

Université Paris VII – Denis Diderot
L3 Magistère Physique 2006–2007

Khanh-Dang NGUYEN THU-LAM

Rapport de stage (version π , 11 septembre 2007)

Stabilité d'un fond unidimensionnel érodé par un écoulement laminaire à surface libre

Sous la direction de Pierre-Yves LAGRÉE,
Institut Jean le Rond d'Alembert (CNRS – Université Paris 6)



Résumé

Afin de comprendre la formation des rides de sable sous-marines, il sera présenté un modèle simple décrivant la stabilité linéaire d'un fond granulaire unidimensionnel érodé par un écoulement fluide 2D à surface libre, laminaire et quasi-stationnaire. La loi d'érosion utilisée est un ajustement en loi de puissance des données expérimentales de Charru *et al.* [7]. Elle inclut un terme de gravité due à la pente du fond granulaire, indispensable à la stabilité des perturbations de faibles longueurs d'ondes. Le modèle est en très bon accord avec les résultats préliminaires des expériences de Lajeunesse et Malverti.

La résolution des équations linéarisées de Navier-Stokes dans différents régimes asymptotiques sera également présentée.

Notes concernant la version π

Les différences entre la version π du rapport — que vous lisez présentement — et la version rendue aux enseignants de la fabuleuse Université Paris VII sont les suivantes :

- ajout des figures 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6 ;
- cette merveilleuse et utile note de version ;
- correction de diverses coquilles.

Remerciements

Le travail effectué lors du stage dont le présent document est le rapport n'aurait pu voir le jour sans Pierre-Yves Lagrée, mon directeur de stage, qui a su me faire découvrir le monde fascinant — et complexe — de la dynamique des fluides et des fonds érodables. Je le remercie pour son encadrement chaleureux.

Je remercie également Olivier Devauchelle pour m'avoir encadré. Je le remercie pour tout le temps qu'il a bien pu m'accorder, malgré la rédaction de son mémoire de thèse qui l'occupe encore. (Courage, Olivier, c'est la dernière ligne droite!)

Je remercie aussi Éric Lajeunesse et Luce Malverti qui m'ont offert la visite guidée de leur laboratoire à Saint-Maur-des-Fossés et des manip' qui s'y trouvent, ainsi que... le café.

Enfin, je tiens à ne pas remercier les bugs du logiciel *Mathematica*® dans sa version 5.2 qui ont pris un malin plaisir à surgir inopportunistement sous la forme d'erreur de segmentation ou, plus insidieusement, sous la forme d'une mirabolante fuite de mémoire. Quant aux affres et lenteurs de la version 6.0...

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Un problème fortement couplé	2
1.2	Notations et hypothèses générales	2
2	L'écoulement	3
2.1	Équations dimensionnées	3
2.2	Solution de base	4
2.3	Échelles caractéristiques et équations adimensionnées	4
2.4	Perturbation du fond et linéarisation	5
2.5	Équation d'Orr-Sommerfeld stationnaire	5
2.6	Comparaison avec d'autres écoulements de base	6
2.6.1	Perturbation de l'écoulement de Couette	6
2.6.2	Perturbation de l'écoulement de Poiseuille plan	7
2.6.3	Comportements asymptotiques	7
2.6.4	Résolution numérique et comparaison	7
3	Stabilité linéaire du fond	13
3.1	Érosion par charriage	13
3.1.1	Nombre de Shields	13
3.1.2	Loi de transport en régime permanent	13
3.1.3	Dynamique de l'érosion	14
3.2	Relation de dispersion	15
3.3	Résultats et interprétations	16
3.3.1	Données expérimentales de Coleman et Eling	16
3.3.2	Résultats expérimentaux de Lajeunesse et Malverti	17
4	Discussion et conclusion	19
A	Développements asymptotiques dans le cas de la surface libre	21
A.1	Régime des grandes longueurs d'ondes ($k \ll 1$)	21
A.2	Régime des petites longueurs d'ondes ($k \gg 1$)	22
A.3	Régime non-visqueux	23
A.3.1	Couche extérieure	23
A.3.2	Couche intérieure	24
A.3.3	Raccord des deux couches	24
	Bibliographie	25

Chapitre 1

Introduction

Lorsqu'une étendue de sable est soumise à l'action de l'eau ou de l'air, il est possible d'observer la formation de rides de sable. Sur les plages océanes découvertes par la marée basse, la présence des rides est expliquée par le mouvement oscillant des vagues maritimes. Sur la surface des dunes landaises, le vent crée également des motifs en forme de rides. Le lit des rivières est, lui aussi, ondulé par des rides.

Nous nous pencherons sur le cas de la formation de rides sur un fond granulaire, soumis à l'action d'un écoulement uniforme d'un fluide visqueux, à surface libre.

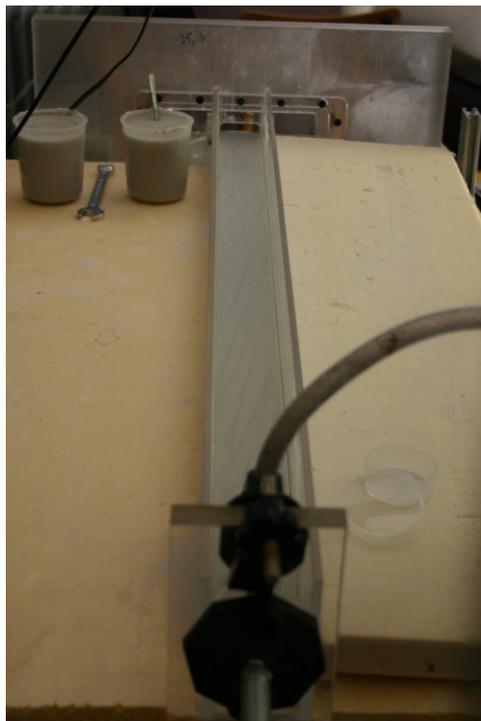


FIG. 1.1 – *Montage expérimental de Lajeunesse et Malverti.*

La formation des rides est un problème de stabilité d'une interface entre un milieu granulaire, le sable, et un fluide, l'eau. Expérimentalement, Lajeunesse et Malverti ont réalisé un canal droit dans lequel un fond de billes de verre a été déposé (voir figure 1.1). L'eau s'écoule dans le canal incliné, au-dessus du fond. Pour certaines valeurs des paramètres expérimentaux, il apparaît des motifs sur le fond. Certains de ces motifs sont unidimensionnels, les rides, d'autres sont bidimensionnels. Nous n'étudierons que l'instabilité conduisant à l'apparition des motifs unidimensionnels. L'écoulement sera considéré comme étant laminaire : la turbulence hydrodynamique ne sera pas prise en compte.

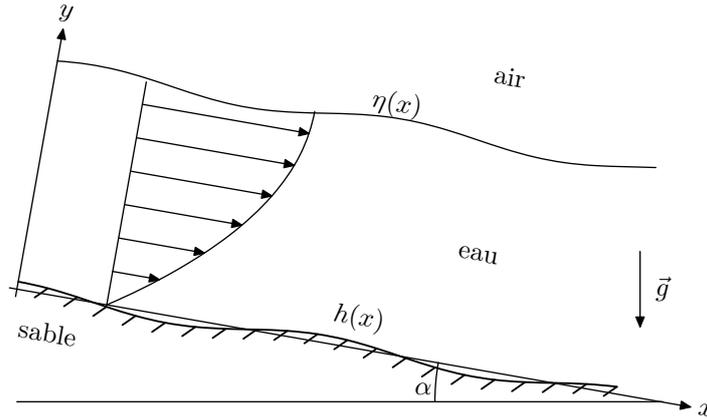


FIG. 1.2 – Notations du problème. L'eau est comprise entre les surfaces d'équations $y = h(x)$ et $y = \eta(x)$; elle s'écoule vers les x positifs.

1.1 Un problème fortement couplé

La dynamique de l'eau est décrite par la Mécanique des Fluides, dont la complexité réside sans doute dans la non-linéarité des équations. Quant au milieu granulaire, on en connaît encore assez peu les mécanismes d'érosion.

Le problème, dans sa globalité, couple fortement la physique des deux milieux. En effet, donnons-nous une topographie du milieu granulaire (l'équation de la surface sable-eau). L'eau s'écoule au dessus du fond de sable par la présence du champ de pesanteur terrestre. Cet écoulement dépend fortement de la topographie du fond. On calcule en particulier le frottement créé par le fluide sur le milieu granulaire. Ce frottement arrache les grains du sable du fond, ce qui modifie la topographie de ce dernier.

Malgré ce que peut laisser envisager le découpage du présent rapport, le problème est ainsi fortement couplé, d'autant plus s'il y a mise en suspension des grains dans l'eau ou écoulement d'eau dans le milieu granulaire. Le chapitre 2, complété par l'annexe A, présentera l'étude de l'écoulement pour un fond considéré comme fixe. Ensuite, le chapitre 3 présentera les lois d'érosion puis l'étude de la stabilité du fond, ainsi que la comparaison des résultats obtenus avec quelques données expérimentales.

1.2 Notations et hypothèses générales

On considère un écoulement stationnaire 2D d'un fluide incompressible ($\partial/\partial t = 0$ et $\partial/\partial z = 0$). L'hypothèse de stationnarité de l'eau ($\partial/\partial t = 0$) est justifiée par l'évolution lente du fond granulaire. L'écoulement se dirige vers les x positifs, sur un fond érodable de hauteur notée $h(x)$. On choisit l'origine du repère de telle sorte que $h(x)$ soit nul en moyenne. L'axe des y est ainsi incliné d'un angle α par rapport au champ de pesanteur terrestre dont les composantes selon x et y sont respectivement $g_x = g \sin \alpha$ et $g_y = -g \cos \alpha$. La hauteur de la surface libre de l'écoulement sera notée $\eta(x)$. Ces notations sont résumées figure 1.2.

On note également $u(x,y)$ et $v(x,y)$ les composantes de la vitesse du fluide, respectivement selon l'axe des x et l'axe des y , $p(x,y)$ étant le champ de pression. La présence de l'atmosphère au-dessus de l'écoulement sera négligée ; on supposera notamment que la pression atmosphérique est nulle. Les effets de tension superficielle ne seront pas non plus introduits dans l'analyse qui suit.

Chapitre 2

L'écoulement

Les équations qui gouvernent la dynamique d'un film liquide s'écoulant sur un plan incliné possèdent une solution analytique stationnaire simple qui est le profil de vitesse de Nußelt, décrit au paragraphe 2.2.

Cette solution stationnaire de base sera perturbée en considérant que le fond supportant l'écoulement n'est non plus plat mais sinusoïdal, d'amplitude infinitésimale. Il est ensuite loisible de linéariser les équations (paragraphe 2.4) afin d'obtenir l'équation d'Orr-Sommerfeld stationnaire (paragraphe 2.5).

Avant de résoudre numériquement cette équation pour étudier la stabilité linéaire du fond érodable au chapitre 3, une comparaison entre la perturbation du cas Nußelt qui nous intéresse ici et la perturbation autour d'autres types d'écoulement sera effectuée au paragraphe 2.6. Le calcul numérique permettra enfin la détermination de la partie imaginaire de la contrainte de cisaillement au fond, qui sera utilisée par la suite.

2.1 Équations dimensionnées

L'écoulement vérifie les équations de conservation de la quantité de mouvement (équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien visqueux incompressible) et l'équation de conservation de la masse :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \sin \alpha, \quad (2.1a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - g \cos \alpha, \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$

où ρ et ν sont respectivement la masse volumique [kg/m^3] et la viscosité cinématique du fluide [m^2/s]. La viscosité (dynamique) du fluide [$\text{Pa}\cdot\text{s}$] sera notée $\mu = \rho\nu$.

Les conditions aux limites sont données au fond par la condition de non-glissement, d'où les deux équations, écrites en $y = h(x)$:

$$u = 0 \quad \text{et} \quad v = 0. \quad (2.3)$$

En sus, la condition cinématique à la surface et la condition de continuité de la contrainte normale [20, éq (3.8) p. 453] donnent les trois conditions suivantes, écrites en $y = \eta(x)$:

$$v = \eta'(x) u, \quad (2.4)$$

$$(1 - \eta'(x)^2) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \eta'(x) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.5a)$$

$$p - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \eta'(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.5b)$$

où $\eta'(x)$ représente la pente de la surface en x .

2.2 Solution de base

On vérifie aisément que le profil stationnaire de Nußelt est solution des équations non-perturbées, c'est-à-dire pour $h(x) = 0$:

$$u_0(x,y) = \frac{\eta_0^2 \rho g \sin \alpha}{2\mu} \frac{y}{\eta_0} \left(2 - \frac{y}{\eta_0} \right), \quad (2.6a)$$

$$v_0(x,y) = 0, \quad (2.6b)$$

$$\eta_0(x) = \eta_0, \quad (2.6c)$$

$$p_0(x,y) = \eta_0 \rho g \cos \alpha \left(1 - \frac{y}{\eta_0} \right). \quad (2.6d)$$

2.3 Échelles caractéristiques et équations adimensionnées

La solution fait naturellement apparaître la hauteur d'eau comme longueur caractéristique η_0 et une vitesse caractéristique définie comme la vitesse débitante¹, c'est-à-dire la vitesse moyenne $\mathcal{U} = \frac{1}{3} \eta_0^2 \rho g \sin \alpha / \mu$. Les pressions seront adimensionnées via $\rho \mathcal{U}^2$.

En posant $u = \mathcal{U}u^*$, $v = \mathcal{U}v^*$, $x = \eta_0 x^*$, $y = \eta_0 y^*$, l'écriture des équations adimensionnées fait apparaître le nombre de Reynolds; on définit également le nombre de Froude:

$$\text{Re} = \frac{\rho \mathcal{U} \eta_0}{\mu}, \quad \text{Fr} = \frac{\mathcal{U}}{\sqrt{g \eta_0 \cos \alpha}}. \quad (2.7)$$

La solution de base (2.6) s'écrit alors

$$u_0^* = \frac{3}{2} y^* (2 - y^*), \quad v_0^* = 0, \quad \eta_0^* = 1, \quad p_0^* = \frac{1 - y^*}{\text{Fr}^2} \quad (2.8)$$

et impose une relation entre Fr, Re et la pente $S = \tan \alpha$, le problème ne possédant que deux paramètres indépendants:

$$3 \text{Fr}^2 = S \text{Re}. \quad (2.9)$$

Pour la suite, il sera utile d'exprimer \mathcal{U} et η_0 en fonction de Re et de α :

$$\mathcal{U} = \left(\frac{1}{3} g \nu \text{Re}^2 \sin \alpha \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.10)$$

$$\eta_0 = \left(\frac{3 \nu^2}{g} \frac{\text{Re}}{\sin \alpha} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.11)$$

Finalement, les équations et conditions aux limites adimensionnées s'écrivent (les étoiles en exposant de chaque variable sont supprimées afin d'accroître la lisibilité des équations):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{3}{\text{Re}}, \quad (2.12a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{3}{S \text{Re}}; \quad (2.12b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (2.13)$$

$$u = 0 \quad \text{en} \quad y = h(x), \quad (2.14a)$$

$$v = 0 \quad \text{en} \quad y = h(x); \quad (2.14b)$$

1. Si on considère un canal droit de largeur W . Le débit [m^3/s] est alors donné par $Q = \eta_0 W \mathcal{U}$, d'où le nom de vitesse débitante donné à \mathcal{U} .

$$v = \eta'(x) u \quad \text{en } y = \eta(x); \quad (2.15)$$

$$(1 - \eta'(x)^2) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \eta'(x) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{en } y = \eta(x), \quad (2.16a)$$

$$p - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \eta'(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{en } y = \eta(x). \quad (2.16b)$$

Sauf mention contraire, toutes les équations de ce chapitre seront désormais adimensionnées, sans que la notation étoilée ne soit explicitée.

2.4 Perturbation du fond et linéarisation

Considérons maintenant comme perturbation un fond sinusoïdal, d'amplitude infinitésimale ε et de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ fixée :

$$h(x,t) = \varepsilon h_1 e^{ikx} e^{-i\omega t}, \quad (2.17)$$

avec $h_1 = \eta_0$. Les solutions des équations sont alors perturbées au premier ordre en ε autour de la solution de base donnée en (2.8) :

$$\{u, v, p\}(x, y) = \{u_0, v_0, p_0\}(y) + \varepsilon \{u_1, v_1, p_1\}(y) e^{ikx} + \dots, \quad (2.18a)$$

$$\eta(x) = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 e^{ikx} + \dots. \quad (2.18b)$$

Les équations (2.12)–(2.16) s'écrivent finalement au premier ordre en ε :

$$iku_0(y)u_1(y) + u_0'(y)v_1(y) = -ikp_1(y) + \frac{1}{\text{Re}} (-k^2 u_1(y) + u_1''(y)), \quad (2.19a)$$

$$iku_0(y)v_1(y) = -p_1'(y) + \frac{1}{\text{Re}} (-k^2 v_1(y) + v_1''(y)), \quad (2.19b)$$

$$iku_1(y) + v_1'(y) = 0, \quad (2.19c)$$

$$u_1(0) + u_0'(0) = 0, \quad (2.19d)$$

$$v_1(0) = 0, \quad (2.19e)$$

$$v_1(1) - ik\eta_1 u_0(1) = 0, \quad (2.19f)$$

$$ikv_1(1) + u_1'(1) + \eta_1 u_0''(1) = 0, \quad (2.19g)$$

$$p_1(1) + \eta_1 p_0'(1) = \frac{1}{\text{Re}} (2v_1'(1) - ik\eta_1 u_0'(1)). \quad (2.19h)$$

2.5 Équation d'Orr-Sommerfeld stationnaire

On définit la fonction-courant ψ_1 , qu'on notera toutefois ψ afin d'alléger les écritures, vérifiant :

$$v_1(y) = -ik\psi(y), \quad (2.20a)$$

$$u_1(y) = \psi'(y). \quad (2.20b)$$

Ainsi, l'équation de conservation de la masse (2.19c) est automatiquement vérifiée. Les équations de Navier-Stokes (2.19a) et (2.19b) permettent d'obtenir l'équation d'Orr-Sommerfeld stationnaire en éliminant la pression par combinaison linéaire [21] :

$$\psi'''' - 2k^2\psi'' + k^4\psi = ik\text{Re} (u_0(\psi'' - k^2\psi) - u_0''\psi), \quad (2.21)$$

où le prime indique une dérivation par rapport à y . Le membre de gauche de l'équation contient les termes visqueux, tandis que le membre de droite provient des termes d'inertie.

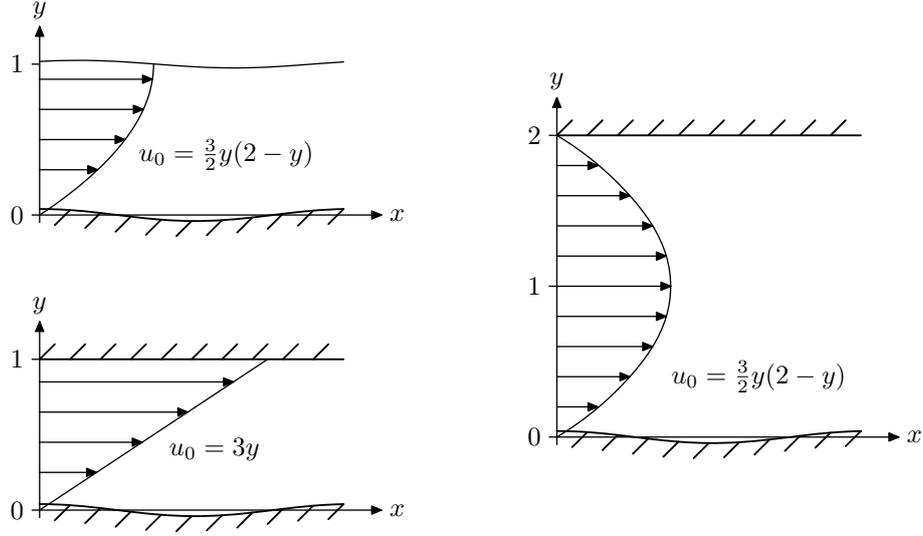


FIG. 2.1 – Géométrie des différents écoulements étudiés et leur profil de vitesse non perturbé. À gauche, écoulement Nußelt (en haut) et écoulement de Couette (en bas) ; à droite, écoulement de Poiseuille plan.

Les conditions aux limites (2.19d)–(2.19h) s'écrivent, en éliminant η_1 par combinaisons linéaires et en substituant $p_1(1)$ par l'expression donnée grâce à l'équation (2.19a) prise en $y = 1$:

$$\psi(0) = 0, \quad (2.22a)$$

$$\psi'(0) = -3, \quad (2.22b)$$

$$\psi''(1) = -(2 + k^2)\psi(1), \quad (2.22c)$$

$$\psi'''(1) = \left(3k^2 + \frac{3}{2}ik\text{Re}\right)\psi'(1) - \frac{2}{S}ik\psi(1). \quad (2.22d)$$

2.6 Comparaison avec d'autres écoulements de base

L'analyse précédente peut être également menée en considérant d'autres types d'écoulement, ce qui sera fait pour l'écoulement de Couette et l'écoulement de Poiseuille plan (voir figure 2.1). Pour certaines valeurs de k , Re , Fr , la perturbation au premier ordre présente des propriétés communes aux trois écoulements étudiés.

2.6.1 Perturbation de l'écoulement de Couette

L'écoulement de Couette est obtenu en déplaçant à vitesse constante une plaque parallèlement à une deuxième, le fluide étant entre ces deux plaques. L'écoulement de Couette est la solution des équations de Navier-Stokes (2.1) avec une pente nulle : $\alpha = 0$. Les conditions aux limites étant $u = v = 0$ en $y = 0$ et $(u, v) = (3, 0)$ en $y = 1$, la solution est exactement

$$u_0 = 3y, \quad v_0 = 0. \quad (2.23)$$

Le facteur 3 a été choisi pour que le profil de vitesse autour du fond soit identique à celui du cas Nußelt. Dans une démarche identique à celle des paragraphes précédents, on retrouve l'équation d'Orr-Sommerfeld (2.21), qui est ici amplement plus simple, puisque $u_0(y)$ est linéaire dans le cas d'un profil de Couette et que sa dérivée seconde s'annule. Le problème possède ainsi une solution qui s'exprime avec les fonctions spéciales d'Airy [7, 14, 19]. Les conditions aux limites sont également plus simples :

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = -3, \quad \psi(1) = 0, \quad \psi'(1) = 0. \quad (2.24)$$

2.6.2 Perturbation de l'écoulement de Poiseuille plan

Lorsqu'un fluide entre deux plaques parallèles fixes est soumis à une gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x} = -G$ constant, le profil de vitesse est celui d'un écoulement de Poiseuille plan. Les conditions de non-glissement aux parois s'écrivent $u = v = 0$ en $y = 0$ et $u = v = 0$ en $y = 2$. La solution s'écrit alors

$$u_0 = \frac{3}{2}y(2 - y), \quad v_0 = 0. \quad (2.25)$$

En considérant une perturbation sinusoïdale sur la plaque située en $y = 0$, on aboutit encore à l'équation d'Orr-Sommerfeld (2.21), avec les conditions aux limites suivantes :

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = -3, \quad \psi(2) = 0, \quad \psi'(2) = 0. \quad (2.26)$$

2.6.3 Comportements asymptotiques

Un traitement perturbatif permet de donner la perturbation de la contrainte de cisaillement au fond $\tau_1(y = 0) = \frac{1}{\text{Re}}(\frac{\partial u_1}{\partial y})_{y=0}$ lorsque $k \rightarrow 0$ (grandes longueurs d'onde). Le cas $k \gg 1$ est traité par développement asymptotique. Les grandes lignes du calcul sont présentées à l'annexe A.

Pour les très faibles longueurs d'onde, la perturbation est localisée près du fond par les effets visqueux. La longueur caractéristique de diffusion de la perturbation est de l'ordre de $1/k$ qui est faible par hypothèse (cf. annexe A). Dans cette couche limite d'épaisseur $1/k$, le profil de vitesse est localement linéaire $u_0(y) \approx 3y$ pour tous les types d'écoulement étudiés. On remarque en effet que les expressions analytiques aux ordres les plus bas de la solution pour $k \gg 1$ ne dépend pas du profil de vitesse u_0 . Ainsi, on trouve les mêmes valeurs de $\tau_1(0)/\tau_0(0)$ pour les trois types d'écoulement.

Le cas du régime non-visqueux $\text{Re} \rightarrow \infty$ fait l'objet d'une recherche actuelle pour les écoulement de Poiseuille et de Nußelt. Le régime non-visqueux de l'écoulement de Couette a déjà été résolu [7, 14, 19].

Écoulement de Couette

$$\frac{\tau_1(0)}{\tau_0(0)} = 4 + \frac{\text{Re}}{10} ik \quad (k \ll 1, \text{Re}^{-1}) \quad (2.27)$$

$$= 1,06 e^{i\pi/6} (3k\text{Re})^{1/3} \quad (\text{Re} \rightarrow \infty, \text{Re}^{-1} < k < \text{Re}^{1/2}) \quad (2.28)$$

$$= 2k + \frac{3i \text{Re}}{2k} \quad (k \gg 1, \text{Re}^{1/2}) \quad (2.29)$$

Écoulement de Poiseuille

$$\frac{\tau_1(0)}{\tau_0(0)} = 2 + \frac{2 \text{Re}}{35} ik \quad (k \ll 1, \text{Re}^{-1}) \quad (2.30)$$

$$= ? \quad (\text{Re} \rightarrow \infty, \text{Re}^{-1} < k < \text{Re}^{1/2}) \quad (2.31)$$

$$= 2k + \frac{3i \text{Re}}{2k} \quad (k \gg 1, \text{Re}^{1/2}) \quad (2.32)$$

Écoulement de Nußelt (surface libre)

$$\frac{\tau_1(0)}{\tau_0(0)} = 1 - \frac{2}{3S} ik \quad (k \ll 1, S, \text{Re}^{-1}) \quad (2.33)$$

$$= ? \quad (\text{Re} \rightarrow \infty, \text{Re}^{-1} < k < \text{Re}^{1/2}) \quad (2.34)$$

$$= 2k + \frac{3i \text{Re}}{2k} \quad (k \gg 1, \text{Re}^{1/2}) \quad (2.35)$$

2.6.4 Résolution numérique et comparaison

Dans les trois cas, il s'agit de résoudre l'équation d'Orr-Sommerfeld stationnaire (2.21) associée aux conditions aux limites (2.22) pour le cas Nußelt, (2.24) pour le cas Couette et (2.26) pour le cas Poiseuille.

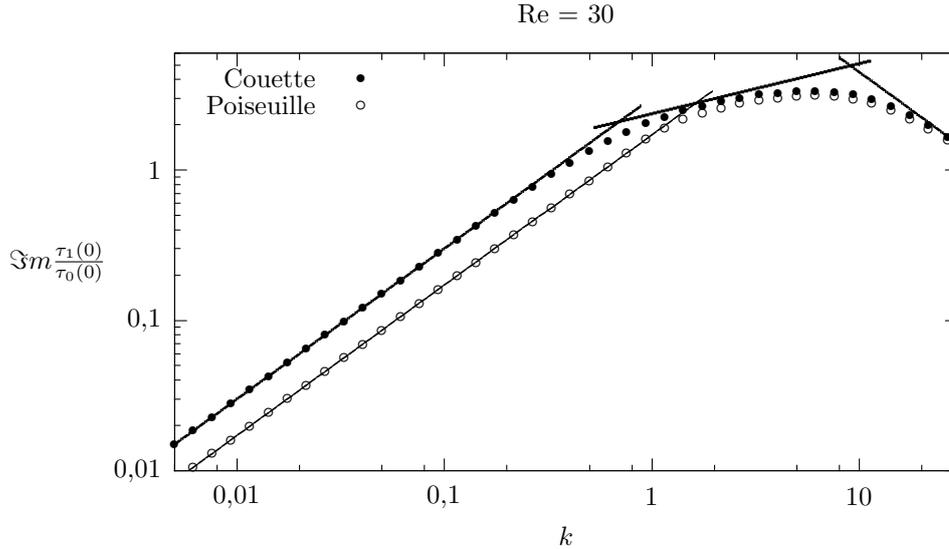


FIG. 2.2 – Comparaison entre les régimes asymptotiques et la perturbation de la contrainte de cisaillement au fond pour les écoulements de Couette et de Poiseuille.

Le problème étant un problème avec conditions aux limites (en $y = 0$ et $y = 1$, par opposition aux problèmes avec conditions initiales où les conditions sont données en un unique point), la résolution numérique s'effectue par une méthode du tir. L'équation différentielle qui nous intéresse étant linéaire, la méthode se réduit à la recherche d'une base des solutions, puis à la détermination des coefficients du vecteur-solution dans cette base, par inversion d'un système linéaire. L'implémentation par la fonction `NDSolve` du logiciel *Mathematica*® a été utilisée.

Dans certains cas, par exemple pour $k \gg 1$, les fonctions de la base des solutions varient très « rapidement » autour d'une des extrémités du domaine, de telle sorte que la méthode se révèle peu robuste. En effet, dans une telle situation, le système linéaire à inverser est mal conditionné : une petite variation des coefficients entraîne une grande variation de la solution associée. Le choix du point de tir (via l'option `StartingInitialConditions`) peut améliorer la situation. Autrement, la solution ne peut être obtenue qu'en augmentant la précision arithmétique des nombres manipulés (par l'option `WorkingPrecision`), au grand détriment de la rapidité des calculs.

Les courbes de $(\tau_1/\tau_0)(y = 0)$ en fonction de k , issues des calculs numériques, ont été tracées figures 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6. Ce paramètre sera crucial pour expliquer l'instabilité du fond qui sera décrite dans le chapitre qui suit.

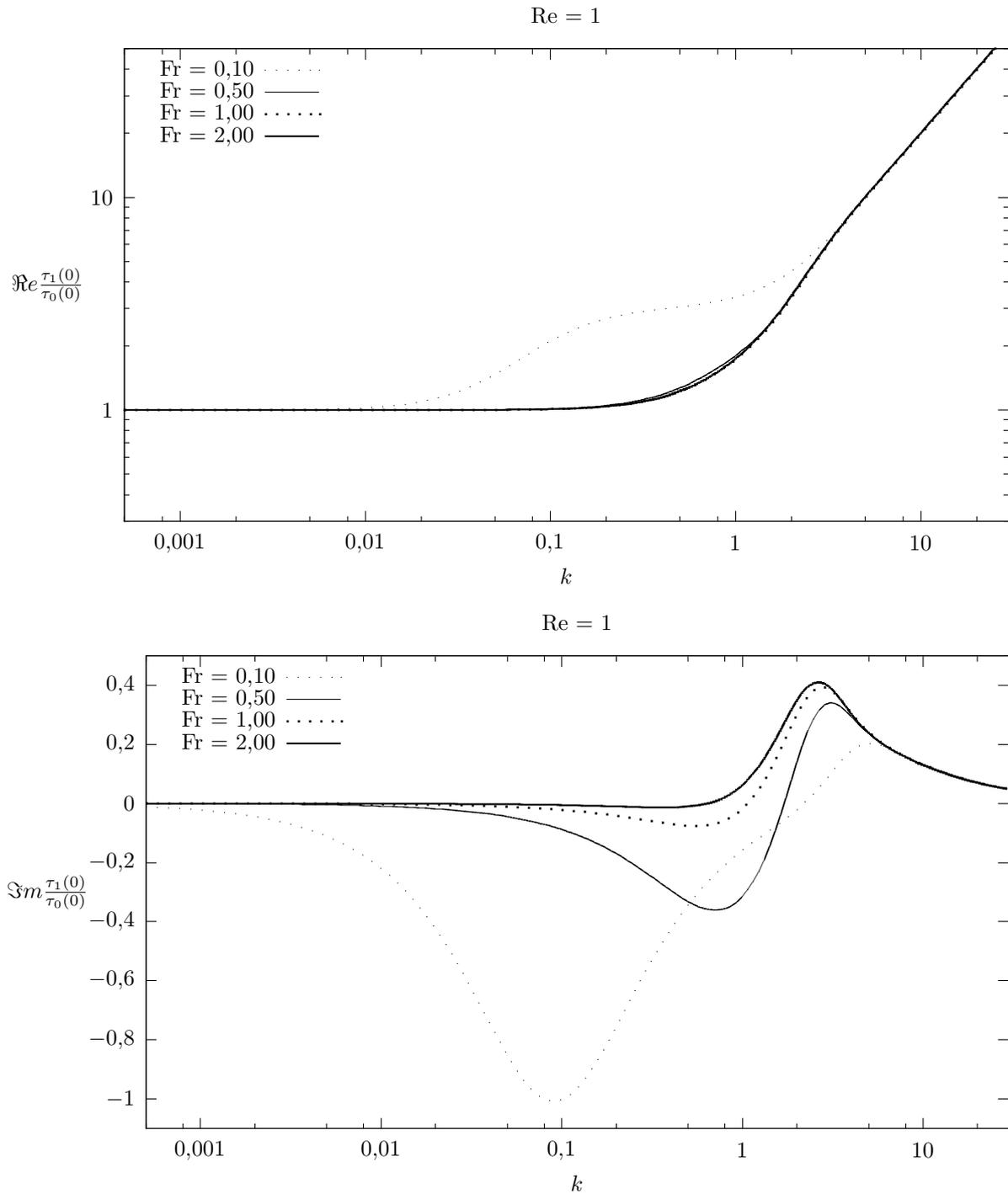


FIG. 2.3 – Parties réelles (en haut) et parties imaginaires (en bas) de la perturbation du cisaillement au fond renormalisée, pour $Re = 1$ et différentes valeurs de Fr .

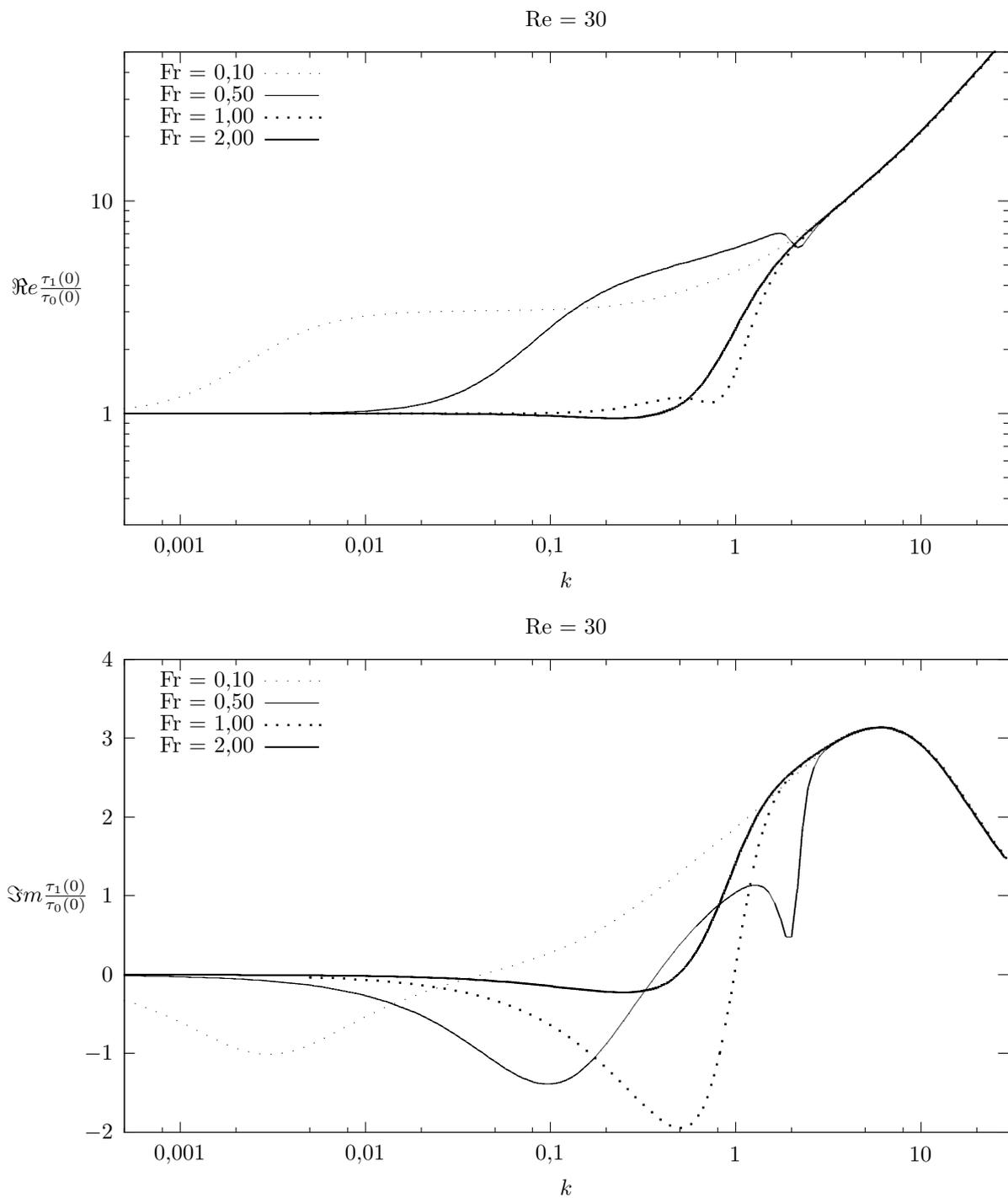


FIG. 2.4 – Parties réelles (en haut) et parties imaginaires (en bas) de la perturbation du cisaillement au fond renormalisée, pour $Re = 30$ et différentes valeurs de Fr .

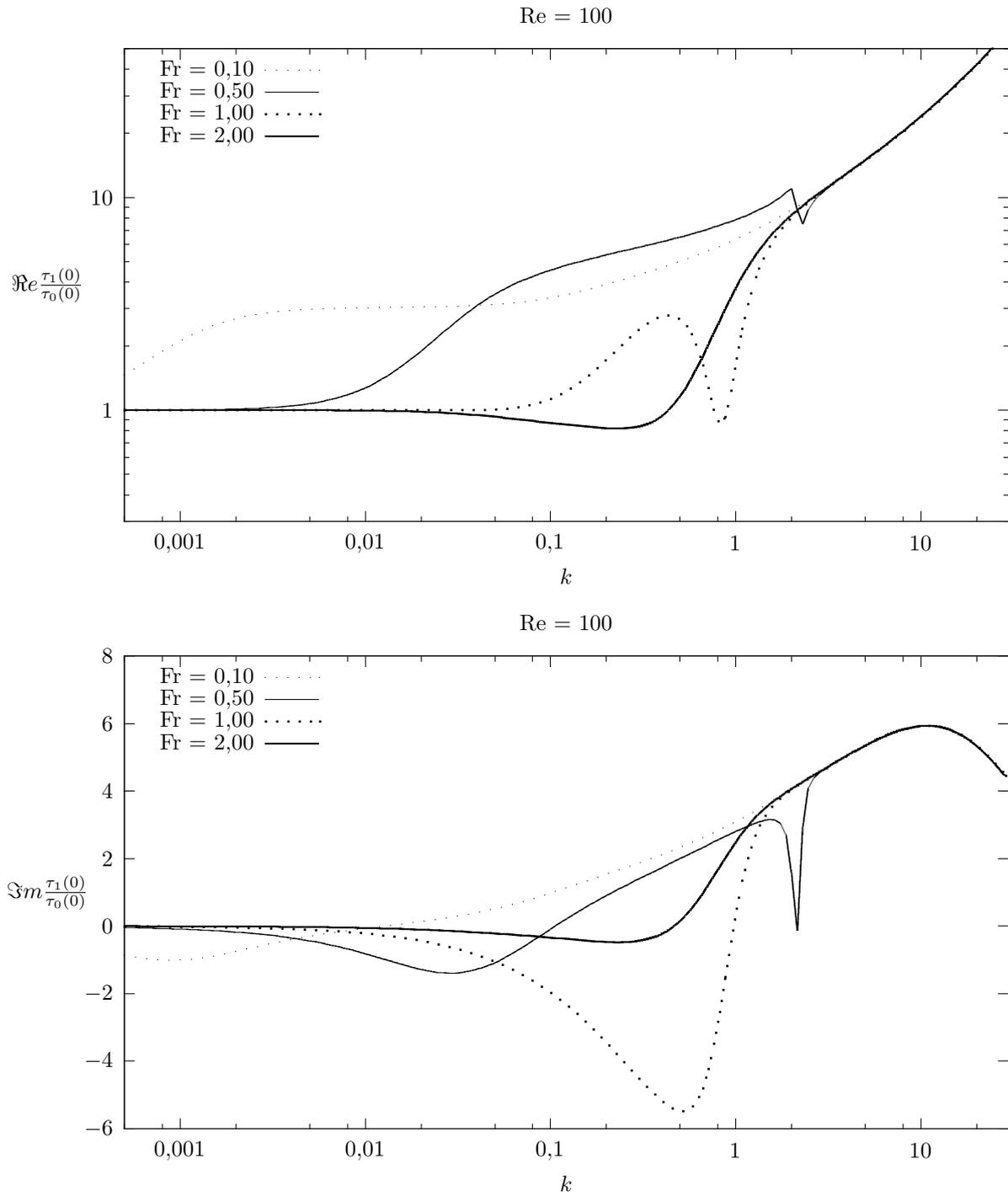


FIG. 2.5 – Parties réelles (en haut) et parties imaginaires (en bas) de la perturbation du cisaillement au fond renormalisée, pour $Re = 100$ et différentes valeurs de Fr .

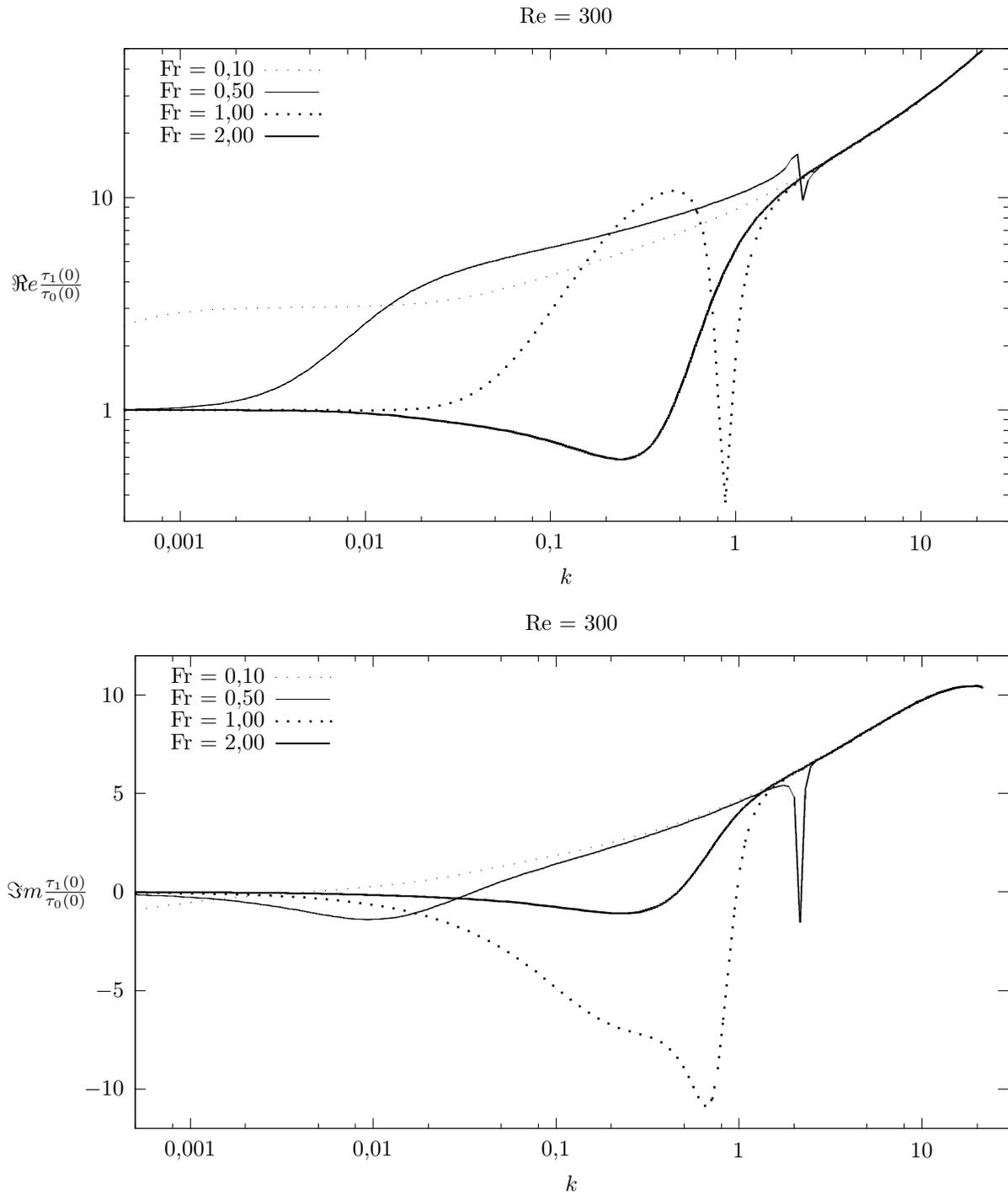


FIG. 2.6 – Parties réelles (en haut) et parties imaginaires (en bas) de la perturbation du cisaillement au fond renormalisée, pour $Re = 300$ et différentes valeurs de Fr .

Chapitre 3

Stabilité linéaire du fond

L'écoulement au-dessus d'un fond considéré comme fixe a été étudié au chapitre précédent. Bien entendu, le fond n'est pas fixe — nous en étudions la dynamique. Toutefois, le temps caractéristique d'érosion \mathcal{T}_e est suffisamment élevé devant le temps caractéristique de l'écoulement $\mathcal{T} = \eta_0/\mathcal{U}$ (cf. paragraphe 2.3) pour que l'hypothèse de stationnarité reste valable.

On suppose ici que le fond est un milieu granulaire homogène et non cohésif, dont les grains ont une taille d_s et une masse volumique ρ_s . Naturellement, l'écoulement de l'eau au-dessus de ce fond exerce une contrainte, causant le phénomène d'érosion et modifiant la topographie du fond, à condition que cette contrainte soit suffisamment élevée.

Attention, contrairement à la dernière partie du chapitre précédent, les variables adimensionnées par les échelles de l'écoulement (définies au paragraphe 2.3) seront explicitement marquées par une étoile en exposant, l'absence d'étoile signifiant que la variable concernée est une grandeur dimensionnée.

3.1 Érosion par charriage

Bien qu'il puisse exister une phase granulaire en suspension dans l'eau (par diffusion), seul le transport par charriage (*bed load*) sera considéré. Ce mode de transport est caractérisé par le contact pratiquement permanent entre les grains transportés et le fond ; le fond est ainsi surmonté d'une mince couche de grains en déplacement.

3.1.1 Nombre de Shields

Le milieu granulaire étant supposé non-cohésif, les forces exercées sur le grain se résument : au poids apparent dont l'intensité vaut $(\rho_s - \rho)gd_s^3$ en ordre de grandeur ; à la force exercée par l'écoulement qui vaut en ordre de grandeur τd_s^2 , où $\tau = \mu(\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0}$ est le cisaillement exercé par le fluide au fond ; aux forces de réactions des grains voisins en contact avec le grain considéré.

L'arrachage d'un grain au fond est contrôlée par la compétition entre la force de cisaillement du fluide qui tend à mettre en mouvement le grain, et le poids apparent qui tend à le laisser au repos. Il est alors naturel de définir le nombre de Shields, noté θ et donné par

$$\theta = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd_s}. \quad (3.1)$$

3.1.2 Loi de transport en régime permanent

L'érosion peut être caractérisée par le débit linéique de sédiments $q(x)$ (nombre de grains traversant la surface en x orthogonale à l'écoulement pour chaque unité de longueur selon z et par unité de temps, [$\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$]). Bien que q puisse, par analyse dimensionnelle, dépendre d'autres paramètres que le nombre de Shields, les modèles les plus courants dans la littérature proposent une loi d'érosion pour un fond plat (*i.e.* $h(x) = 0$) sous la forme

$$q = \frac{V_s}{d_s^2} \phi(\theta), \quad (3.2)$$

où ϕ est une fonction et V_s est la vitesse de sédimentation du grain, donnée en régime laminaire par la formule de Stokes :

$$V_s = \frac{(\rho_s - \rho)gd_s^2}{18\mu}. \quad (3.3)$$

De manière générale, $\phi(\theta)$ est une fonction croissante de θ : les grains sont d'autant plus facilement arrachés que le cisaillement du fluide est élevé. Il n'y a cependant pas de consensus quant à la forme de $\phi(\theta)$. Certains auteurs proposent

$$\phi(\theta) \propto \theta^a \varpi(\theta - \theta_s)^b,$$

où $\varpi(x) = x$ si $x > 0$ et $\varpi(x) = 0$ sinon, θ_s étant une valeur seuil du nombre de Shields. Ouriemi *et al.* [18] trouvent expérimentalement $\theta_s = 0,12$ pour un écoulement en régime laminaire, en accord avec [7] et [16]. Concernant les exposants, Charru et Mouilleron-Arnould [6] proposent $a = 0$ et $b = 3$; Charru, Mouilleron-Arnould et Eiff [7] obtiennent expérimentalement $a = 1$ et $b = 1$.

Effets de la pente sur la loi d'érosion

La loi d'érosion en $\phi(\theta)$ est valable pour un fond parfaitement horizontal, ne prenant pas en compte des effets de la gravité. Dans le cas d'un fond de topographie $h(x)$, il convient d'utiliser la loi

$$q = \frac{V_s}{d_s^2} \phi(\theta) \left(1 - \gamma \left(S + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right), \quad (3.4)$$

où γ dépend *a priori* de θ . Le terme supplémentaire en $-\gamma$ exprime simplement le fait qu'il est plus difficile d'arracher un grain en surface quand la pente est montante. Ce terme dû à la gravité est essentiel pour assurer la stabilité du fond aux petites longueurs d'onde, comme nous le verrons plus loin.

D'après Fredsøe et Deigaard [13, p. 205], le nombre de Shields seuil est modifié en présence d'une petite pente $\frac{\partial h}{\partial x}$, et s'exprime sous la forme

$$\theta_s = \theta_{so} \left(1 + \frac{1}{\tan \alpha_s} \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

où α_s est l'angle de frottement statique maximal valant typiquement 32° (Bagnold, 1973), et θ_{so} est le nombre de Shields seuil sur fond plat. Par identification du premier ordre en $\frac{\partial h}{\partial x}$, on trouve

$$\gamma = \frac{\theta_{so}}{\tan \alpha_s} \frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}. \quad (3.5)$$

Pour $\theta_{so} = 0,12$ et $\alpha_s = 32^\circ$, le préfacteur $\theta_{so}/\tan \alpha_s$ vaut 0,2.

Dans la suite, nous utiliserons la loi proposée par [7] :

$$\phi(\theta) = 0,85 \theta \varpi(\theta - \theta_s), \quad (3.6)$$

ou bien un ajustement de cette loi par une fonction puissance qui ne fait pas apparaître de seuil :

$$\phi(\theta) = 5,13 \theta^{3,75}. \quad (3.7)$$

3.1.3 Dynamique de l'érosion

On peut dès lors exprimer la relation qui couple le fluide et le milieu granulaire.

Considérons un élément de volume de hauteur la hauteur d'eau (cela n'a pas d'importance puisque le transport de sédiment ne s'effectue qu'à proximité du fond), de largeur dx et de profondeur W . Notons $\chi_s d_s^3$ le volume moyen occupé par un seul grain lorsqu'il se trouve dans la couche sédimentaire (χ_s vaut donc $\frac{4}{3}\pi/8C$ où C est la compacité du milieu granulaire).

Entre l'instant t et $t + dt$, il entre par la surface en x un volume $\chi_s d_s^3 q(x) W dt$ de sédiment, tandis qu'il sort par la surface en $x + dx$ un volume $\chi_s d_s^3 q(x + dx) W dt$; le milieu granulaire a augmenté d'un volume $\delta h W dx$. On en déduit la relation de conservation de la masse du sédiment :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\chi_s d_s^3 \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Exprimons à présent les conditions pour que l'hypothèse de stationnarité de l'écoulement soit valable. Le temps caractéristique de l'écoulement vaut $\mathcal{T} = \eta_0/\mathcal{U}$. L'équation de conservation de la masse du sédiment (3.8) permet l'estimation de l'ordre de grandeur du temps caractéristique d'érosion : $\eta_0/\mathcal{T}_e \approx \chi_s d_s V_s k \phi(\theta)$. On en déduit

$$\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_e} \approx \chi_s k d_s \frac{V_s}{\mathcal{U}} \phi(\theta) \approx \chi_s \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{k d_s^3}{\eta_0^2} \frac{\phi(\theta)}{\sin \alpha}.$$

Étant donné que $\chi_s(\rho_s - \rho)/\rho$ est de l'ordre de l'unité, l'approximation se résume à

$$k d_s \left(\frac{d_s}{\eta_0} \right)^2 \frac{\phi(\theta)}{\sin \alpha} \ll 1. \quad (3.9)$$

Pour des pentes de l'ordre de 0,01 et des nombres de Reynolds de l'ordre de 100, l'approximation impose $\lambda \gg d_s/100$. Cette condition est automatiquement vérifiée si on considère l'hypothèse de continuité du milieu granulaire constituant le fond érodable ($\lambda \gg d_s$, $\eta_0 \gg d_s$).

3.2 Relation de dispersion

Puisqu'on étudie la stabilité linéaire du fond, rappelons que sa topographie peut s'écrire sous la forme d'un mode de Fourier :

$$h(x,t) = \varepsilon h_1 e^{ikx} e^{-i(\omega+i\sigma)t},$$

avec $h_1 = \eta_0$ et ω , σ des réels. Au premier ordre en ε , on a également $\phi(\theta) = \phi(\theta_0) + \varepsilon \theta_1 \phi'(\theta_0) e^{ikx}$. La relation de conservation de la masse de sédiment (3.8) écrite conjointement avec la loi d'érosion (3.4) donne, au premier ordre, la relation de dispersion

$$-i(\omega + i\sigma) = -\chi_s d_s V_s \left(ik \frac{\theta_1}{h_1} \phi'(\theta_0) + \gamma \phi(\theta_0) k^2 \right). \quad (3.10)$$

On obtient finalement, à l'aide de la définition de V_s (3.3), en notant $\Re e(z)$ et $\Im m(z)$ les parties réelles et imaginaires de z et en posant $K = \chi_s d_s^2 / 18\mu$,

$$c = \frac{\omega}{k} = K \phi'(\theta_0) \Re e\left(\frac{\tau_1}{h_1}\right), \quad (3.11)$$

$$\sigma = K \phi'(\theta_0) k \left(\Im m\left(\frac{\tau_1}{h_1}\right) - \gamma \frac{\phi(\theta_0)}{\phi'(\theta_0)} (\rho_s - \rho) g d_s k \right). \quad (3.12)$$

En utilisant l'expression (3.5), le taux de croissance s'écrit

$$\sigma = K \phi'(\theta_0) k \left(\Im m\left(\frac{\tau_1}{h_1}\right) - \frac{\theta_{so}}{\tan \alpha_s} (\rho_s - \rho) g d_s k \right). \quad (3.13)$$

Le taux de croissance σ indique par son signe si les rides de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ sont stables (cas $\sigma < 0$, l'amplitude h des rides diminue exponentiellement) ou instables (cas $\sigma > 0$, l'amplitude h des rides augmente exponentiellement).

D'après l'expression du taux de croissance (3.13), ce dernier ne dépend de la loi d'érosion que par le facteur $\phi'(\theta_0)$ qui reste positif dans tous les modèles d'érosion. L'apparition d'instabilité n'est donc pas sujette aux choix de la fonction ϕ .

La vitesse c des rides est due à la composante du cisaillement qui est en phase avec la perturbation (partie réelle). De même, la relation (3.13) montre que l'instabilité apparaît à cause du déphasage (partie imaginaire) du cisaillement τ_1 par rapport à la perturbation h_1 . En effet, lorsque la contrainte de cisaillement est en avance par rapport à la perturbation, le sédiment s'amasse depuis les creux vers les crêtes du lit.

Le terme en $-\gamma$ dans l'expression de σ dû à la gravité assure la stabilité pour k suffisamment grand, c'est-à-dire pour les petites longueurs d'onde.

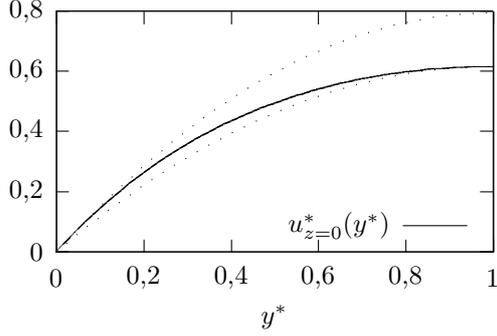


FIG. 3.1 – Profil de vitesse en $z = 0$ (trait plein) pour le cas où le rapport d’aspect (hauteur d’écoulement sur largeur du canal) vaut 0,68. En pointillés ont été représentés les deux paraboles qui enveloppent le profil de vitesse ; elles ont pour équation $0,53 u_0^*(y^*)$ et $0,41 u_0^*(y^*)$, avec $u_0^*(y^*) = \frac{3}{2}y^*(2 - y^*)$ le profil de vitesse correspondant au cas d’une largeur de canal infinie.



FIG. 3.2 – Ondes de sable observées par Coleman et Eling (d’après [8]). L’écoulement s’effectue de gauche à droite. Le canal mesure 10 cm de largeur.

3.3 Résultats et interprétations

Outre la vérification des résultats de l’article [6], le modèle est comparé avec deux ensembles de données expérimentales.

3.3.1 Données expérimentales de Coleman et Eling

Coleman et Eling [8] observent l’apparition d’« ondelettes de sable » sur un lit de sable initialement plat, érodé par un écoulement d’huile dans un canal droit de en régime laminaire. Ces ondelettes apparaissent lors de 7 mesures parmi les 11 présentées. Les mesures sont classées en trois séries. Le sable utilisé dans la première série a pour diamètre moyen 0,30 mm, 0,39 mm dans la deuxième et 0,61 mm dans la troisième. Les mesures du profil de vitesse de l’huile au milieu du canal sont données par la vitesse moyennée sur la hauteur, ainsi que la vitesse de cisaillement au fond.

La hauteur des écoulements décrits est comprise entre 3,8 cm et 6,8 m ; elle n’est pas négligeable devant la largeur de 10 cm du canal. Il n’y a plus lieu de considérer l’invariance de l’écoulement par translation selon l’axe des z perpendiculaire à l’écoulement. Le profil de vitesse de la ligne centrale ($z = 0$) de l’écoulement reste toutefois semblable à un profil de Nußelt. Le code d’éléments finis **FreeFem++**¹ a permis d’obtenir numériquement le profil de vitesse central. Le cas le plus défavorable des 11 mesures est représenté sur la figure 3.1, pour lequel le rapport d’enveloppe 0,53/0,41 vaut 1,29. Dans le cas le plus favorable où le rapport d’aspect vaut 0,38, le rapport d’enveloppe s’élève à 1,07.

Nous avons choisi d’utiliser les valeurs de la hauteur de l’écoulement et de la vitesse moyenne mesurées par les auteurs comme paramètres du problème. Les vitesses de cisaillement au fond $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$ mesurées ne correspondent pas aux profils de vitesse paraboliques obtenus en considérant que l’écoulement est laminaire. L’écoulement est en réalité turbulent. En toute rigueur, notre analyse de stabilité du fond ne peut donc pas s’appliquer telle quelle.

Les résultats sont données à la table 3.1. Bien qu’il ne soit pas possible de conclure au vu de la faible quantité de données disponibles, on pourra noter que les ordres de grandeurs sont les bons. En effet, les rapports $\lambda_{exp}/\lambda_{th}$ sont compris entre 1,1 et 2,7 pour une valeur moyenne de 1,9. De plus, pour chaque mesure, la longueur d’onde des rides augmente au cours du temps à cause de l’effets de la non-linéarité qui n’a pas été prise en compte dans notre étude. On remarque ainsi que, dans l’ensemble, le rapport $\lambda_{exp}/\lambda_{th}$ est plus élevé quand le taux de croissance est grand.

Concernant les taux de croissance, les résultats sont mitigés. Pour la série 3, les faibles valeurs du taux de croissance pourraient expliquer l’absence d’observation des ondelettes. La théorie ne concorde pas avec les résultats des séries 1 et 2. Gardons toutefois à l’esprit que le taux de croissance est proportionnel à $\phi'(\theta)$ qui est encore moins bien connue que la loi $\phi(\theta)$ dont elle dérive.

1. **FreeFem++** est un logiciel libre développé par le laboratoire Jacques-Louis Lions de l’université Paris 6, disponible sur <http://www.freefem.org/ff++/>.

Run	Re	Fr	λ_{exp} (cm)	λ_{th} (cm)	$\lambda_{exp}/\lambda_{th}$	σ_{th} (10^{-3} s^{-1})	t (min)
1-275	154	0,398	5,2	4,9	1,1	0,3	56
1-300	116	0,451	4,5	3,3	1,4	1,6	10
1-500	267	0,480	7,5	4,4	1,7	0,5	35
1-550	397	0,621	9,3	3,4	2,7	1,8	9
2-300	116	0,451	–	4,3	–	0,9	19
2-400	171	0,515	9,2	4,0	2,3	1,2	14
2-500	267	0,480	10,1	5,9	1,7	0,3	67
2-600	441	0,635	10,5	4,1	2,6	0,9	18
3-500	267	0,480	–	10,4	–	0,1	206
3-550	397	0,621	–	7,1	–	0,3	51
3-600	441	0,635	–	7,2	–	0,3	56

TAB. 3.1 – Comparaison entre la longueur d’onde λ_{exp} des premières ondelettes observées par Coleman et Eling (un tiret dénote la stabilité du fond, c’est-à-dire l’absence observée d’ondelettes) et la longueur d’onde λ_{th} correspondant au taux de croissance maximal σ_{th} . Le temps caractéristique de croissance est également donné dans la dernière colonne par $t = 1/\sigma_{th}$. Le modèle a été utilisé avec $\theta_s/\tan \alpha_s = 0,2$ et $\phi(\theta)$ donné par l’équation (3.7).

3.3.2 Résultats expérimentaux de Lajeunesse et Malverti

Dans l’expérience de Lajeunesse et Malverti, de l’eau ($\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ et $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$) s’écoule dans un canal droit de largeur 5 cm. Le fond érodable est constitué de billes de verre ($\rho_s = 2500 \text{ kg m}^{-3}$) de diamètre compris entre 0,050 mm et 0,100 mm. Nous choisissons ainsi $d_s = 0,075$ mm. La pente est réglée entre 0,008 et 0,05 et le débit, de l’ordre de 1 l/min, donne des nombre de Reynolds compris entre 60 et 1000. Dans ces conditions, la hauteur d’eau donnée par (2.11) est de l’ordre du millimètre. Les effets de bords dus à la présence des parois latérales peuvent donc être négligés. En revanche, bien que les effets de la tension de surface puissent intervenir, nous n’en tiendrons pas compte.

Plusieurs essais ont permis l’observation de motifs d’instabilité du fond. Outre les rides qui font l’objet de notre analyse, des motifs 2D en forme de chevrons apparaissent (voir figure 3.3). La figure 3.4 montre les données expérimentales (cercles, disques et carrés).

La courbe de stabilité (trait plein de la figure 3.4) a été tracée en considérant que les rides ne sont observables que lorsque le taux de croissance est suffisamment grand, c’est-à-dire lorsqu’il existe un nombre d’onde k tel que $\sigma(k) > \sigma_{obs}$, avec $\sigma_{obs} = 0,002 \text{ s}^{-1}$ correspondant à un temps $t_{obs} \simeq 8,3$ min. La courbe tracée correspond à la loi d’érosion (3.7) et $\theta_s/\tan \alpha_s = 0,2$. En pointillés léger est représentée la même courbe de stabilité tracée pour $\theta_s/\tan \alpha_s = 0,66$. En-dessous de la courbe de stabilité, le modèle prédit qu’aucune instabilité ne peut apparaître à partir d’un fond initialement plat. Au-dessus de la courbe, des instabilités *peuvent* être observées.

La figure 3.4 donne également en pointillés gras le nombre de Reynolds de mise en mouvement Re_s en fonction de la pente S : si on suppose l’existence d’un seuil θ_s de la contrainte du fond adimensionnée, alors il y a un nombre de Reynolds seuil Re_s en-deça duquel les grains ne sont pas mis en mouvement, tous les autres paramètres étant fixés. La relation entre Re_s et θ_s s’écrit, à l’aide de l’équation (2.6),

$$3 Re_s \sin^2 \alpha = \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)^3 \frac{g d_s^3}{\nu^2} \theta_s^3. \quad (3.14)$$

Pour les paramètres de l’expérience, on trouve $Re_s = 0,008 S^{-2}$.

L’allure de la courbe de stabilité décrit correctement les résultats expérimentaux. Le courbe de stabilité correspondant au cas $\theta_s/\tan \alpha_s = 0,66$ décrit les données expérimentales de manière très satisfaisante.

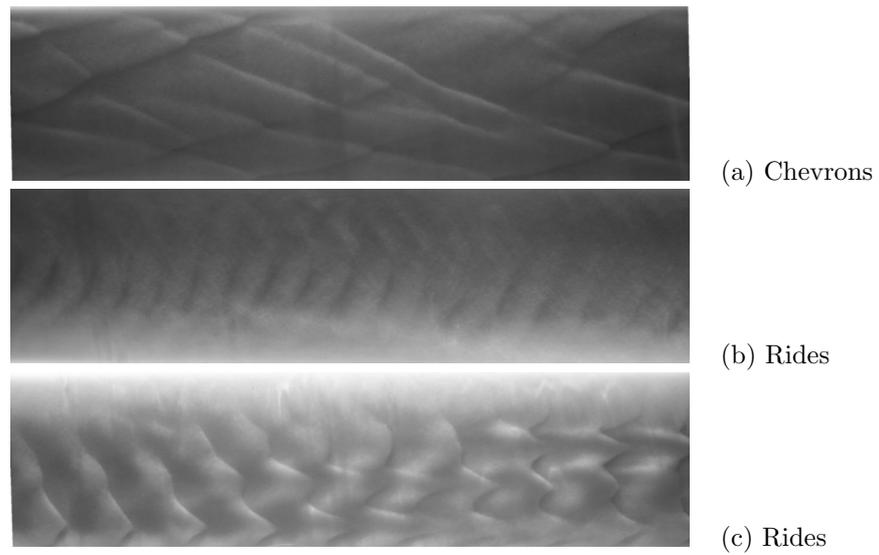


FIG. 3.3 – Vue d’aplomb des motifs d’instabilité observés dans l’expérience de Lajeunesse et Malverti. La faible hauteur des motifs a imposé l’utilisation d’une lumière rasante afin d’augmenter leur contraste. Les zones photographiées ont pour dimensions approximatives $5 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$.

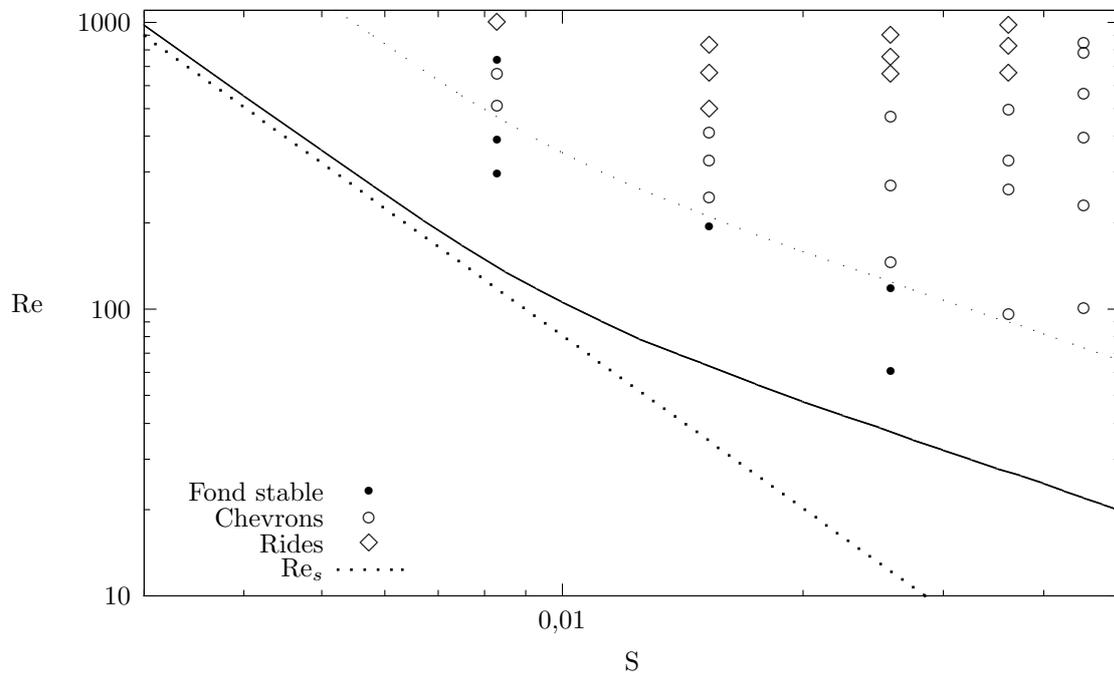


FIG. 3.4 – Résultats expérimentaux et courbe de stabilité théorique. La courbe $\sigma_{max} = 0,002 \text{ s}^{-1}$ est tracée pour $\theta_s/\tan \alpha_s = 0,2$ (trait plein) et pour $\theta_s/\tan \alpha_s = 0,66$ (pointillés léger).

Chapitre 4

Discussion et conclusion

Les résultats de la théorie de stabilité présentée sont en premier lieu sujets aux problèmes qui sont inhérents à la linéarisation des équations. Les équations ne sont valables que pour des perturbations restant petites. Si une perturbation de longueur d'onde donnée est prédite comme étant instable, la croissance exponentielle de son amplitude aboutit à l'invalidation des équations linéarisés. Notamment, les expériences montrent l'augmentation puis la stabilisation de la longueur d'onde des rides (jusqu'au double environ de la longueur d'onde de la perturbation initialement observée), ainsi que la stabilisation de leur amplitude [1, 2, 3]. La dynamique des rides, en particulier leur changement de géométrie, est également complexe [1]. Les théories de stabilité linéaire ne permettent pas d'expliquer ces observations.

Les difficultés rencontrées quant à la validation des modèles de stabilité sont également d'ordre expérimentales. Tout d'abord, la modélisation du sable par un milieu continu donne la possibilité de définir une topographie continue et dont l'amplitude peut même être inférieure à la taille d'un grain. Il est difficile de mesurer voire de définir cette topographie expérimentalement. Ensuite, au moins trois échelles de temps entrent en jeu dans les expériences, à savoir le temps caractéristique de l'établissement de la stationnarité de l'écoulement fluide, le temps caractéristique donné par le taux de croissance des perturbations, et le temps associé à l'évolution des rides développées — la différence de vitesse des rides peut entraîner la fusion d'une ride rattrapée par une ride plus rapide. Comme noté par [4], il est préférable pour le découplage des phénomènes, que le temps de stationnarité hydrodynamique soit expérimentalement négligeable devant le temps de croissance des rides et que ce temps de croissance soit lui-même négligeable devant le temps d'évolution.

Les lois d'érosion sont elles-mêmes mal connues comme en témoigne la disparité quantitative des différentes lois proposées. Il est possible que cette disparité soit due à la sensibilité des lois d'érosion face aux conditions de préparation du fond granulaire [18].

De plus, contrairement au modèle simple proposé, il est possible de modéliser plus finement l'érosion à l'échelle du grain, avec par exemple un mécanisme de d'érosion-déposition des grains au sommet des perturbations qui accroît la stabilité des faibles longueurs d'onde [4, 5], ou encore la prise en compte de la stabilisation par l'inertie des grains [19].

La prise en compte de la couche de charriage des grains près du fond [10] permet d'introduire un terme apportant un déphasage supplémentaire à la perturbation de contrainte de cisaillement au fond, en régime turbulent tout du moins. Nous avons vu que ce déphasage est la clé du mécanisme d'instabilité. Cependant, il a été montré que cette couche de charriage ne modifie que très faiblement la partie réelle de la perturbation de la contrainte au fond, c'est-à-dire la vitesse de déplacement des rides. Par ailleurs, la modélisation de la turbulence [10] permet de prédire l'existence d'antidunes, c'est-à-dire de dunes qui remontent le courant. Dans notre modèle, il semblerait que la partie réelle de perturbation de la contrainte au fond soit toujours positive, et que, dans ce cas, la vitesse de déplacement des perturbations serait toujours positive. Il semblerait donc que la formation d'antidunes nécessite un régime turbulent ou bien un régime de fluide parfait.

Le mécanisme d'instabilité du fond réside dans la compétition entre l'instabilité créée par l'écoulement et les effets stabilisants, ici la gravité. L'instabilité est essentiellement représentée par le déphasage entre la perturbation de la contrainte de cisaillement au fond et le fond lui-même. Les mécanismes stabilisants réduisent ce déphasage. Toutefois, au vu des difficultés expérimentales et de la faible quantité de données disponibles, il semble actuellement impossible de déterminer lesquels des mécanismes stabilisants décrits

dans la littérature sont les plus importants. Dans notre modèle, la présence du seul effet stabilisant de la gravité permet de prédire de manière très satisfaisante les résultats expérimentaux.

L'instabilité apparaît pour des vecteurs d'ondes de l'ordre de grandeur de l'unité. Ce régime des vecteurs d'ondes finis et des grands nombres de Reynolds (en pratique, $Re = 30$ peut déjà être considéré comme grand [6]) fait l'objet du travail de recherche actuel. La difficulté réside essentiellement dans le couplage fort entre la surface, dans les conditions aux limites qui font intervenir le nombre de Froude, et les effets visqueux du fond. Ce couplage se traduit notamment par la présence d'une résonance (voir figure ?? pour le cas $Fr = 0,5$, autour de $k = 2$). Ce couplage est, peut-être, le signe qu'il est nécessaire de considérer les termes temporels dans la résolution de l'écoulement. Dans le cas d'un modèle d'écoulement potentiel, [9] montre que la prise en compte des dérivées temporelles dans les équations de l'écoulement introduit une résonance entre les ondes formées par les perturbations et les ondes de surface.

Enfin, l'introduction de la deuxième dimension du fond permettrait de construire un modèle unifiant la prédiction des rides et des motifs d'instabilités bidimensionnels tels que les bancs alternés et les chevrons étudiés par Devauchelle [12]. L'analyse a déjà été effectuée dans le cas de l'écoulement de Couette [15], plus simple à traiter analytiquement.

Annexe A

Développements asymptotiques dans le cas de la surface libre

Il s'agit de trouver les solutions $\psi(y)$ de l'équation d'Orr-Sommerfeld stationnaire et ses conditions aux limites dans le cas de la surface libre :

$$\begin{aligned}\psi'''' - 2k^2\psi'' + k^4\psi &= ik\text{Re}(u_0(\psi'' - k^2\psi) - u_0''\psi), \\ \psi(0) &= 0, \quad \psi'(0) = -3, \\ \psi''(1) &= -(2 + k^2)\psi(1), \quad \psi'''(1) = \left(3k^2 + \frac{3}{2}ik\text{Re}\right)\psi'(1) - \frac{2}{S}ik\psi(1),\end{aligned}$$

où $u_0 = \frac{3}{2}y(2 - y)$, et d'en déduire la perturbation de la contrainte de cisaillement au fond, donnée par $\tau_1(0) = \psi''(0)/\text{Re}$.

La référence [11] a été d'un grand secours pour les méthodes de perturbations singulières qui seront utilisées plus loin.

A.1 Régime des grandes longueurs d'ondes ($k \ll 1$)

Pour $k \rightarrow 0$, il est possible de mener un traitement perturbatif [21]. La solution est ainsi exprimée en série de puissances de k :

$$\psi = \psi_0 + k\psi_1 + k^2\psi_2 + \dots$$

À l'ordre 0, le problème se réduit aux équations

$$\psi_0'''' = 0, \quad \psi_0(0) = 0, \quad \psi_0'(0) = -3, \quad \psi_0''(1) = -2\psi_0(1), \quad \psi_0'''(1) = 0,$$

On a ici supposé $k \ll 1/\text{Re}$ et $k \ll S$. La solution est

$$\psi_0 = \frac{3}{2}(-2y + y^2).$$

Les équations s'écrivent à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\psi_1'''' &= i\text{Re}(u_0\psi_0'' - u_0''\psi_0), \quad \psi_1(0) = 0, \quad \psi_1'(0) = 0, \\ \psi_1''(1) &= 0, \quad \psi_1'''(1) = \frac{3}{2}i\text{Re}\psi_1'(1) - \frac{2}{S}i\psi_1(1),\end{aligned}$$

dont la solution est

$$\psi_1 = \frac{i}{2S}(-2y^2 + y^3).$$

On en déduit

$$\frac{\tau_1(0)}{\tau_0(0)} = \frac{1}{3}\psi_1''(0) = 1 - \frac{2ik}{3S}, \quad (k \ll 1, S, 1/\text{Re}).$$

Il est possible de ne pas supposer $k \ll 1/\text{Re}$ et $k \ll S$. Il suffit de traiter $k\text{Re}$ et k/S comme des paramètres indépendants de k . Dans ce cas, on a par exemple la condition $\psi_0'''(1) = \frac{3}{2}ik\text{Re}\psi_0'(1) - \frac{2}{S}ik\psi_0(1)$ au lieu de $\psi_0'''(1) = 0$ pour l'ordre 0. Il est ainsi possible d'obtenir une solution arbitrairement précise pour $k \in [0,1[$ fixé. Le calcul donne

$$\frac{\tau_1(0)}{\tau_0(0)} = \frac{12 + 3ik\text{Re} - 12ik/S}{12 + 3ik\text{Re} - 4ik/S} + \mathcal{O}(k^2).$$

A.2 Régime des petites longueurs d'ondes ($k \gg 1$)

Considérons le petit paramètre $\varepsilon = 1/k$. Si on impose $\varepsilon = 0$ dans les équations, le problème devient

$$\psi(y) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = -3, \quad \psi(1) = 0, \quad \psi'(1) = 0.$$

Il n'y a pas de solution possible sur tout le domaine $0 \leq y \leq 1$ puisque les conditions en $y = 0$ ne peuvent être vérifiées. Physiquement, cela signifie qu'on ne peut pas négliger les effets de la viscosité près du fond; il y a formation d'une couche limite près du fond. Loin du fond, dans la couche dite *extérieure*, la solution $\psi_{ext}(y) = 0$ est une bonne approximation de la solution exacte.

Pour prendre en compte la couche limite, effectuons le changement d'échelle $Y = y/\varepsilon^\alpha$ où α est un réel strictement positif et considérons $\Psi(Y) = \psi(y)$. En appliquant le principe de moindre dégénérescence, on choisit $\alpha = 1$. L'équation devient alors, à l'ordre ε^1 (la solution à l'ordre ε^0 est nulle),

$$\Psi_1'''' - 2\Psi_1'' + \Psi_1 = 0.$$

On a supposé $k^2 \gg \text{Re}$ afin de négliger les termes de l'ordre suivant en $\varepsilon^2\text{Re}$. On choisit naturellement de vérifier les conditions en 0 qui s'écrivent $\Psi_1(0) = 0$ et $\Psi_1'(0) = -3\varepsilon$. La solution, valable seulement dans la couche limite (intérieure), se trouve être

$$\Psi_{int,1}(y) = -3\varepsilon Y e^{-Y} + A_1(-2Y + e^Y - e^{-Y}) + B_1 Y(e^Y - e^{-Y}),$$

où A_1 et B_1 sont des constantes d'intégration. Cette solution n'est valable que dans la couche limite mais doit pouvoir être raccordée avec la solution dans la couche extérieure. Le raccord s'écrit

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \Psi_{int,1}(Y) = \lim_{y \rightarrow 0} \psi_{ext,1}(y),$$

ce qui implique $A_1 = B_1 = 0$. Finalement, la solution à l'ordre le plus bas est donnée par $\psi_{ext,1}(y) + \Psi_{int,1}(Y)$:

$$\psi_1(y) = -3ye^{-y/\varepsilon}.$$

Il est aisé de voir que l'ordre suivant est de la forme $\Psi_1(y) + \varepsilon^3\Psi_3(y)$. La solution $\psi_{ext}(y) = 0$ reste valable à cet ordre dans la couche extérieure. Dans la couche intérieure, le problème devient alors

$$\Psi_3'''' - 2\Psi_3'' + \Psi_3 = 3i\text{Re}Y(\Psi_1'' - \Psi_1), \quad \Psi_3(0) = 0, \quad \Psi_3'(0) = 0,$$

et la solution s'écrit

$$\Psi_{int,3}(y) = -\frac{3}{4}i\text{Re}Y^2(Y+3)e^{-Y} + A_3(-2Y + e^Y - e^{-Y}) + B_3 Y(e^Y - e^{-Y}),$$

où A_3 et B_3 sont des constantes d'intégration. Ici encore, le raccord entre les deux couches impose $A_3 = B_3 = 0$.

La solution s'écrit finalement

$$\psi(y) = -3ye^{-y/\varepsilon} \left(1 + \frac{i\text{Re}}{4}y(y+3\varepsilon) \right) \quad (k \gg 1, \text{Re}^{1/2}),$$

d'où l'on tire $\tau_1(0)/\tau_0(0) = 2k + 3i\text{Re}/2k$. La figure A.1 montre que la solution analytique ainsi trouvée concorde avec la solution exacte (résolue numériquement) pour $\varepsilon = 0,05$.

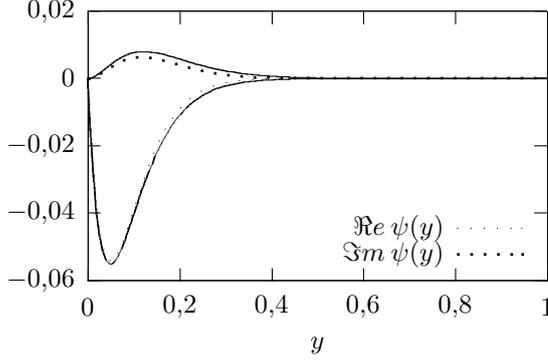


FIG. A.1 – Comparaison entre la solution vraie calculée numériquement (en pointillés) et la solution analytique obtenue par développement asymptotique (en trait plein) pour $Re = 30$, $S = 1/100$ et $k = 20$.

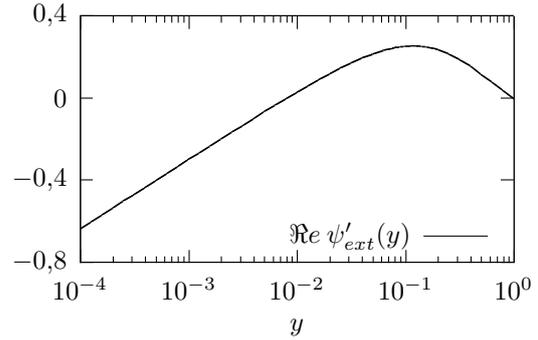
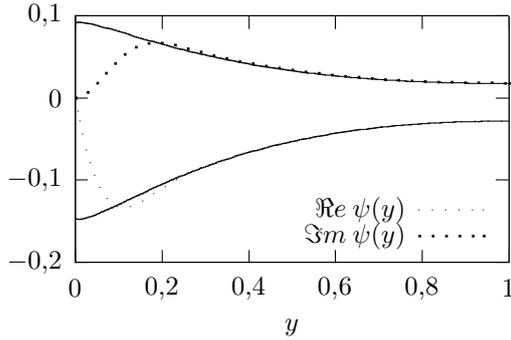


FIG. A.2 – $Re = 300$, $Fr = 1,5$ et $k = 3$. À gauche, comparaison entre la solution vraie $\psi(y)$ calculée numériquement (en pointillés) et la solution extérieure $\psi_{ext}(y)$ calculée numériquement (en trait plein) en imposant la condition supplémentaire $\psi(1) = \psi_{ext}(1)$. À droite, partie réelle de dérivée de la solution extérieure en diagramme semi-logarithmique.

A.3 Régime non-visqueux

L'objet de ce paragraphe fait l'objet d'une recherche actuelle. Il sera néanmoins présenté quelques résultats préliminaires.

On considère ici le cas $Re \rightarrow \infty$, k restant d'ordre 1. On note $\varepsilon = 1/Re$ le petit paramètre.

A.3.1 Couche extérieure

L'équation d'Orr-Sommerfeld stationnaire devient l'équation d'ordre 2

$$u_0(\psi'' - k^2\psi) - u_0''\psi = 0. \quad (\text{A.1})$$

Notons la présence d'une singularité en 0, puisque $u_0(0) = 0$. Dans le cas du fluide parfait, la condition de limite à la surface se réduit à l'annulation de la pression. Cette condition s'écrit $p_1(1) + \eta_1 p_0'(1) = 0$, qui n'est rien d'autre que (2.19h) avec $Re \rightarrow \infty$. On a ainsi, en termes de la fonction ψ , la condition

$$\psi'(1) = \frac{4}{9Fr^2}\psi(1). \quad (\text{A.2})$$

La condition $\psi''(1) = -(2 + k^2)\psi(1)$ n'existe plus en fluide parfait.

La seule condition (A.2) montre que la solution n'est définie qu'à une constante multiplicative près. Cette constante est à ce stade inconnue. La figure A.2 montre l'accord entre la vraie solution et la solution de couche extérieure en calculant la constante inconnue à partir de la vraie solution calculée numériquement.

Notons que la solution extérieure n'est pas régulière en 0, ce qui posera quelques problèmes pour le raccordement avec la couche intérieure. La dérivée se comporte en effet comme $\ln y$ au voisinage de $y = 0$, comme le montre la figure A.2. Ce comportement peut se montrer en considérant l'approximation

de l'équation (A.1) au voisinage de 0, qui s'écrit $\psi''(y) + \psi(y)/y = 0$, dont la dérivée de la solution se développe autour de 0 en $\psi'(y) = K_1 + K_2(2\gamma + \ln y) + \mathcal{O}(y)$, où K_1, K_2 sont des constantes d'intégration et $\gamma \simeq 0,58$ est la constante d'Euler.

A.3.2 Couche intérieure

Effectuons le changement d'échelle $Y = y/\varepsilon^{1/3}$ et posons $\Psi(Y) = \psi(y)$. Le choix de l'exposant $1/3$ est imposé par le principe de moindre dégénérescence.

À l'ordre ε^0 , l'équation vérifiée par $\Psi(Y)$ s'écrit ainsi

$$\Psi'''' - 3ikY\Psi'' = 0,$$

dont la solution est

$$\psi''_{int}(y) = \varepsilon^{-2/3}\Psi''(Y) = K_1\text{Ai}\left((3ik)^{1/3}Y\right) + K_2\text{Bi}\left((3ik)^{1/3}Y\right),$$

où K_1 et K_2 sont des constantes et Ai, Bi les fonctions spéciales d'Airy. La fonction Bi croît exponentiellement pour $Y \rightarrow \infty$. On choisit donc $K_2 = 0$.

En variable y , la solution dans la couche intérieure s'écrit $\psi''_{int}(y) = K_1\text{Ai}\left((3ik\text{Re})^{1/3}y\right)$. On pose $A = \psi'_{int}(\infty)$. En utilisant la condition $\psi'_{int}(0) = -3$, on obtient

$$\psi'_{int}(y) = (A + 3)\frac{G(y)}{G(\infty)} - 3,$$

avec $G(y) = \int_0^y \text{Ai}\left((3ik\text{Re})^{1/3}\zeta\right) d\zeta$. On a $G(\infty) = 3^{-1}(3ik\text{Re})^{-1/3}$.

En utilisant la condition $\psi_{int}(0) = 0$, on obtient

$$\psi_{int}(y) = (A + 3)\int_0^y \frac{G(\zeta)}{G(\infty)} d\zeta - 3y.$$

A.3.3 Raccord des deux couches

À l'heure de l'écriture du présent rapport, la singularité en $y = 0$ de la solution de la couche extérieure pose quelques difficultés pour le raccord des deux couches.

Bibliographie

- [1] J. H. BAAS : An empirical model for the development and equilibrium morphology of current ripples in fine sand. *Sedimentology*, 46:123–138, 1999.
- [2] A. BETAT, V. FRETTE et I. REHBERG : Sand ripples induced by water shear flow in an annular channel. *Phys. Rev. Lett.*, 83(1):88–91, 1999.
- [3] A. BETAT, C. A. KRUELLE, V. FRETTE et I. REHBERG : Long-time behavior of sand ripples induced by water shear flow. *European Physical Journal E*, 8:465–476, 2002.
- [4] F. CHARRU : Selection of the ripple length on a granular bed sheared by a liquid flow. *Physics of Fluids*, 18:1508–+, 2006.
- [5] F. CHARRU et E. J. HINCH : Ripple formation on a particle bed sheared by a viscous liquid. Part 1. Steady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 550:111–121, 2006.
- [6] F. CHARRU et H. MOUILLERON-ARNOULD : Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 452:303–323, 2002.
- [7] F. CHARRU, H. MOUILLERON-ARNOULD et O. EIFF : Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 519:55–80, 2004.
- [8] S. COLEMAN et B. ELING : Sand wavelets in laminar open-channel flows. *Journal of Hydraulic Research*, 38(5):331–338, 2000.
- [9] S. E. COLEMAN et J. D. FENTON : Potential-flow instability theory and alluvial stream bed forms. *Journal of Fluid Mechanics*, 418:101–117, 2000.
- [10] M. COLOMBINI : Revisiting the linear theory of sand dune formation. *Journal of Fluid Mechanics*, 502:1–16, 2004.
- [11] J. COUSTEIX et J. MAUS : Analyse asymptotique et couche limite. volume 56 de *Mathématiques & Applications*. Springer, 2006.
- [12] O. DEVAUCHELLE : *Écoulements de surface et érosion*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2007.
- [13] K. FREDSSØE et R. DEIGAARD : Mechanics of coastal sediment transport. volume 3 de *Advanced series on ocean engineering*. World Scientific, 1992.
- [14] K. K. J. KOUAKOU et P.-Y. LAGRÉE : Stability of an erodible bed in various shear flows. *European Physical Journal B*, 47:115–125, 2005.
- [15] V. LANGLOIS et A. VALANCE : Three-dimensionality of sand ripples under steady laminar shear flow. *Journal of Geophysical Research (Earth Surface)*, 110:4–+, 2005.
- [16] T. LOISELEUX, P. GONDRET, M. RABAUD et D. DOPPLER : Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow. *Physics of Fluids*, 17:3304–+, 2005.
- [17] P. NIELSEN : Coastal bottom boundary layers and sediment transport. volume 4 de *Advanced series on ocean engineering*. World Scientific, 1992.
- [18] M. OURIEMI, P. AUSSILLOUS, M. MEDALE, Y. PEYSSON et É. GUAZZELLI : Determination of the critical Shields number for particle erosion in laminar flow. *Physics of Fluids*, 19(6):061706, 2007.
- [19] A. VALANCE et V. LANGLOIS : Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow. *European Physical Journal B*, 43:283–294, 2005.
- [20] J. V. WEHAUSEN et E. V. LAITONE : Surface waves. volume 9 de *Encyclopaedia of Physics*, pages 446–778. Springer Verlag, 1960. <http://www.coe.berkeley.edu/SurfaceWaves/>.
- [21] C.-S. YIH : Stability of liquid flow down an inclined plane. *Physics of Fluids*, 6:321–334, 1963.