

INTRODUCTION À LA COUCHE LIMITE INTERACTIVE
présenté par
E. Coenen

Directeur de stage: P.Y. Lagrée
Examineurs: R. Van Hassel et M. Rossi

RijksUniversiteit Groningen,
Departement Mathématiques et Informatique

et
Université Pierre et Marie Curie,
Laboratoire de Modélisation en Mécanique

Juin 1995

Contents

1	Introduction	5
2	Couche Limite Incompressible	6
2.1	Rappels	6
2.1.1	Rappels des équations	6
2.1.2	notations	8
2.1.3	l'équation Von Kármán	9
2.2	Solutions particulières	11
2.2.1	Blasius	11
2.2.2	Falkner-Skan	12
2.2.3	Pohlhausen	13
2.3	Méthodes intégrales	15
2.4	Fluide Parfait	16
2.4.1	Ecoulement libre	16
2.4.2	Tuyau	16
2.5	Couplage	18
2.5.1	Couche Limite Classique	18
2.5.2	Singularité de Goldstein	18
2.5.3	Principe du Couplage	19
2.5.4	Estimation des paramètre de relaxation	20
2.6	Résultats pour l'Écoulement Libre	22
2.6.1	Nouvelle estimation des paramètres de fermeture	22
2.6.2	Le Creux	23
2.6.3	La Marche	23
2.7	Résultats Tuyau	24

3	Couche Limite Compressible	29
3.1	Fluide Parfait	29
3.2	Couche Limite	32
3.3	Kármán Compressible	33
3.4	Estimation de paramètre de relaxation	35
3.5	Résultats	36
4	Conclusion	37
5	Bibliographie	38

Chapter 1

Introduction

Tout commença en 1904, lorsque Ludwig Prandtl donna un séminaire au Congrès International de Mathématiques à Heidelberg, sous le titre “Uber Flussigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung”.

Prandtl y expliqua que la viscosité d’un fluide joue seulement un rôle très près de la paroi et ce d’autant plus que le nombre de Reynolds est grand, donc dans une couche infiniment mince (à nombre de Reynolds infini). On a donné le nom “Couche Limite” à cette couche. En dehors de cette couche limite, le fluide peut être pris comme un fluide parfait, donc sans viscosité, il obéit aux équations d’Euler. L’écoulement complet peut alors être trouvé par un couplage de la couche limite au fluide parfait.

Dans ce rapport on expliquera comment on a écrit le programme pour trouver la structure complète de l’écoulement, en utilisant d’une part la Méthode Intégrale couplée forte. D’autre part on dispose d’un programme de différences finies en mode inverse non couplé. On comparera les résultats de la méthode intégrale et des différences finies. Puis on fera un nouveau programme de couche limite interactive en différences finies.

Avec ces programmes on a regardé différentes sortes de géométries. Dans le cas subsonique on a calculé les cas où il y a une surface avec une bosse, un creux ou un marche et dans le cas supersonique on a calculé le cas d’une rampe.

Chapter 2

Couche Limite Incompressible

2.1 Rappels

2.1.1 Rappels des équations

On considère un écoulement bidimensionnel, stationnaire, incompressible d'un fluide sans force de masse.

On admet aussi que:

- la vitesse de l'écoulement extérieur est d'ordre U_∞
- la longueur caractéristique est d'ordre L (position de la bosse)
- l'épaisseur caractéristique est d'ordre δ , avec $\delta \ll L$
- le gradient de la pression est d'ordre ρU_∞^2

Avec ces hypothèses on peut déduire des équations de Navier-Stokes, les équations de la Couche Limite, écrites ici avec les dimensions), dans le cas d'un plaque plane (Schlichting 1987).

équation de continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

équation de quantité de mouvement en x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

équation de quantité de mouvement en y :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Conditions aux limites

à la paroi: $y = 0, u = v = 0$

à l'extérieur de couche limite: $y \rightarrow \infty, u \rightarrow u_e, p \rightarrow p_e$

avec u_e et p_e viennent de la solution des équations d'Euler

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x}.$$

Quand on met cette dernière équation dans les équations de la couche limite, on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.2)$$

avec

$$\frac{-1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x}.$$

Les équations (1) et (2) sont suffisantes pour calculer le champ des vitesses dans la couche limite, dès que l'on connaît la distribution $p_e(x)$ ou, de façon équivalente, la distribution $u_e(x)$.

L'effet de la couche limite sur l'écoulement extérieur se traduit par la grandeur, nommée épaisseur de déplacement,

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \frac{1}{u_e} (u_e - u) dy.$$

δ^* donne la nouvelle forme du corps, telle qu'elle est ressentie par l'écoulement extérieur. Le corps est devenu plus épais parce que les vitesses sont plus lentes dans la couche limite.

On peut bien voir cet effet d'épaisseur de déplacement, quand on considère le comportement de la vitesse verticale dans la couche limite.

L'équation de continuité donne $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$.

A l'extérieur de la couche limite ($y \rightarrow \infty$) il y a $u \rightarrow u_e$, alors on a $v = -y \frac{\partial u_e}{\partial x}$.

On calculera aussi le prochain terme du développement de v , pour $y \rightarrow \infty$.

$$v(x, y) \sim -y \frac{\partial u_e}{\partial x} + v_1(x) + \dots, y \rightarrow \infty,$$

$$v_1 = \lim_{y \rightarrow \infty} (v(x, y) + y \frac{\partial u_e}{\partial x}), \quad (2.3)$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) dy + y \frac{\partial u_e}{\partial x}, \quad (2.4)$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y -\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy + y \frac{\partial u_e}{\partial x}, \quad (2.5)$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y (\frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}) dy, \quad (2.6)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty (u_e - u) dy, \quad (2.7)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (u_e \delta^*). \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

A l'extérieur de la couche limite on a donc comme vitesse verticale:

$$v(x, y) \sim -y \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (u_e \delta^*).$$

Cette vitesse est d'ordre $Re^{-1/2}$. A cause de la condition de raccord avec le fluide parfait, il faut avoir comme vitesse verticale de l'écoulement extérieur près de la paroi:

$$v_{FP}(x, 0) \sim \frac{\partial}{\partial x} (u_e \delta^*).$$

Le premier ordre de fluide parfait a été égal à zéro. Cette expression est le second ordre de fluide parfait.

2.1.2 notations

On définit classiquement les quantités suivantes pour la couche limite:

Quantité de mouvement

$$\theta^* = \frac{1}{u_e^2} \int_0^\infty (u_e^2 - u^2) dy - \delta^* = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} (1 - \frac{u}{u_e}) dy.$$

Facteur de forme

$$H = \frac{\delta^*}{\theta^*}.$$

Force de frottement

$$\tau_p = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Coefficient de frottement

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_e^2}.$$

On utilise aussi le paramètre

$$f2 = \frac{C_f \delta^* Re}{2 H}.$$

2.1.3 l'équation Von Kármán

On a pour l'équation globale de quantité de mouvement, l'équation Von Kármán (Cousteix 1988).

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\partial \theta^*}{\partial x} + \theta^* \frac{(H+2)}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x}.$$

On peut écrire cette équation aussi indépendamment de θ^* , mais dépendant de δ^* , car δ^* a la signification physique que nous avons déjà exposée.

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta^*}{H} \right) + \left(\frac{2}{H} + 1 \right) \frac{\delta^*}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x}.$$

Le cas le plus simple pour calculer la couche limite, est l'écoulement sur une plaque plane. On voudrait quand-même aussi calculer la couche limite dans les cas où il n'y a pas de plaque plane, mais une bosse par exemple. Pour ces cas il faut faire une transformation, la transformation de Prandtl. La paroi $f(x)$ est transformée en une plaque plane. Comme ça on peut continuer à utiliser les équations de couche limite.

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} \\ x &= \tilde{x} \\ y &= \tilde{y} + f(\tilde{x}) \\ v &= \tilde{v} + f'(\tilde{x})\tilde{u} \end{aligned}$$

On sait déjà que $v_{FP} \sim \frac{\partial}{\partial x}(u_e \delta^*)$.

A cause des conditions de raccord on a maintenant pour v_{FP} de second ordre:

$$v_{FP} = \frac{\partial}{\partial x}(u_e \delta^*) + f'(x)u_e.$$

2.2 Solutions particulières

2.2.1 Blasius

Pour des choix spéciaux d' u_e , il y a des solutions analytiques des équations de couche limite (Cousteix 1988). Ces solutions nous serviront par la suite pour établir les relations de fermeture.

L'écoulement sur une plaque plane, c'est-à-dire à vitesse extérieure constante, représente l'exemple de la couche limite le plus simple. C'est le cas de Blasius.

Du fait que u_e est constante, on a avec l'équation d'Euler que $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Donc dans les équations de couche limite le gradient de la pression va disparaître. Les équations de couche limite sont donc:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

L'établissement de la solution se fait en introduisant la variable sans dimension:

$$\eta_B = y \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}},$$

et on pose

$$\frac{u}{u_e} = f'(\eta_B),$$

avec

$$f = \frac{\Psi}{\sqrt{\nu x u_e}}.$$

Ψ est la fonction de courant.

L'équation de quantité de mouvement devient

$$f f'' + 2f''' = 0,$$

avec

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f'(\infty) = 1.$$

Quelques valeurs importantes sont

$$\delta = 1.721,$$

$$\delta^* = \frac{1}{u_e} \int_0^\infty (u_e - u) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{u_e}} \int_0^\infty (1 - f') d\eta = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{Re}} \delta = 1.721 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{Re}},$$

$$\theta^* = \frac{1}{u_e^2} \int_0^\infty u(u_e - u) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{u_e}} \int_0^\infty f'(1 - f') d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{u_e}} f''(0) = 0.664 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{Re}},$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta^*} = 2.591,$$

$$C_f = 0.664 \frac{1}{\sqrt{Re_x}},$$

$$f_2 = 0.2349.$$

2.2.2 Falkner-Skan

Les solutions de Falkner-Skan (Cousteix 1988, Veldman 1992) sont des solutions particulières correspondant à l'écoulement le long d'un dièdre symétrique dont l'angle au sommet $\pi\beta$. La solution de Blasius correspond au cas $\beta = 0$.

La vitesse extérieure est de la forme $u_e = kx^{\frac{\beta}{2-\beta}}$. En posant $m = \frac{\beta}{2-\beta}$ on obtient $u_e = kx^m$.

Le changement de coordonnées transversales s'exprime par:

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}}$$

La vitesse longitudinale réduite est donnée par:

$$\frac{u}{u_e} = f'(\eta)$$

avec

$$f = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{\Psi}{\sqrt{\nu x u_e}}$$

L'équation de quantité de mouvement devient donc dans ce cas particulier de Falkner-Skan:

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

avec

$$f(0) = f'(0) = 0, f'(\infty) = 1$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire pour la fonction $f(\eta)$ dont on cherche la solution pour une valeur donnée de β . Cette équation n'a pas pour chaque β une solution. Il y a seulement des solutions pour $\beta > -0.1988$.

Dans le cas $\beta > 0$, la solution est unique est la vitesse u est positive pour chaque valeur de η .

Dans le cas $-0.1988 < \beta < 0$, il existe deux solutions. Pour l'une d'entre elles, la vitesse longitudinale u est partout positive dans l'épaisseur de la couche limite, alors que pour l'autre, il existe une zone à contre-courant ($u < 0$) près de la paroi.

On va utiliser les résultats déduits des solutions de Falkner-Skan, pour H et f_2 . On prend ces solutions pas comme fonction de β , mais on prend H fonction du paramètre de gradient de pression Λ_1 , dont ça signification apparaît au paragraphe suivant, et f_2 fonction de H

$$\Lambda_1 = \frac{\delta_*^2}{\mu} \frac{\partial u_e}{\partial x}.$$

2.2.3 Pohlhausen

Pour mémoire on expose la méthode approchée de Pohlhausen, elle permet de bien mettre en évidence le paramètre Λ_1 qui nous sera très utile par la suite. Pohlhausen a proposé, pour trouver la vitesse longitudinale u , une fonction polynômiale d'ordre 4 en fonction de la variable réduite $\xi = \frac{y}{\delta}$ où δ représente l'épaisseur de couche limite (Cousteix 1988). Bien évidemment cette méthode n'a aucune consistance asymptotique.

$$\frac{u}{u_e} = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + e\xi^4,$$

$$\xi \leq 1.$$

Les 5 constantes sont déterminées par les conditions aux limites en $\xi = 0$ et $\xi = 1$. Suivant le degré du polynôme choisi, le nombre de conditions aux limites varie.

La représentation de Pohlhausen est applicable non seulement dans le cas de la plaque plane mais également en présence d'un gradient de pression. On prend le cas d'un polynôme de quatrième degré. Il y a les conditions aux limites d'adhérence et de raccord

$$\begin{aligned}\xi = 0, u &= 0, \\ \xi = 1, u &= u_e.\end{aligned}$$

On ajoute encore deux conditions supplémentaires qui évitent un point anguleux en $\xi = 0$

$$\begin{aligned}\xi = 1, \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \\ \xi = 1, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0\end{aligned}$$

et la dernière condition est obtenue en écrivant l'équation de quantité de mouvement à la paroi:

$$\left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -u_e \frac{\partial u_e}{\partial x}.$$

On trouve comme polynôme:

$$\frac{u}{u_e} = 2\xi - 2\xi^3 + \xi^4 + \frac{\Lambda_1}{6}\xi(1 - \xi)^3.$$

Le paramètre de gradient de pression Λ_1 est appelé aussi paramètre de Pohlhausen. Il faut maintenant trouver δ^* avec l'équation Von Kármán.

2.3 Méthodes intégrales

Le principe des méthodes intégrales repose sur l'idée qu'il n'est pas nécessaire de connaître en détail le comportement des profils de vitesse pour obtenir des résultats pratiques intéressants. On est donc conduit à accepter de ne pas faire appel à l'équation de quantité de mouvement locale, mais seulement à sa forme intégrale,

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta^*}{H} \right) + \left(\frac{2}{H} + 1 \right) \frac{\delta^*}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x}.$$

Si on donne δ^* et on veut calculer u_e , où l'inverse (u_e donné, δ^* à calculer), nous restent les inconnues qui sont le coefficient de frottement et le facteur de forme. Pour fermer le système on fait appel à des relations supplémentaires. Pour obtenir ces relations de fermeture, on utilise les propriétés des solutions particulières ou des formulations approchées de ces propriétés. Quelques

possibilités: Blasius:

$$\begin{aligned} H &= 2.591 \\ f_2 &= 0.2349 \end{aligned}$$

Falkner-Skan extrapolé, (il existe d'autres formes dans la littérature, Cousteix 1988):

$$\begin{aligned} H &= 2.591 \exp(-\Lambda_1/6) \\ f_2 &= 0.3149 \exp(2.5541 - H) - 0.08 \text{ pour } H \leq 7 \\ f_2 &= (0.3149 \exp(2.5541 - 7) - 0.08) 7/H \text{ pour } H > 7 \end{aligned}$$

Pohlhausen linéarisé avec les valeurs de Blasius:

$$\begin{aligned} H &= 2.591 - 0.5326\Lambda_1 \\ f_2 &= 0.2349 - 0.194\Lambda_1 \end{aligned}$$

Blasius est en fait un cas particulier de Falkner-Skan, le cas où $\beta = 0$. Donc pour les cas différents du cas de la plaque plane, c'est mieux d'utiliser la relation de fermeture de Falkner-Skan. Pour Pohlhausen il y a des problèmes dans les cas où il y a décollement. On préfère donc Falkner-Skan.

2.4 Fluide Parfait

2.4.1 Ecoulement libre

Dans la suite le fluide parfait sera traité dans l'approximation des petites perturbations, les équations d'Euler sont donc linéarisées. Dans le fluide parfait on a par une intégrale de Cauchy la relation suivante entre la vitesse longitudinale et δ^*

$$u_{FP} = 1 + \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \frac{-v_{FP}}{x - \xi} d\xi,$$

alors

$$u_{FP}(x, 0) = 1 + \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \frac{-\left(\frac{\partial}{\partial x}(u_e \delta^*) + f'(x)u_e\right)}{x - \xi} d\xi.$$

2.4.2 Tuyau

On considère maintenant un écoulement bidimensionnel, stationnaire et incompressible dans un tuyau avec un rétrécissement. Ce tuyau est symétrique, donc on peut travailler sur la moitié du domaine. On peut comparer avec le cas d'une bosse comme tout à l'heure, sauf que la relation de fluide parfait est complètement changée. A cause du fait que le fluide est enfermé, on a sur la ligne de symétrie $v = 0$. Dans le cas précédent il n'y avait pas cette contrainte.

Si on prend f comme la fonction de la surface et h comme la demi hauteur du tuyau ($f \ll h$), on peut dire que le fluide coule entre $f + \delta^*$ et h , en oubliant l'autre moitié du tuyau.

On met cette information dans l'équation de continuité et après intégration on obtient

$$v(h) - v(f + \delta^*) = - \int_{f+\delta^*}^h \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Comme conditions aux limites pour v on a:

$$v(h) = 0 \text{ et } v(f + \delta^*) = \frac{\partial}{\partial x}(u_e \delta^*) + u_e f'(x).$$

On les utilise et on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_e \delta^*) + u_e f'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(h - f - \delta^*).$$

Parce que $h \gg f - \delta^*$ on oublie ce terme dans la partie droite et donc on trouve après intégration

$$u_e \delta^* + u_e f(x) = (u - u_e)h.$$

On trouve donc pour la vitesse longitudinale en fluide parfait la nouvelle relation suivante

$$u = u_e + u_e \frac{f(x) + \delta^*}{h}.$$

Laquelle est après la linéarisation, $u_e = 1 + \varepsilon \tilde{u}_e$:

$$u_{FP} = 1 + \frac{f(x) + \delta^*}{h}.$$

2.5 Couplage

2.5.1 Couche Limite Classique

La technique la plus simple pour résoudre le problème du calcul de l'écoulement est la théorie des développements asymptotiques raccordés. Elle calcule premièrement avec les équations d'Euler les valeurs en fluide parfait au premier ordre. Comme condition au limite il y a $v_{FP} = 0$ en $y = 0$ (glissement).

Ensuite les valeurs dans la couche limite sont calculées au premier ordre en utilisant la valeur u_e trouvée avec Euler près de la paroi. Il y a comme autres conditions que $u_{CL} = v_{CL} = 0$ en $\tilde{y} = 0$ ($y = Re^{-1/2}\tilde{y}$).

L'effet de la couche limite, à cause de l'épaisseur de déplacement, est une perturbation de fluide parfait. Autrement dit, en termes de vitesse verticale; l'effet de la couche limite est à la paroi une correction à une distribution de vitesse de base connue de fluide parfait. Donc maintenant au deuxième ordre, la vitesse verticale du fluide parfait en $y = 0$ (vitesse de transpiration) n'est plus égale à zero, mais $v_1^{FP}(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u_e)$ avec $\delta^* = Re^{-1/2}\delta$, comme on a déjà vu. Cette vitesse de second ordre fait se développer la couche limite de second ordre *etc...*

Cette théorie tombe en défaut dès que la couche limite présente un point de décollement.

2.5.2 Singularité de Goldstein

Physiquement on peut comprendre la séparation de la couche limite de la manière suivante (Cousteix 1988); près de la paroi, là où les effets visqueux sont les plus importants, il y a un bilan entre les forces de pression et les forces de viscosité. Ce sont ces forces qui provoquent la variation d'énergie cinétique. Si les forces de pression s'opposent au mouvement, leurs effets augmentés de ceux de la dissipation sont de provoquer un ralentissement du mouvement, puisque $-\frac{\partial p_e}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x}$.

Quand les forces de la pression sont petites l'écoulement reste régulier et alors près de la paroi, les lignes de courant restent au voisinage de la surface.

Si les forces de pression sont intenses, la diminution d'énergie cinétique par dissipation peut-être suffisante pour que le mouvement s'arrête et même rebrousse chemin. Donc les lignes de courant voisines de la paroi à l'amont s'en écartent franchement dans la zone arrière. On parle d'une formation

d'une zone décollée avec recirculation. Le $C_f = 0$ au point de décollement. Le δ^* devient très vite très grand. La description classique tombe en défaut parce qu' on utilise le u_e (ou p_e) d' Euler dans les équations de la couche limite. Quand on prend les équations de la couche limite locale, on voit que c'est une équation parabolique, en faite il ressemble l'équation de la chaleur, laquelle a comme solution une exponentielle. Dans le cas du décollement, où $u < 0$, on a alors une croissance exponentiel. Ca va exploser. La description classique tombe en défaut. C'est la singularité de Goldstein.

Il faut en fait changer les échelles et le bon cadre de description est la triple couche (Stewartson et Williams 1969, Neiland 1969).

2.5.3 Principe du Couplage

L'écoulement est divisé en deux parties, la couche limite et l'écoulement extérieur. Dans les deux couches on a trouvé une relation entre δ^* et u_e . On les écrit symboliquement (Veldman 1992, LeBalleur 1978)

écoulement extérieur :

$$u_e = E(\delta^*),$$

couche limite :

$$u_e = C(\delta^*).$$

Pour trouver l'écoulement complet on va coupler ces deux relations. Suivant la théorie de la couche limite classique (asymptotique) on trouve le système suivant

$$u_e^{(n)} = E(\delta_*^{(n-1)}),$$

$$\delta_*^{(n)} = C^{-1}(u_e^{(n)}).$$

Cette methode est la méthode directe.

En fait cette méthode n'est pas complètement la méthode classique, parce qu' on utilise dans le fluide parfait les équation d'Euler de premier et deuxième ordre, alors que l'on utilise dans la couche limite seulement les équations de premier ordre. Asymptotiquement c'est faux, mais on trouve la justification dans la triple couche.

Comme il y a été expliqué dans le paragraphe précédent il y a pourtant pour cette théorie de méthode directe des problèmes dans les cas où il y a le décollement.

On peut imaginer une technique inverse de couplage dans laquelle la couche limite et le fluide parfait sont calculés en mode inverse

$$\delta_*^{(n)} = E^{-1}(u_e^{(n-1)}),$$

$$u_e^{(n)} = C(\delta_*^{(n)}).$$

Maintenant il n'a pas de problèmes, mais cette méthode converge lentement. Nous on utilisera une forme mixte

$$u_e^E = E(\delta_*^{(n-1)}),$$

$$u_e^C = C(\delta_*^{(n-1)}),$$

$$\delta_*^{(n)} = \delta_*^{(n-1)} + \mu(u_e^C - u_e^E) + \lambda \frac{\partial}{\partial x}(u_e^C - u_e^E),$$

avec μ et λ les paramètres de relaxation. Nous verrons que dans le cas incompressible $\lambda = 0$ et dans le cas compressible $\mu = 0$. C'est la méthode "semi-inverse".

2.5.4 Estimation des paramètre de relaxation

Linéarisons les équations:

on prend dans la couche limite $\delta = \delta_0 + \varepsilon \tilde{\delta}_1$ et $u_e = 1 + \varepsilon \tilde{u}_1$. Comme relation de fermeture on prend la forme linéaire de Pohlhausen

$$H(\Lambda_1) = H_0 + H' \Lambda_1,$$

$$f_2(\Lambda_1) = f_{20} + f_2' \Lambda_1.$$

Ces quatre relations sont mises dans l'équation de Von Kármán. Après calculs on trouve, en prenant les termes d'ordre ε , une équation de forme suivante

$$a \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{\delta}_1}{\partial x} = b \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + c \tilde{\delta}_1 + d \tilde{u}_1.$$

Maintenant, si on décompose en modes de Fourier, $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_{10} e^{ikx}$ et $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_{10} e^{ikx}$, on trouve

$$\tilde{u}_1 = \beta \tilde{\delta}_1.$$

En fluide parfait dans l'écoulement libre on prend $\delta^* = Re^{-1/2}(\delta_0 + \varepsilon \bar{\delta}_1) = \tilde{\varepsilon}(\delta_0 + \varepsilon \bar{\delta}_1)$ et $u_e = 1 + \tilde{\varepsilon}(u_{01} + \varepsilon \bar{u}_e)$ avec $\tilde{\varepsilon} \ll \varepsilon$. On les met dans l'équation de vitesse longitudinale de fluide parfait d'écoulement libre. Si on fait le calcul et en prenant les termes d'ordre $\tilde{\varepsilon} \varepsilon$ on trouve

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\pi} \int \frac{\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\delta}_1)}{x - \xi} d\xi.$$

Avec la transformation de Fourier on a finalement

$$\bar{u}_1 = \alpha \bar{\delta}_1,$$

où $\alpha = |k|$. Dans le cas du tuyau on a $\alpha = 1$. Le système devient donc avec la méthode semi-inverse

$$\bar{u}_e = \alpha \delta_1^{(n-1)},$$

$$\tilde{u}_e = \beta \delta_1^{(n-1)},$$

$$\delta_1^{(n)} = \delta_1^{(n-1)} + \mu(\beta \delta_1^{(n-1)} - \alpha \delta_1^{(n-1)}).$$

Il y a donc comme facteur d'amplification

$$G = \frac{\delta_1^{(n)}}{\delta_1^{(n-1)}} = 1 + \mu(\beta - \alpha).$$

Pour la stabilité on a besoin de $|G| < 1$. Il faut alors choisir un bon μ pour que ça soit vrai.

2.6 Résultats pour l'Écoulement Libre

2.6.1 Nouvelle estimation des paramètres de fermeture

On calcule les cas d'une bosse avec le nombre de Reynolds égal à 128000 (figure 2.1a). On compare les résultats obtenus par la méthode intégrale couplée en "semi-inverse" à un autre programme, qui utilise la méthode de différence finie, Keller Box (Keller 1978, Cebeci, Keller et Williams 1979). Ce programme calcule, pour un δ^* donné les valeurs de couche limite. Il ne fait pas le couplage. Ces valeurs pourtant sont plus exactes que celles obtenues par le programme de méthode intégrale couplée. On veut comparer, à un même δ^* fixé, les valeurs calculées par les deux programmes.

Dans le cas où la hauteur de la bosse est trop grande pour un grand Reynolds, notre programme a des problèmes pour converger. Donc il faut prendre une bosse pas trop haute.

Dans un premier temps, quand on compare les résultats de notre programme et l'autre il y a toujours un décalage (figure 2.1b). Pour améliorer ça, on a cherché une nouvelle relation de fermeture. Avec les résultats donnés par le programme de différence finie, on a trouvé un polynôme d'ordre trois pour f_2

$$f_2 = -0.01669H^3 + 0.2702H^2 - 1.4483H + 2.4515, H \leq 6,$$

$$f_2 = (-0.01669 * 6^3 + 0.2702 * 6^2 - 1.4483 * 6 + 2.4515) * \frac{6}{H}, H > 6.$$

Pour H on prend la version Pohlhausen linéaire, parce qu'il est assez bien. Avec cette relation de fermeture le décalage est moindre.

Dans un second temps on remplace la boîte "couche limite intégrale" par la "Keller Box". On a aussi à notre disposition un code complet de couche limite interactive en mode "semi inverse". Les quelques cas que nous avons calculés avec ces deux programmes de couche limite interactive (Intégral et Keller Box) nous permettent de conclure que la méthode intégrale donne des résultats suffisamment proches de ceux de la Keller Box.

2.6.2 Le Creux

Avec ce nouveau programme on calcule aussi un creux de profondeur 0.03 à différentes valeurs de Reynolds. Ce cas est aussi déjà calculé par Veldman et Henkes (1987). Les valeurs ressemblent à celles de Veldman et Henkes. Dans figure 2.2*b*, on voit le graphe des points de décollement et d'attachement en fonction du logarithme du nombre de Reynolds tracé par Veldman et Henkes. Les autres 8 points dans cette figure sont les points de décollement et réattachement trouvés par notre nouveau programme.

Quand on regarde la figure 2.2*a* on voit qu'on obtient un bon accord pour les premières valeurs de Reynolds, mais on n'obtient pas le deuxième bulbe de recirculation. C'est un cas trop difficile pour notre programme, qui tient à l'approximation Flare.

2.6.3 La Marche

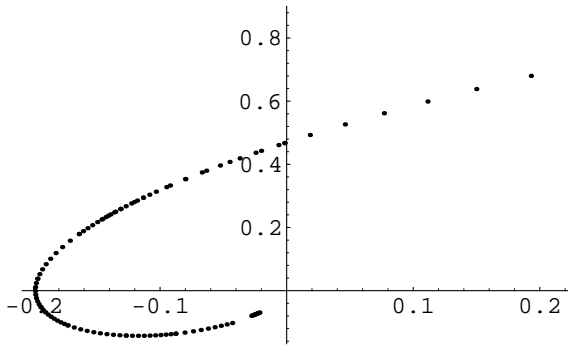
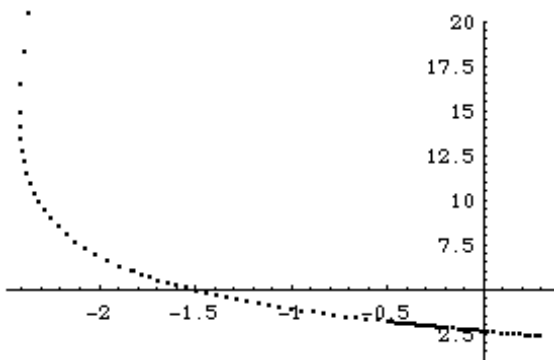
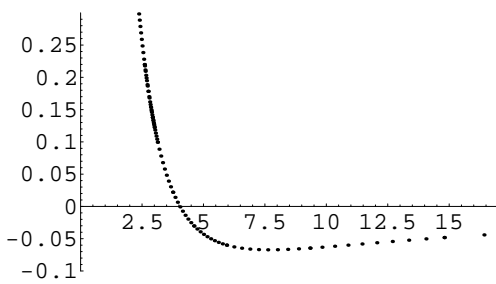
Un autre cas intéressant est le cas de la marche (figure 2.3). On a essayé de retrouver le graphe p_{max} en fonction de α de Sommer (1992), mais on n'a pas réussi à avoir les mêmes résultats (Sommer 1992, Gersten et Herwig 1994). Notre programme a beaucoup des problèmes pour converger dans ce cas. Il y a une différence du point de décollement et après un certain α ($\alpha > 0.0145$) notre programme ne converge plus. Donc on n'a pas réussi à trouver le point, où l'écoulement change d'un décollement faible à un décollement massif et le point où il change d'un décollement massif à un écoulement attaché. On est encore une fois à la limite de notre programme.

2.7 Résultats Tuyau

Quand on compare le cas d'un tuyau, avec un cas d'écoulement libre, on voit que dans le cas de tuyau l'influence de la bosse commence au point de la bosse et pas plus tôt, comme dans l'autre cas (figure 2.4a). Il n'y a pas d'influence de l'aval sur l'amont. A cause de cette nouvelle relation de fluide parfait l'écoulement ne sait plus ce qui va se passer prochainement. Il a seulement l'information de son point. Dans l'autre cas on utilise pour calculer la valeur de u_e en fluide parfait une intégrale, donc il a aussi toute l'information des autres points.

Dans la figure 2.4a le cas du tuyau est calculé avec le programme de méthode Intégrale et aussi avec le programme de différences finies avec le couplage. Il y a une différence mais pas trop grande.

Dans le cas, avec le nombre de Reynolds 3000, il y a le décollement quand la hauteur de la bosse est plus grande que 0.05 (figure 2.4b). Quand la bosse devient encore plus grande il ne converge plus.

tracé de $f''(0)$ en fonction de β .tracé de H en fonction de Λ_1 .tracé de f_2 en fonction de H .

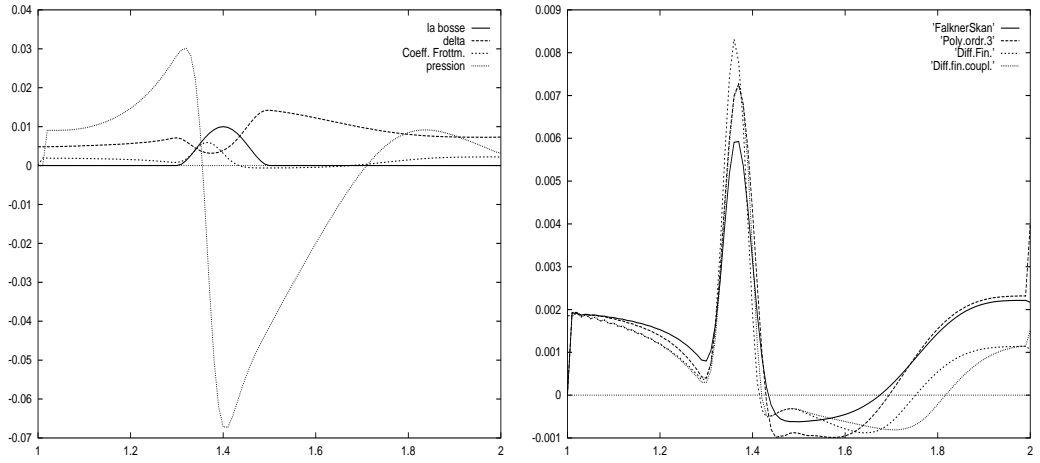


Figure 2.1: a) Bosse avec hauteur 0.01 et $Re=128000$ b) Coeff. Frottement

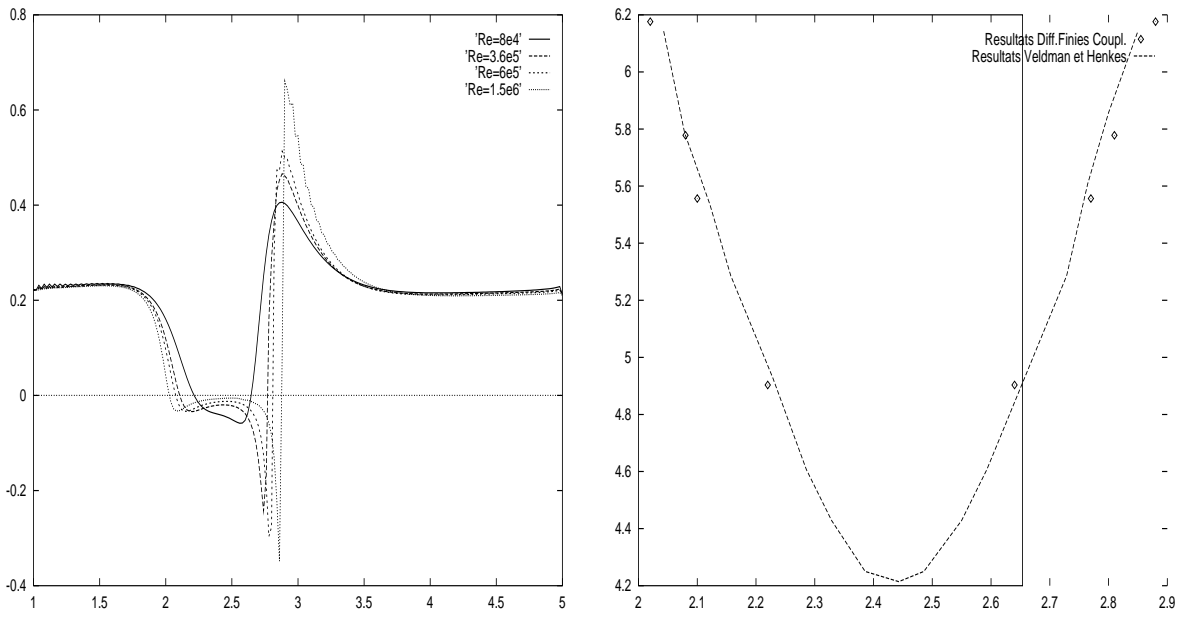


Figure 2.2: a) Coeff. Frottement b) Points de décollement et réattachement en fonction du log Reynolds

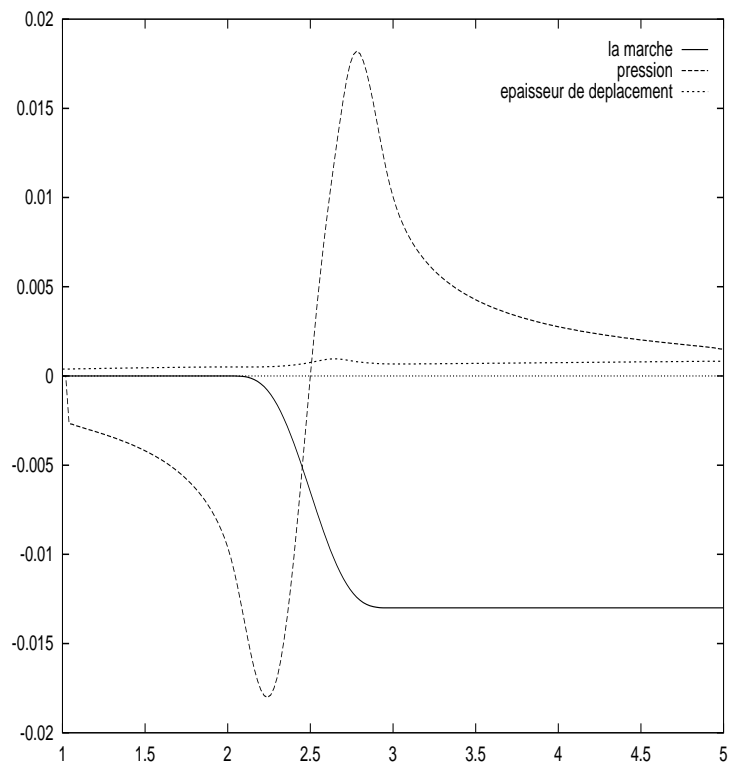


Figure 2.3: Marche avec hauteur 0.013 et $Re = 10^7$

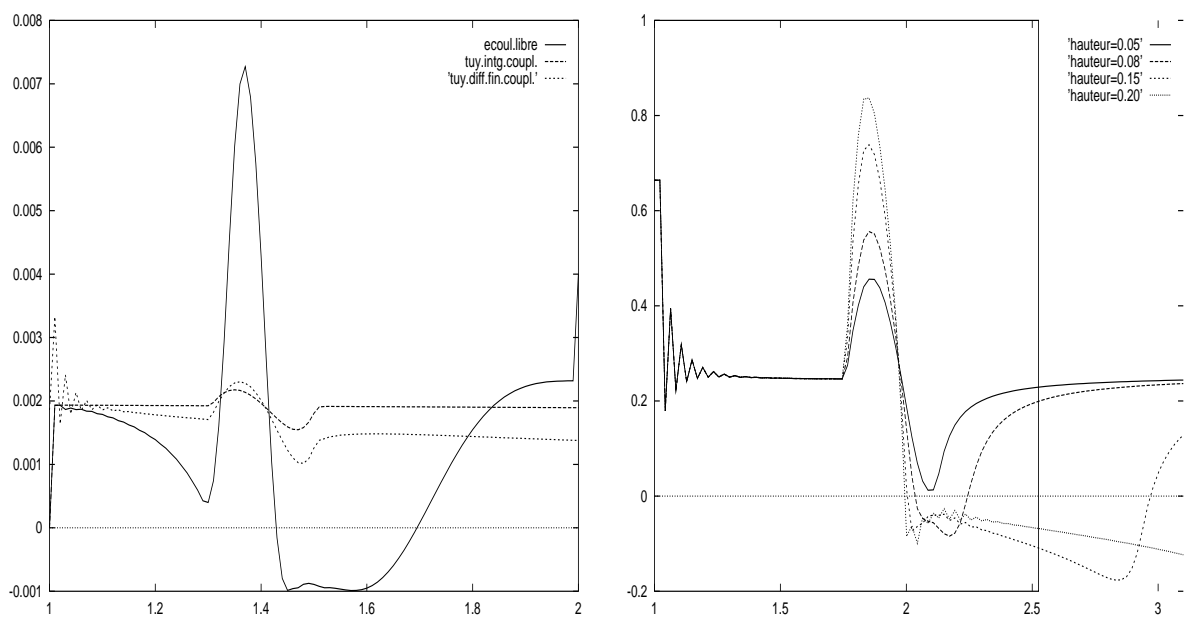


Figure 2.4: a)Coeff. Frottement au hauteur 0.01 b)Coeff. Frottement au hauteurs différentes

Chapter 3

Couche Limite Compressible

3.1 Fluide Parfait

Maintenant on considère le cas compressible avec une paroi adiabatique. On a comme équations d' Euler les suivantes:

équation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0,$$

équation de mouvement en x:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

équation de mouvement en y:

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y},$$

équation d'énergie:

$$\rho u \frac{\partial e}{\partial x} + \rho v \frac{\partial e}{\partial y} = -p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

On peut écrire l'équation de l' energie aussi sous autre forme en utilisant:

$$e = C_v T,$$

$$C_p / C_v = \gamma,$$

$$p = \rho RT,$$

$$C_v = \frac{R}{\gamma-1}.$$

On obtient

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) = -p(\gamma - 1) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

On recherche la solution du problème sous la forme d'un développement en puissance de ε . On prend

$$u = u_e + \varepsilon u,$$

$$v = \varepsilon v,$$

$$p = p_e + \varepsilon p,$$

$$\rho = \rho_e + \varepsilon \rho.$$

On reporte ce développement dans les équations en ne gardent que les termes d'ordre ε . On obtient

$$u_e \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_e \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\rho_e u_e \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\rho_e u_e \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho_e} \right) = \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right).$$

La première équation s'intègre immédiatement pour donner le théorème de Bernoulli linéarisé

$$p = \rho_e v_e u.$$

En reportant ce résultat dans la deuxième équation on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{3.1}$$

Avec ces quatre relations d' Euler linéarisé on peut trouver le système suivant

$$\left(1 - \frac{u^2 \rho_e}{\gamma p_e}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

en introduisant le nombre de Mach $M = \frac{u}{c}$ avec $c = \frac{\rho_e}{\gamma p_e}$ il vient

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Prenant le cas supersonique, donc $M > 1$ et posant $\beta^2 = M^2 - 1 > 0$, l'équation à résoudre s'écrit

$$-\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

avec à la paroi

$$v(x, 0) = F'(x),$$

avec

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_e \delta^*) + f'(x)u(x, 0).$$

C'est l'équation des ondes classique. On a donc comme solution dans notre cas

$$v(x, y) = F'(x - \beta y).$$

Pour calculer u on utilise l'équation trouvée, et on obtient

$$u(x, y) = -\frac{1}{\beta} F'(x - \beta y).$$

Pour u près de la paroi on tient

$$u(x, 0) = \frac{-1}{\sqrt{M^2 - 1}} F'(x).$$

3.2 Couche Limite

Les équations dans la couche limite dans le cas compressible sont les suivantes (Cousteix 1988) continuité:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0,$$

mouvement:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

energie:

$$C_p \rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - u \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu C_p}{P} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

avec $P = \frac{\mu C_p}{k}$ le nombre de Prandtl et k le coefficient de diffusivité thermique.

Comme loi d'état on a

$$\rho_e T_e = \rho T.$$

Conditions aux limites

à la paroi: $u = v = 0$, $T = T_w$ ou dans le cas adiabatique $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$,

à l'extérieur de la couche limite: $u = u_e$, $p = p_e$, $T = T_e$.

3.3 Kármán Compressible

L'équation d'Euler à la paroi où $v = 0$ nous donne

$$\rho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p_e}{\partial x},$$

ce que on peut mettre dans l'équation de mouvement. On obtient:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

On l'intègre et en utilisant l'équation de continuité et la condition à la paroi $v = 0$, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) (u - u_e) dy + (\rho v (u - u_e))_\infty + \int_0^\infty \rho u \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_0^\infty \rho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} dy + \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^\infty.$$

Après quelques calculs et en utilisant que à l'extérieur de la couche limite ($y \rightarrow \infty$) $u = u_e$ on a

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 - \rho_e u_e^2) dy - u_e \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (\rho u - \rho_e u_e) dy = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0.$$

Maintenant on introduit l'épaisseur de déplacement

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\rho_e u_e} (\rho_e u_e - \rho u) dy,$$

et aussi la quantité de mouvement

$$\theta^* = \frac{1}{\rho_e u_e^2} \int_0^\infty (\rho_e u_e^2 - \rho u^2) dy - \delta^* = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy.$$

On les utilise et finalement on obtient

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial x} + \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} (2\theta^* + \delta^*) + \frac{\theta^*}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} = \frac{C_f}{2}.$$

On a dans l'écoulement extérieur

$$\frac{M^2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x}.$$

En reportant ça dans l'équation et en écrivant l'équation indépendante de θ^* on trouve comme équation de Von Kármán la suivante

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta^*}{H} \right) + \delta^* \left(1 + \frac{2 - M^2}{H} \right) \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{C_f}{2}.$$

On prend le cas le plus simple, le fluid modèle, c'est le cas où le nombre de Prandtl est égal à 1. Dans ce cas on trouve, quand on compare avec le cas incompressible que C_f et θ^* ne changent pas et que δ^* devient, en supposant que l'écoulement est adiabatique,

$$\delta^* = \frac{1.721\sqrt{x}}{\sqrt{Re}}(1 + 0.27M^2),$$

donc f_2 ne change non plus et H et Λ_1 changent aussi

$$H_{comp} = H_{incomp}(1 + 0.27M^2),$$

$$\Lambda_{1_{comp}} = \Lambda_{1_{incomp}}(1 + 0.27M^2)^2.$$

Donc ces simplifications nous permettent d'utiliser notre programme de Couche Limite Intégrale sans grande modification.

3.4 Estimation de paramètre de relaxation

On va faire l'exemple linéarisé. On prend dans la couche limite $\delta = \delta_0 + \varepsilon \tilde{\delta}_1$ et $u_e = 1 + \varepsilon \tilde{u}_1$ et comme relation de fermeture on prend encore une fois la forme lineaire de Pohlhausen.

On met ce développement dans l'équation de Von Kármán et on trouve de même que dans le cas incompressible

$$\tilde{u}_1 = \beta \tilde{\delta}_1.$$

Dans le fluide parfait avec $\delta^* = \tilde{\varepsilon}(\delta_0 + \varepsilon \tilde{\delta}_1)$ et $u_e = 1 + \tilde{\varepsilon}(u_{01} + \varepsilon \tilde{u}_e)$ on trouve maintenant une autre relation

$$\bar{u}_1 = \alpha \frac{\partial \tilde{\delta}_1}{\partial x}.$$

Le système devient donc avec le méthode semi-inverse en prennant le δ_1 , \bar{u}_e et \tilde{u}_e de la forme $a e^{ikx}$ on obtient

$$\bar{u}_e = \alpha ik \delta_1^{(n-1)},$$

$$\tilde{u}_e = \beta \delta_1^{(n-1)},$$

$$\delta_1^{(n)} = \delta_1^{(n-1)} + \lambda ik (\beta \delta_1^{(n-1)} - \alpha ik \delta_1^{(n-1)}).$$

Le facteur d'amplification G devient

$$G = \frac{\delta_1^{(n)}}{\delta_1^{(n-1)}} = 1 + \lambda ik (\beta - \alpha ik).$$

3.5 Résultats

On a pris comme surface une rampe et on a calculé ce cas avec différents nombres de Mach. On a trouvé que avec $Re = 1000000$ et $\alpha = 0.01$ que le programme avec la méthode Intégrale marche jusqu'à $Mach = 2.5$. Pour Mach plus grand il ne converge plus (figure 3.1). Il faut réécrire les équations de couche limite dans le cas hypersonique.

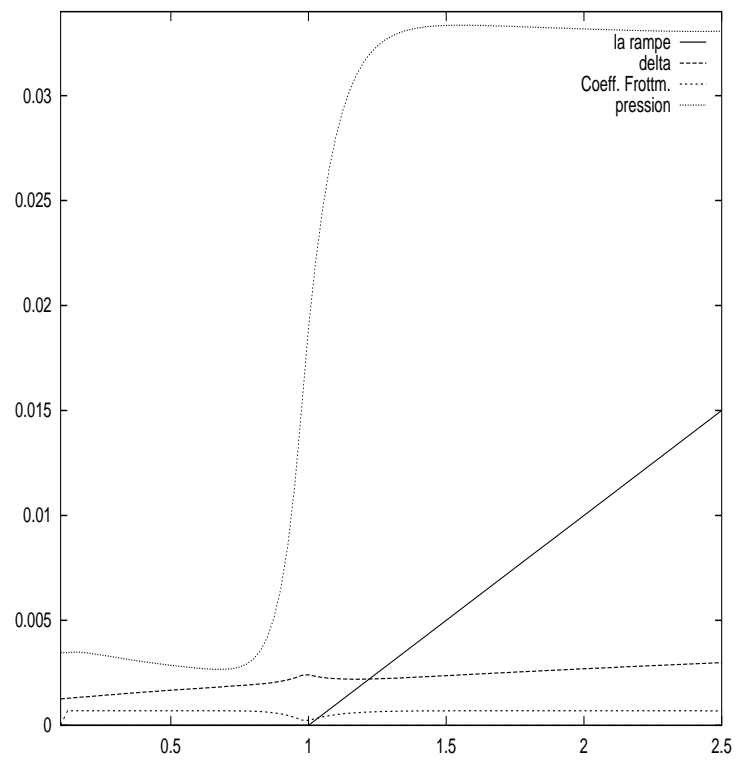


Figure 3.1: cas supersonique avec Mach=2.2

Chapter 4

Conclusion

On peut conclure que dans les cas pas trop difficiles, ça veut dire un nombre de Reynolds pas plus grand que 10^6 , et une géométrie simple (la hauteur de la géométrie pas trop haute) le programme de méthode intégrale couplée et le programme de différences finies couplée marchent bien. Dans les cas plus difficiles, le programme ne converge plus. Pour réussir à trouver de bons résultats dans les cas sévères, il faut améliorer les programmes. Il faut utiliser la théorie de la triple couche le cas échéant, et dans le programmes de différences finies, il faut trouver une solution pour compenser l'approximation Flare.

Chapter 5

Bibliographie

- J.Cousteix: Couche Limite Laminaire (1988)
- T.Cebeci, H.B.Keller et P.G.Williams: Separating Boundary-Layer Flow Calculations, J. Comp. Physics 31 (1979) 363-378
- K.Gersten et H.Herwig: Strömungsmechanik (1994) 295-302
- R.A.W.M.Henkes et A.E.P.Veldman: On the breakdown of the steady and unsteady interacting boundary layer description, J.Fluid Mech. (1987) 179 513-529
- H.B.Keller: Numerical methods in Boundary-Layer Theory, Ann.Rev.Fluid Mech. (1978) 417-433
- J.C.LeBalleur: Couplage visqueux non-visqueux: méthode numérique et applications aux écoulements bidimensionnels transsoniques et supersoniques, La Recherche Aérospatiale (1978) 65-76
- Neiland: Theory of laminar boundary layer separation in supersonic flow, Mekh.Zhid.Gaza Vol. 4 (1969) 53-57
- H.Schlichting: Boundary Layer Theory (1979)
- F.Sommer: Mehrfachlösungen bei abgelösten Strömungen großer Reynolds-Zahlen: eine Kusp-Katastrophe, Z.angew.Math.Mech. (1992) 346-349
- K.Stewartson: The Theory of Laminar Boundary-Layer in Compressible fluids (1963) 12-39
- K.Stewartson et P.G.Williams: Self-induced separation, Proc.Roy.Soc. (1969) 181-206
- A.E.P.Veldman: Grenslaagstromingen (1992)