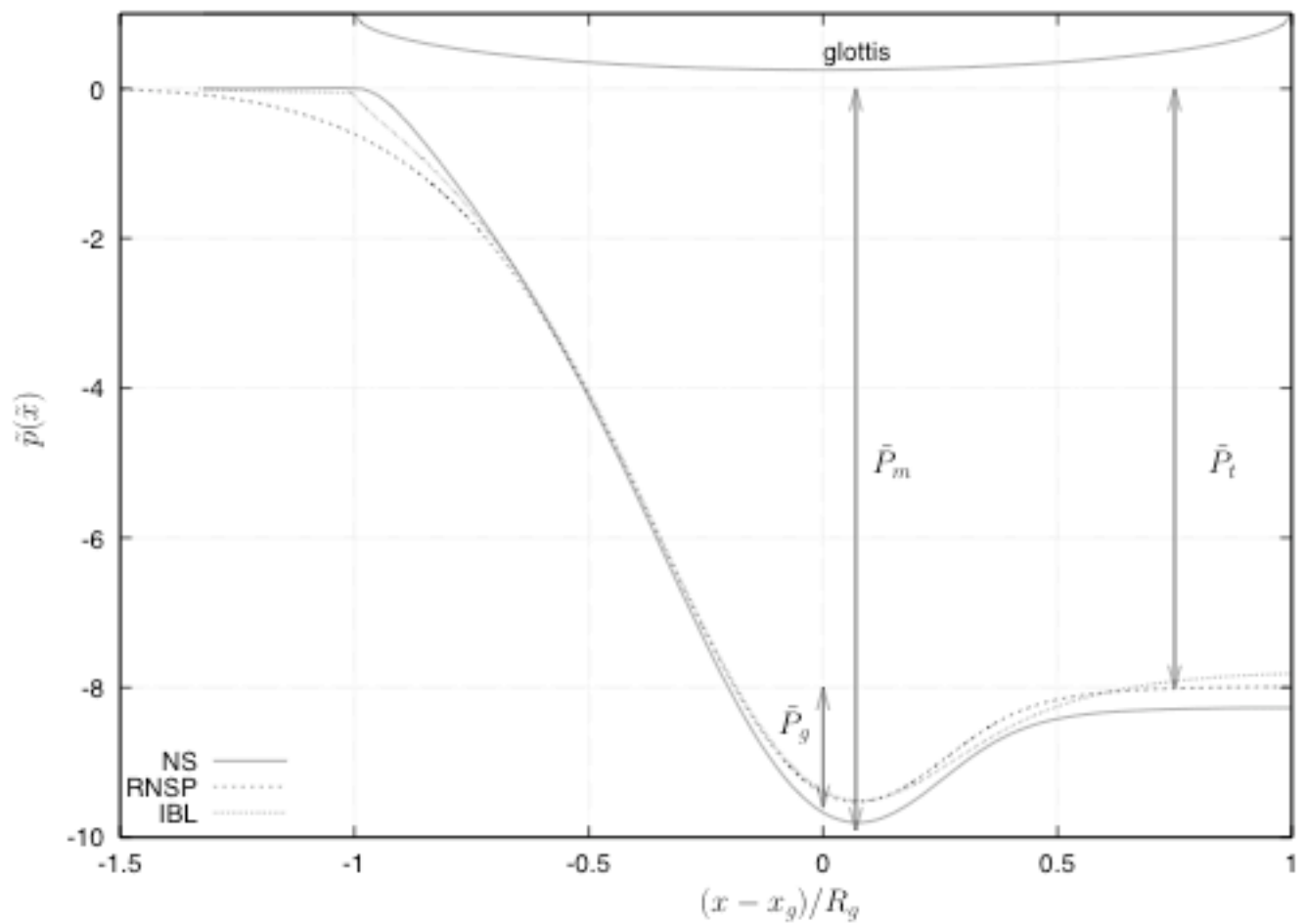
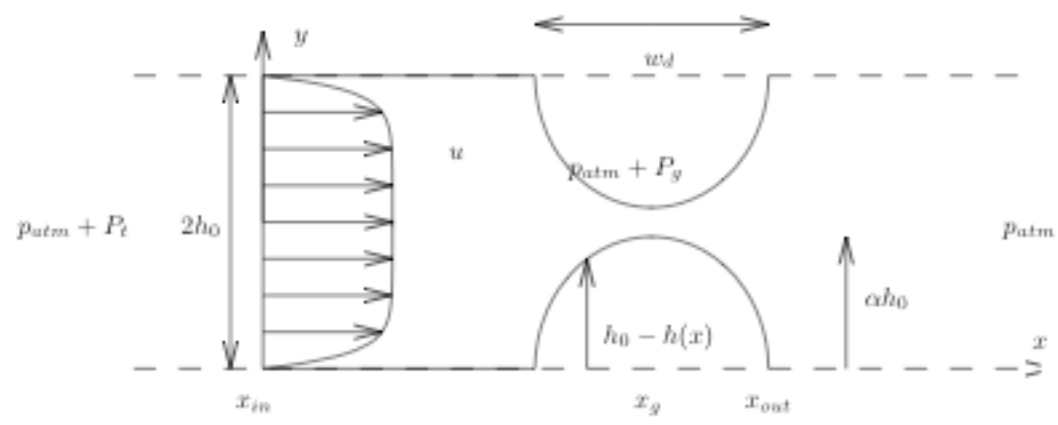
# Reduced Navier Stokes

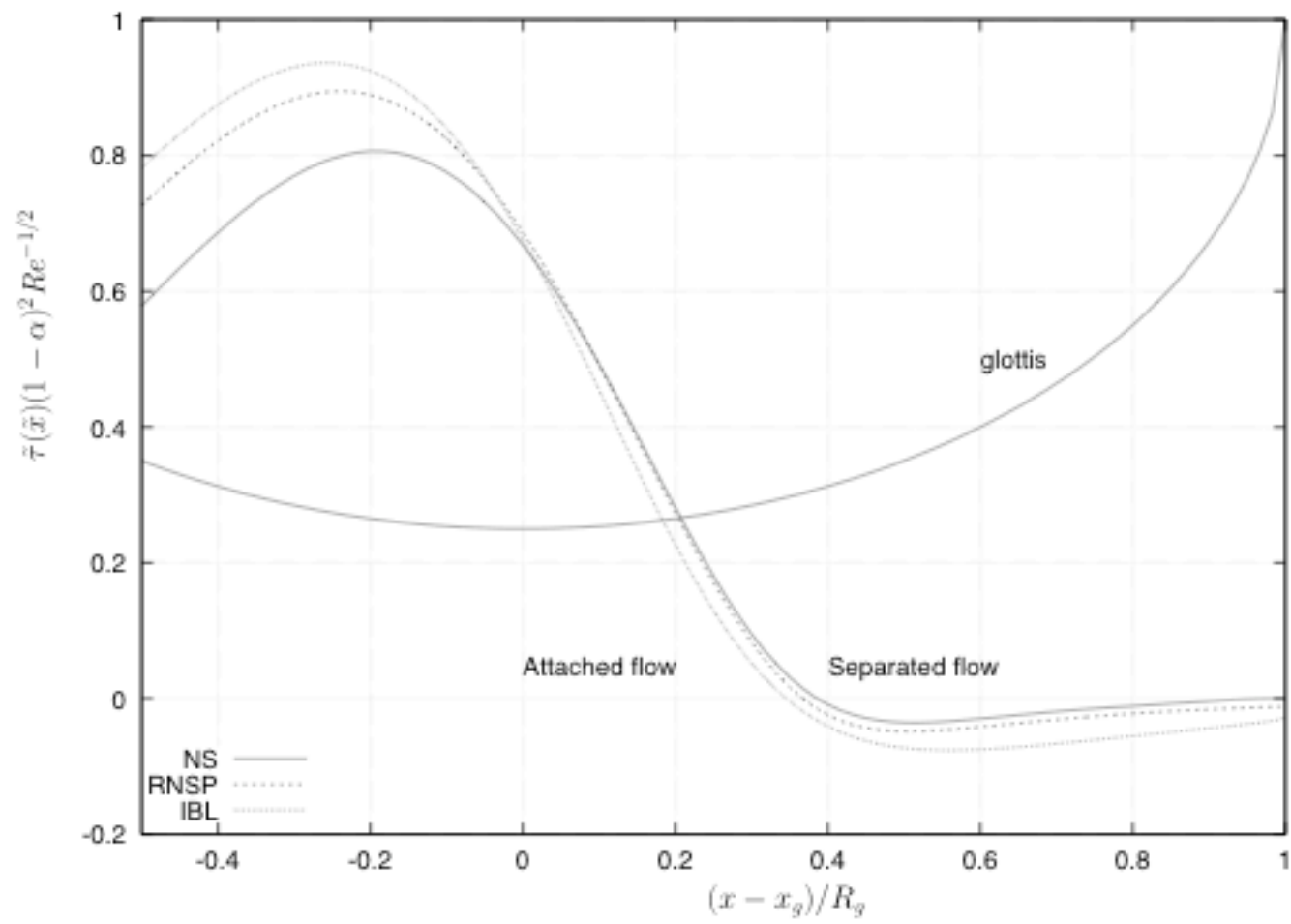
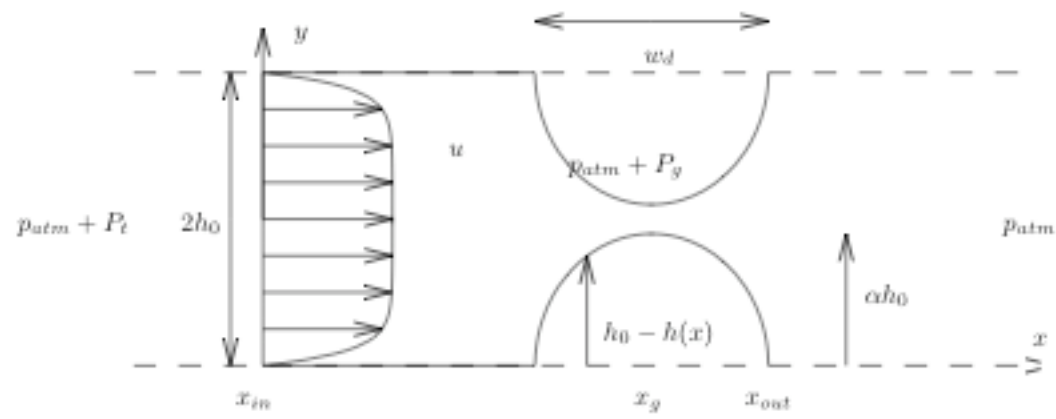
$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = 0$$

$$u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}p + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y}p$$

avec un adimensionnement *ad hoc*

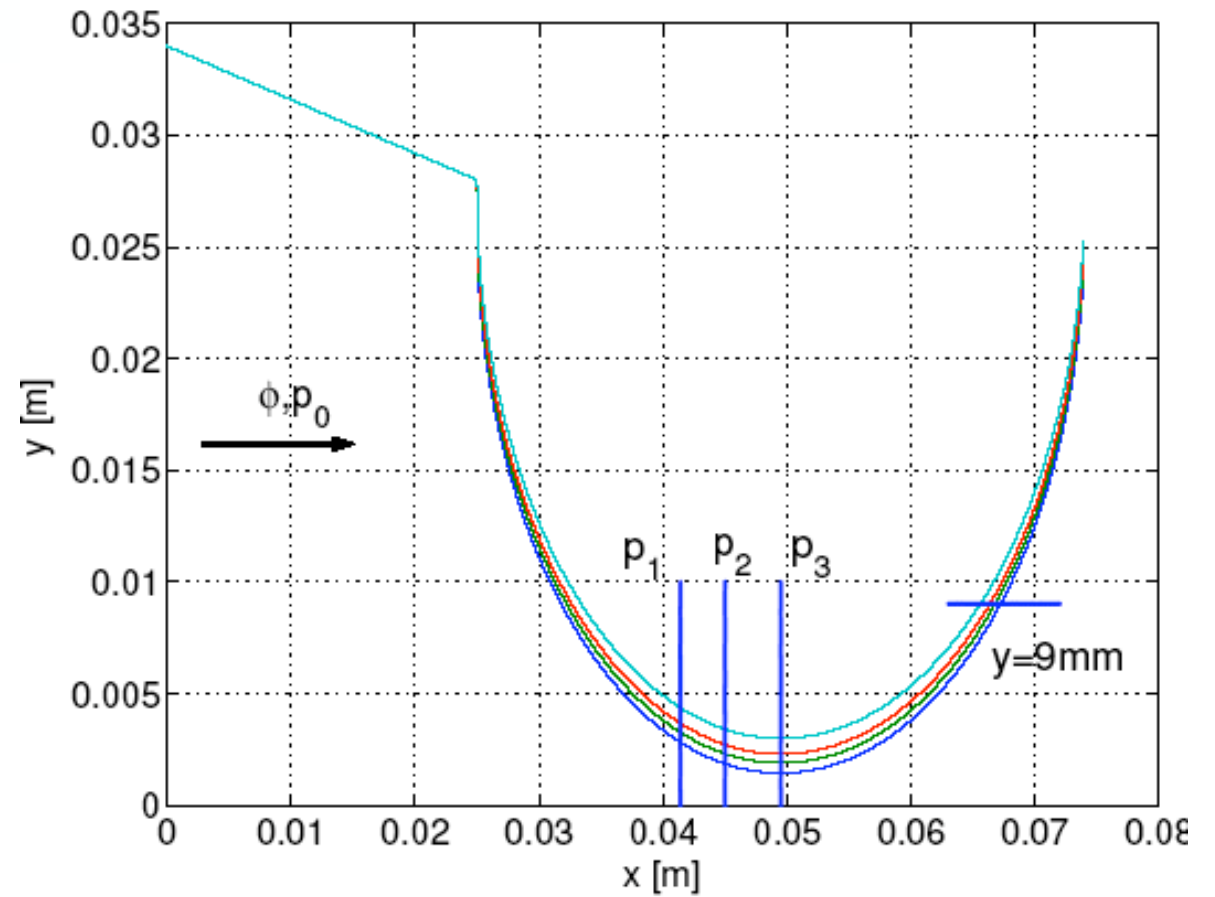
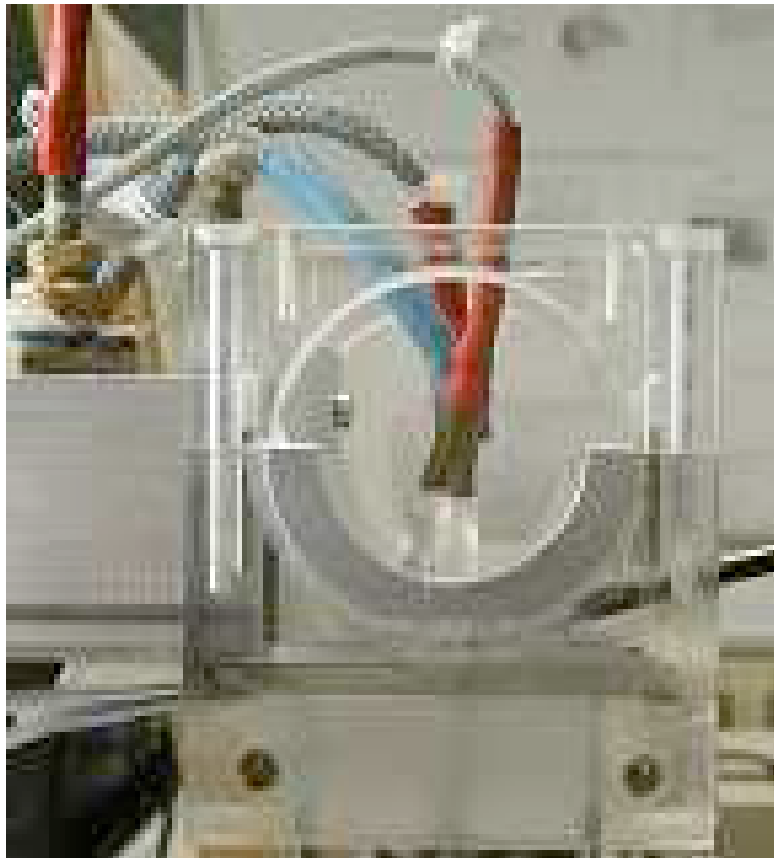


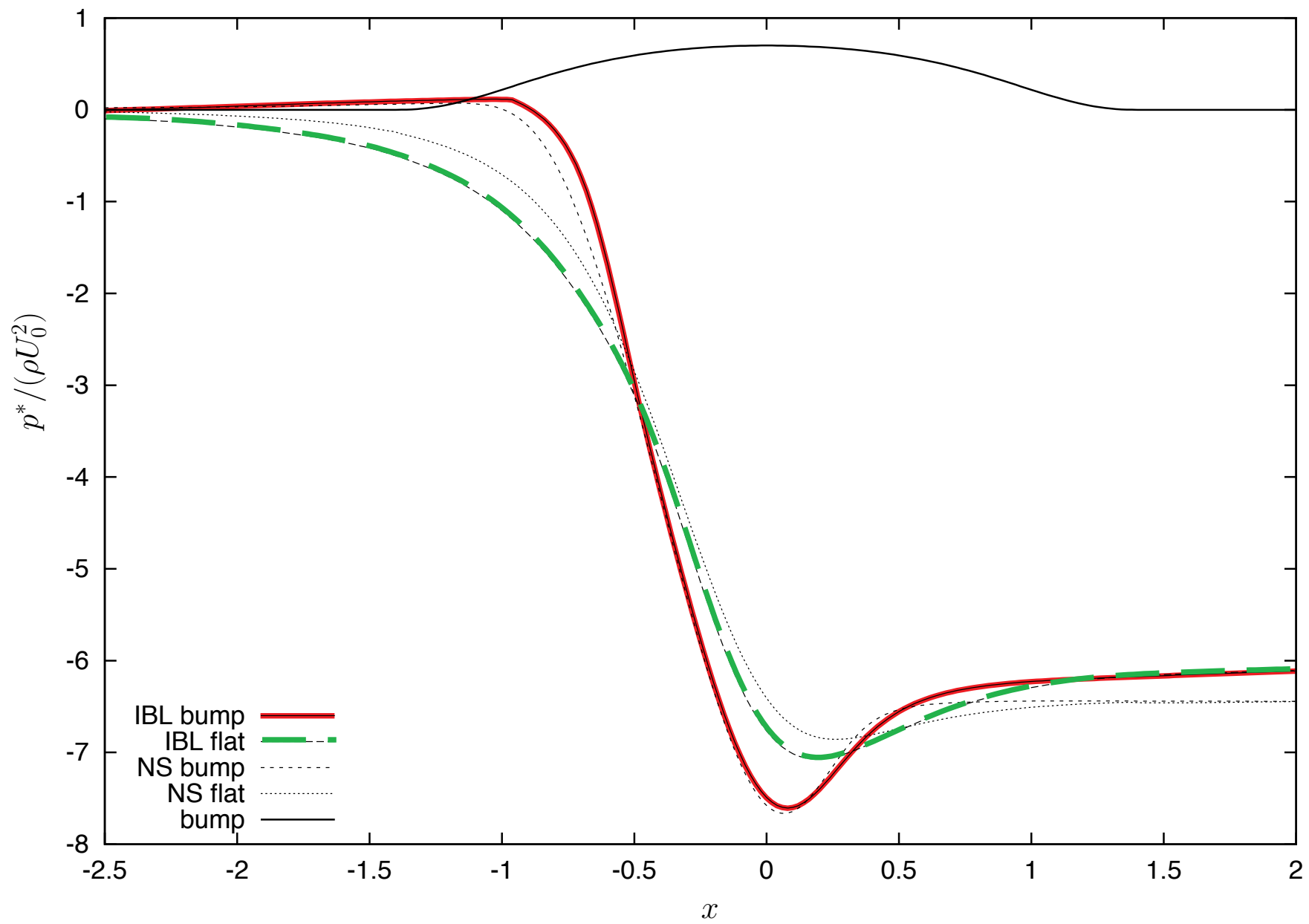


# cas non symétrique

- RNSP
- méthode intégrale modifiée pour tenir compte de la variation de pression transversale
- NS

# PAROIS RIGIDES





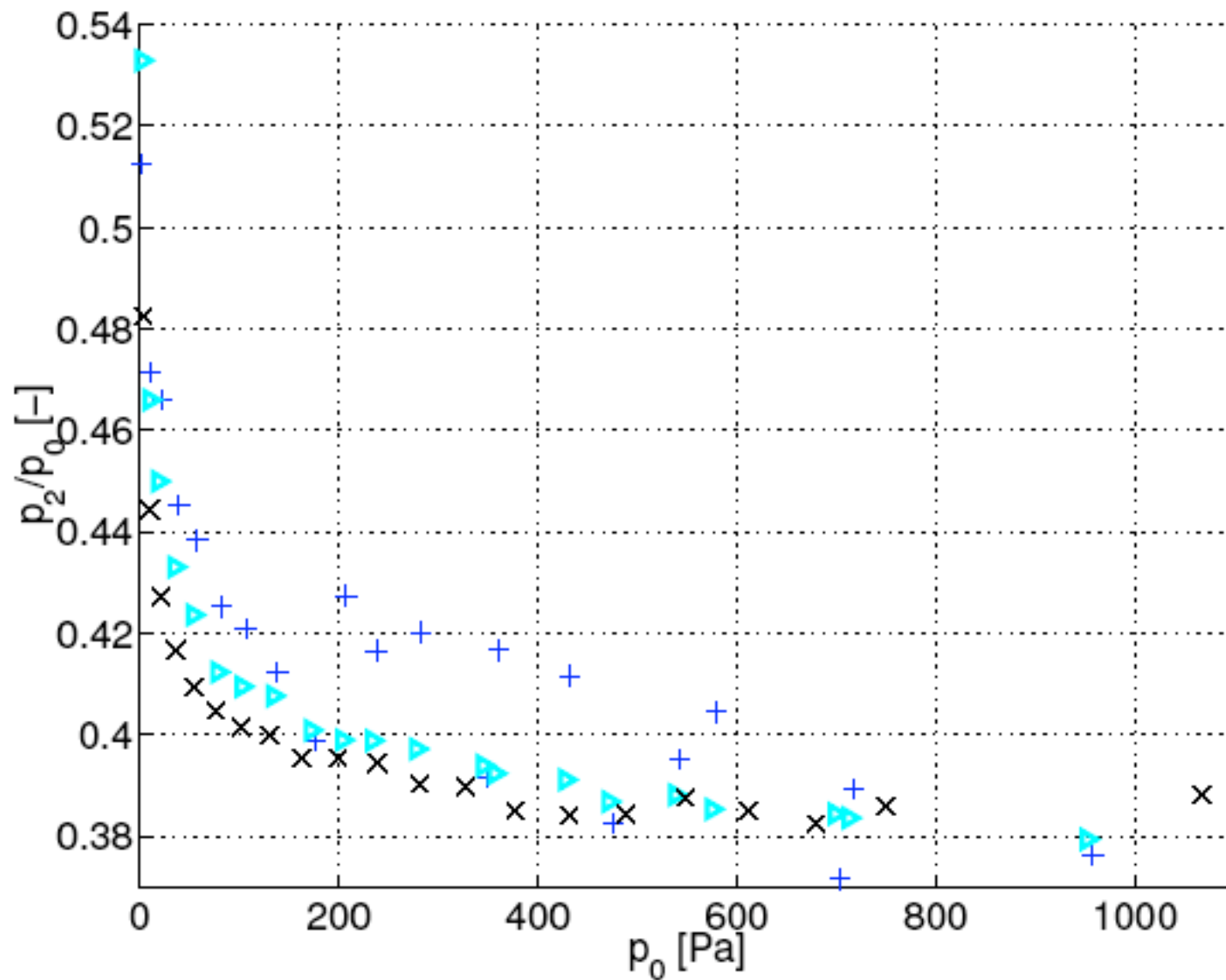
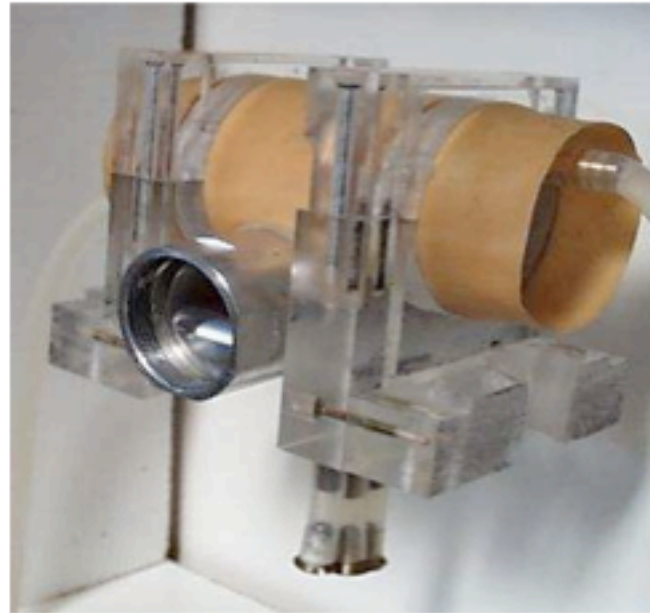
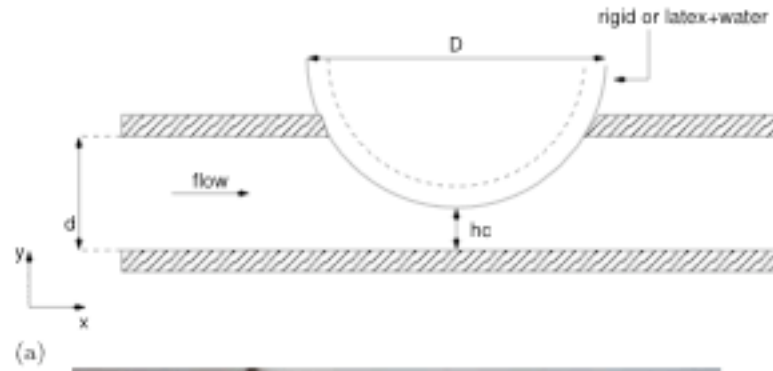


Figure 11. Normalized pressure at position  $p_2$  for  $h_{min} = 1.45mm$ : measured data (+), Thwaites ( $\triangleright$ ) and RNSP (x).

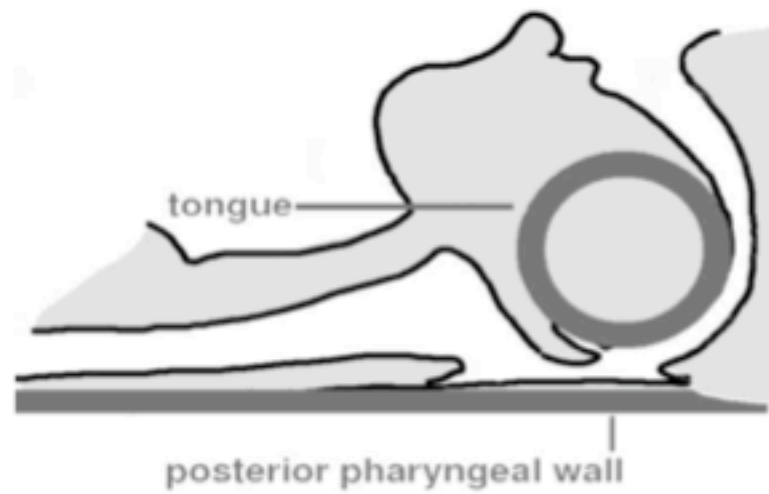


# Apnée du Sommeil: paroi déformable

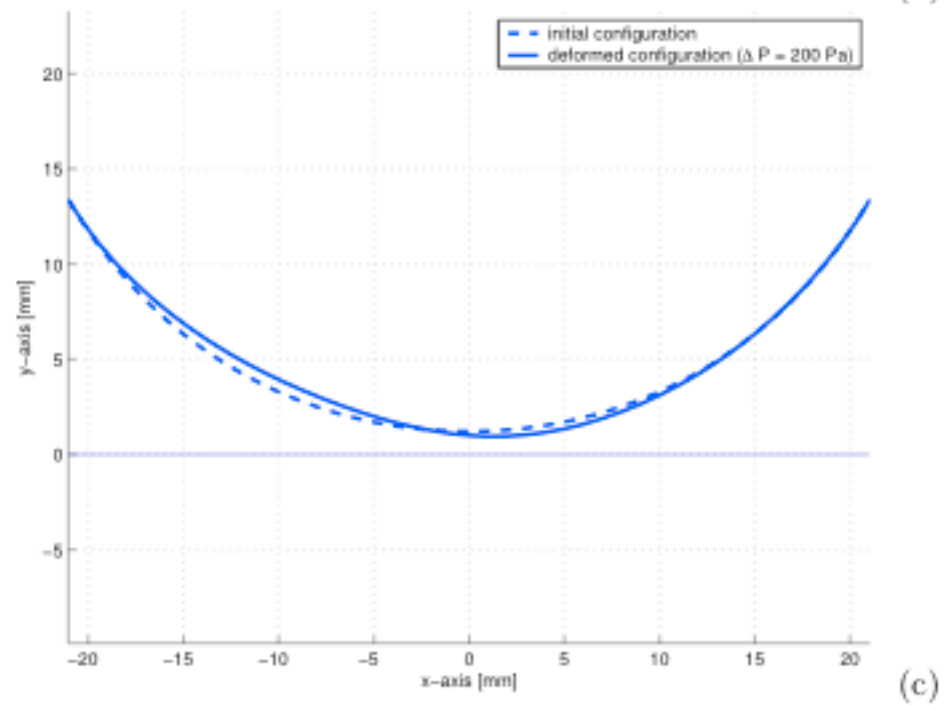
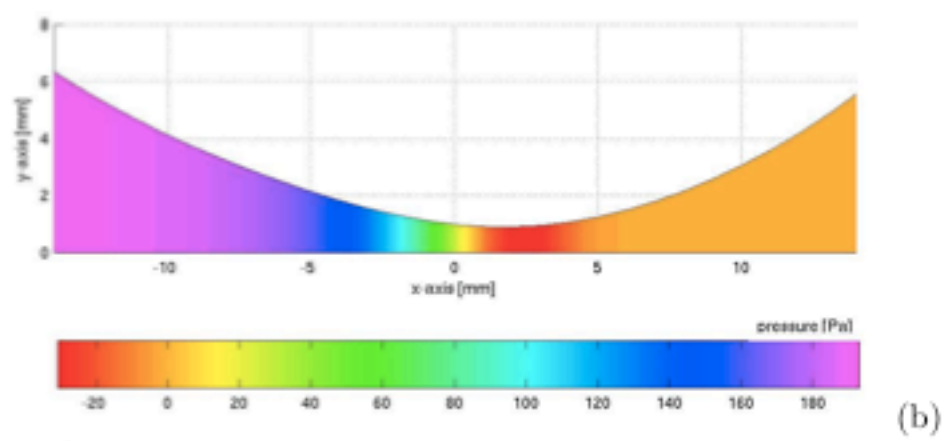
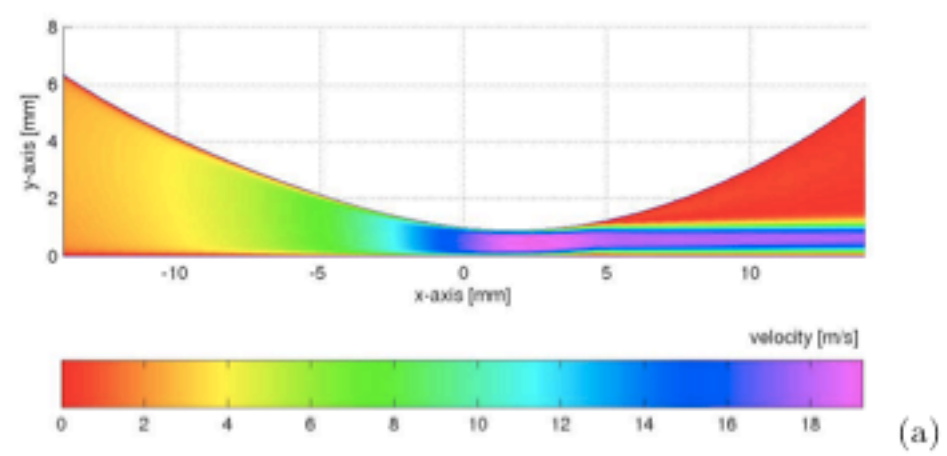
- PYL (LMM P6)
- A. van Hirtum (ICP Grenoble)
- X. Pelorson (ICP Grenoble)
- F. Chouly (TIMC J Fourier Grenoble)
- Y. Payan (TIMC J Fourier Grenoble)

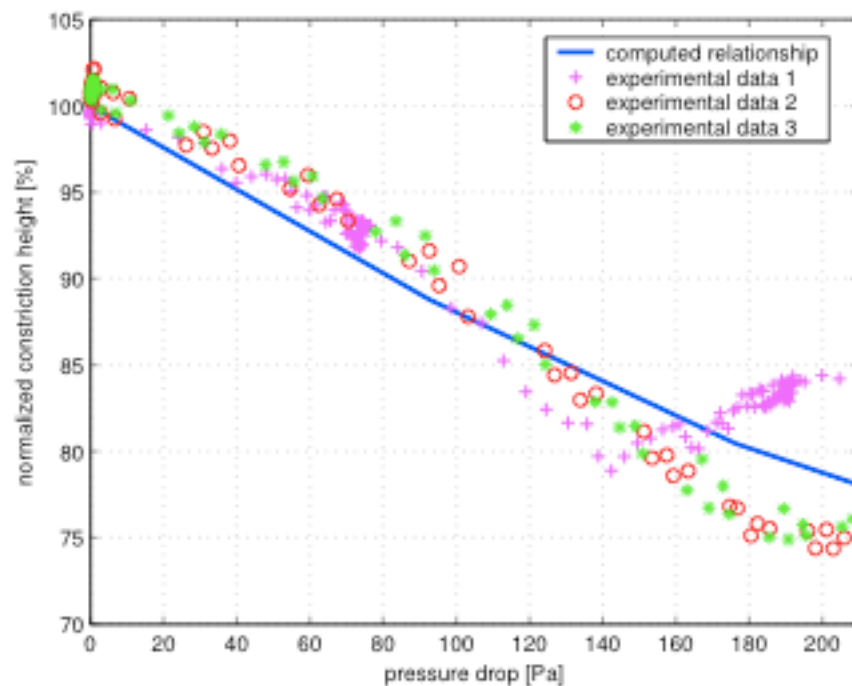


(b)



(c)





(c)

(d)

**Fig. 9.** Simulation of a hypopnea, for  $\Delta P = 210 \text{ Pa}$ ,  $P_{\text{int}} = 200 \text{ Pa}$  and  $h_c = 1.2 \text{ mm}$ . (a) Velocity profile (absolute value). Note the acceleration of the fluid while entering the constriction. Flow separation and jet formation are observed. (b) Pressure distribution. Note the negative pressure at the level of the constriction. (c) Lateral view of the latex tube, in initial position (dashed line) and after computation of the deformation (solid line). (d) Constriction height variation in response to inlet pressure. Comparison of theoretical and experimental values.

# Conclusion:

## apports possibles

- équations simplifiées  
calcul rapide  
premier ordre (asymptotique)
- dimensionnement pour un problème complet
- méthode inverse
- cas test / cas limite pour les problèmes complets
- condition aux limites pour un pbm complet