

---

# Projet Personnel en Laboratoire Modélisation d'avalanches

Lionel FIABANE

Laboratoire de Modélisation en Mécanique,  
UMR CNRS 7607, Boîte 162,  
Université Paris 6, 75252 Paris France

# Plan de la présentation

---

- Introduction

## Plan de la présentation

---

- Introduction
- Équations de conservation
  - Présentation des équations de conservation générales
  - Présentation des équations de conservation dans le cas d'un milieu granulaire
  - Cas de l'avalanche simple, puis de l'avalanche tournante

# Plan de la présentation

---

- Introduction
- Équations de conservation
  - Présentation des équations de conservation générales
  - Présentation des équations de conservation dans le cas d'un milieu granulaire
  - Cas de l'avalanche simple, puis de l'avalanche tournante
- Simulation numérique
  - Schéma numérique
  - Simulation d'avalanches simples, puis d'avalanches tournantes

# Plan de la présentation

---

- Introduction
  - Équations de conservation
    - Présentation des équations de conservation générales
    - Présentation des équations de conservation dans le cas d'un milieu granulaire
    - Cas de l'avalanche simple, puis de l'avalanche tournante
  - Simulation numérique
    - Schéma numérique
    - Simulation d'avalanches simples, puis d'avalanches tournantes
  - Conclusion
-

# Introduction

---

- Des équations générales ...

# Introduction

---

- Des équations générales ...
- ... appliquées au milieu granulaire ...
  - *nature particulière du milieu*
  - *mécanique des milieux continus sur un milieu discret*

# Introduction

---

- Des équations générales ...
- ... appliquées au milieu granulaire ...
  - *nature particulière du milieu*
  - *mécanique des milieux continus sur un milieu discret*
- ... moyennées selon le principe de Saint-Venant.
  - *intégrations transverses*
  - *couches roulantes ou fixes*
  - *équations "shallow-water"*

## Introduction

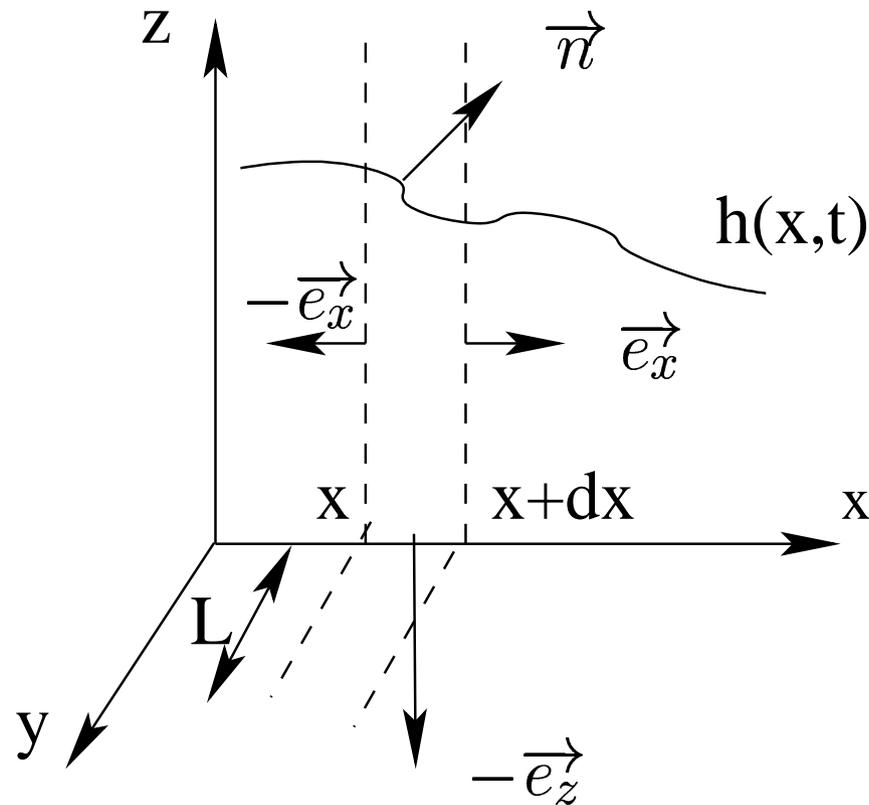
---

- Des équations générales ...
- ... appliquées au milieu granulaire ...
  - *nature particulière du milieu*
  - *mécanique des milieux continus sur un milieu discret*
- ... moyennées selon le principe de Saint-Venant.
  - *intégrations transverses*
  - *couches roulantes ou fixes*
  - *équations "shallow-water"*
  
- Modélisation de la vitesse et du coefficient de friction.

# Équations générales

On considère le volume  $V(t)$  constituant une tranche d'épaisseur  $dx$  et de longueur  $L$  en  $y$ .

Sa frontière  $S(t)$  est constituée dans le plan  $(x,z)$  d'un ensemble de trois surfaces fixes ( $x, x+dx$  et  $z=0$ ) et d'une surface mobile ( $h(x,t)$ ).



# Équations générales

---

- On travaille en 2D.
- On fait l'approximation que les champs  $F(\vec{x}, t)$  auxquels on s'intéresse ne dépendent pas de  $y$  et leur variation s'exprime alors :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} F(r, t) d\tau = \iiint_{V(t)} \frac{\partial F(r, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (F(r, t) \vec{v}) d\tau$$
$$+ \iint_{S(t)} F(r, t) (\vec{V}_s - \vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

## Équations générales

---

En utilisant les formes locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement on peut établir les équations globales suivantes :

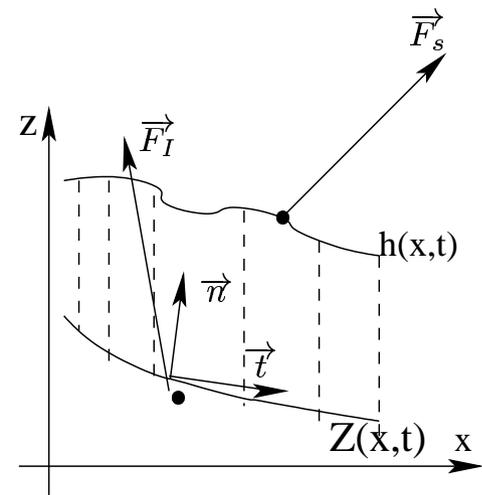
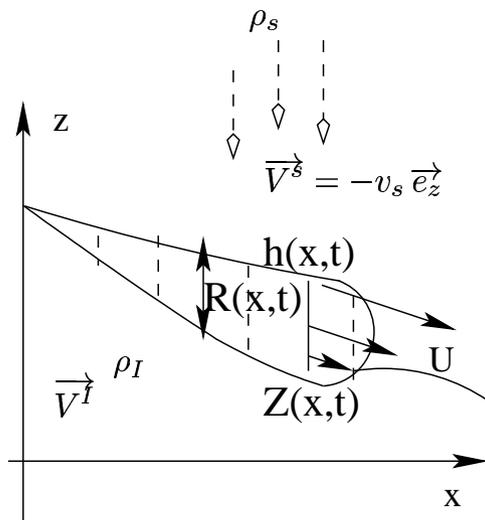
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho v_x dz = \dot{m} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho v_x dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho v_x^2 + \tau_{xx}) dz = [\tau_{xz}]_{0+}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho v_z dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho v_x v_z + \tau_{xz}) dz = -g \int_0^h \rho dz - \dot{p} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} + [\tau_{zz}]_{0+}$$

# Équations appliquées au milieu granulaire

- Écoulements sur des couches minces
- Apparition d'une zone immobile et d'une couche roulante



# Équations appliquées au milieu granulaire

---

Après travail sur les conditions limites propres aux milieux granulaires et en notant  $\vec{v} = (u, w)$  on obtient les équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho u dz = m_s - m_I$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = m_s u_s - m_I u_I - F_x^s + F_x^I$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u w + \tau_{xz}) dz = -g \int_Z^h \rho dz + m_s w_s$$

$$-m_I w_I - F_z^s + F_z^I$$

# Équations appliquées au milieu granulaire

---

Soit encore en utilisant une condition de Mohr-Coulomb :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = m_s u_s - F_x^s - m_I u_I - \frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} T$$

où

$$T = \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho (w - Z' u) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h [\rho u (w - Z' u) + (\tau_{xz} - Z' \tau_{xx})] dz + g \int_Z^h \rho dz - m_s (w_s - Z' u_s) + m_I (w_I - Z' u_I) + (F_z^s - Z' F_x^s)$$

## L'avalanche simple

- On a dans le cas de l'avalanche simple :

$$m_s = 0, \vec{F}^s = \vec{0}, \vec{V}^I = \vec{0} \text{ et } m_I = \rho_I \frac{\partial Z}{\partial t}$$

- ce qui simplifie les équations en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho u dz = -\rho_I \frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = -\frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} T \end{array} \right.$$

$$\text{où } T = g \int_Z^h \rho dz +$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h [\rho u (w - Z' u) + (\tau_{xz} - Z' \tau_{xx})] dz + \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho (w - Z' u) dz}_{\text{termes d'ordre supérieur}}$$

# L'avalanche simple

---

● On définit

●  $R = \int_Z^h \frac{\rho}{\rho_I} dz$

●  $q = \int_Z^h \frac{\rho}{\rho_I} u dz$

●  $E = \int_Z^h \frac{1}{\rho_I} (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz$

# L'avalanche simple

---

● On définit

●  $R = \int_Z^h \frac{\rho}{\rho_I} dz$

●  $q = \int_Z^h \frac{\rho}{\rho_I} u dz$

●  $E = \int_Z^h \frac{1}{\rho_I} (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz$

● et on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} g R \end{cases}$$

## L'avalanche simple

---

En prenant une vitesse linéaire de gradient  $\Gamma$  constant  $v = \Gamma R$ ,  
 $q(R) = \Gamma \frac{R^2}{2}$  et  $E(R) = \Gamma^2 \frac{R^3}{3}$ , on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + R \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial t} + (R + d) \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\mu_I + Z'}{1 + Z'^2} + \nu \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \end{array} \right.$$

où  $\nu$  est un facteur de dissipation.

## L'avalanche tournante

---

En gardant les mêmes notations et en prenant cette fois

$$m_s = 0, \vec{F}^s = \vec{0}, \vec{V}^I = \vec{r} \times \vec{\omega} = \Omega Z(x, t) \vec{e}_x - x \Omega \vec{e}_z \text{ et}$$

$m_I = \rho_I \left( \frac{\partial Z}{\partial t} + u_I Z' - w_I \right) = \rho_I \left( \frac{\partial Z}{\partial t} + \Omega(x + Z Z') \right)$ , on obtient le nouveau système :

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + R \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial t} - \Omega(x + Z Z') \\ \frac{\partial R}{\partial t} + R \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\mu_I + Z'}{1 + Z'^2} + \nu \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \end{cases}$$

où  $\nu$  est un facteur de dissipation.

## Le coefficient de friction

---

Il ne reste plus qu'à modéliser le coefficient de friction  $\mu$ .

- Pour  $Z' > \mu_s$  on a  $\mu_I = \mu_s$ .
- Pour  $Z' < \mu_s$  on propose deux modèles différents :
  - $\mu_I = -\frac{\partial Z}{\partial x}$
  - $\mu_I = \mu_s R - \frac{\partial Z}{\partial x}$

## Schéma numérique

---

Le schéma numérique que nous avons utilisé pour résoudre numériquement les équations obtenues est d'utiliser un schéma explicite pur du type :

$$R_i^{n+1} = \Delta t \left( R_i^n + \frac{R_{i+1}^n - R_{i-1}^n}{2 \times \Delta x} + \nu \frac{R_{i+1}^n - 2R_i^n + R_{i-1}^n}{2\Delta x} \right).$$

Le facteur  $\nu$  joue ici le rôle de stabilisateur du schéma.

La difficulté principale réside dans l'expression des conditions limites ; ainsi après plusieurs essais la meilleure solution s'avère être :

$$R_{nx}^{n+1} = \Delta t \left( -\frac{R_{nx-1}^n + R_{nx}^n}{2} \times \frac{R_{nx}^n - R_{nx-1}^n}{2\Delta x} \right),$$

avec  $L = nx\Delta x$ .

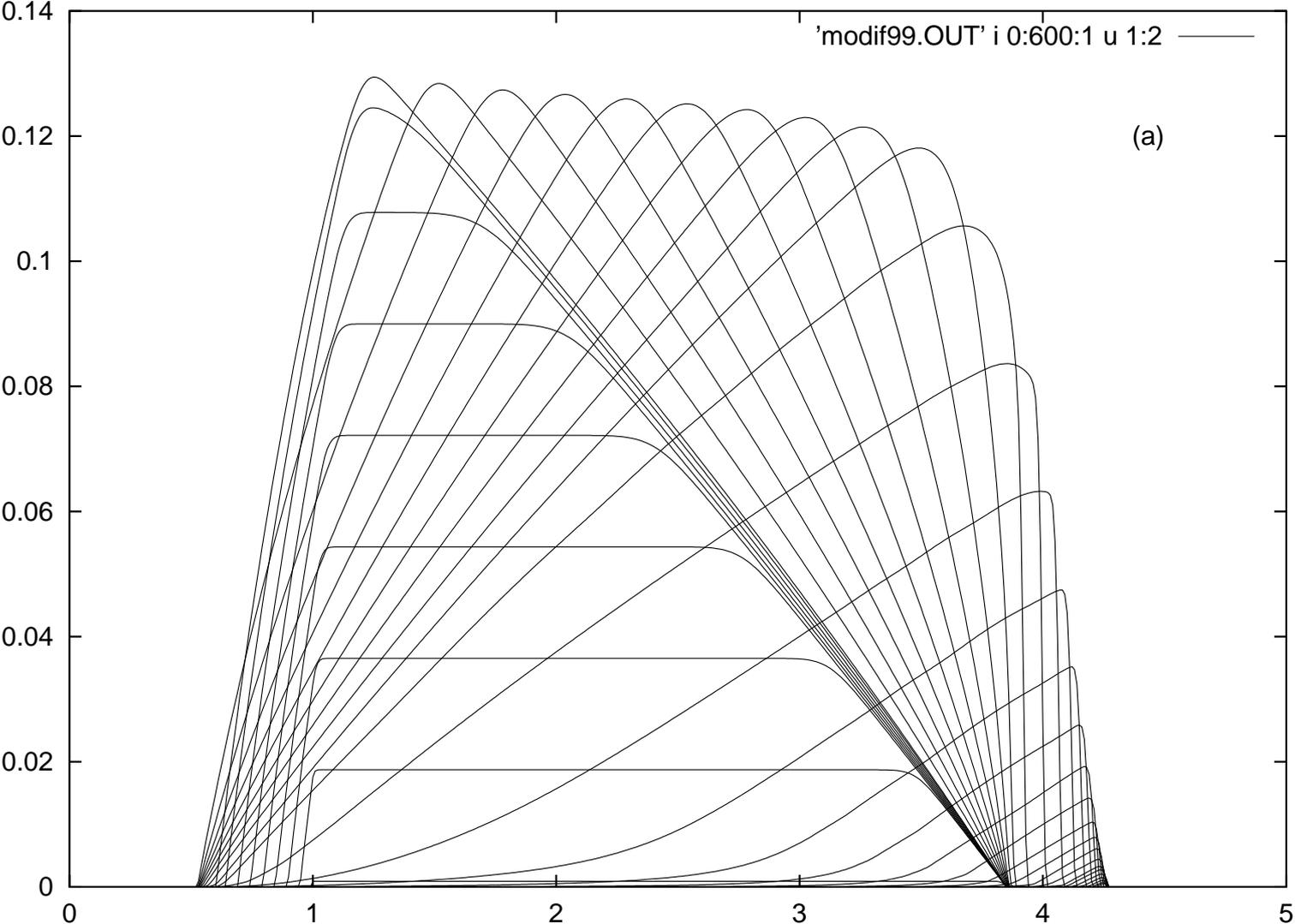
## Avalanche sur fond rugueux

---

### Avalanche sur fond rugueux

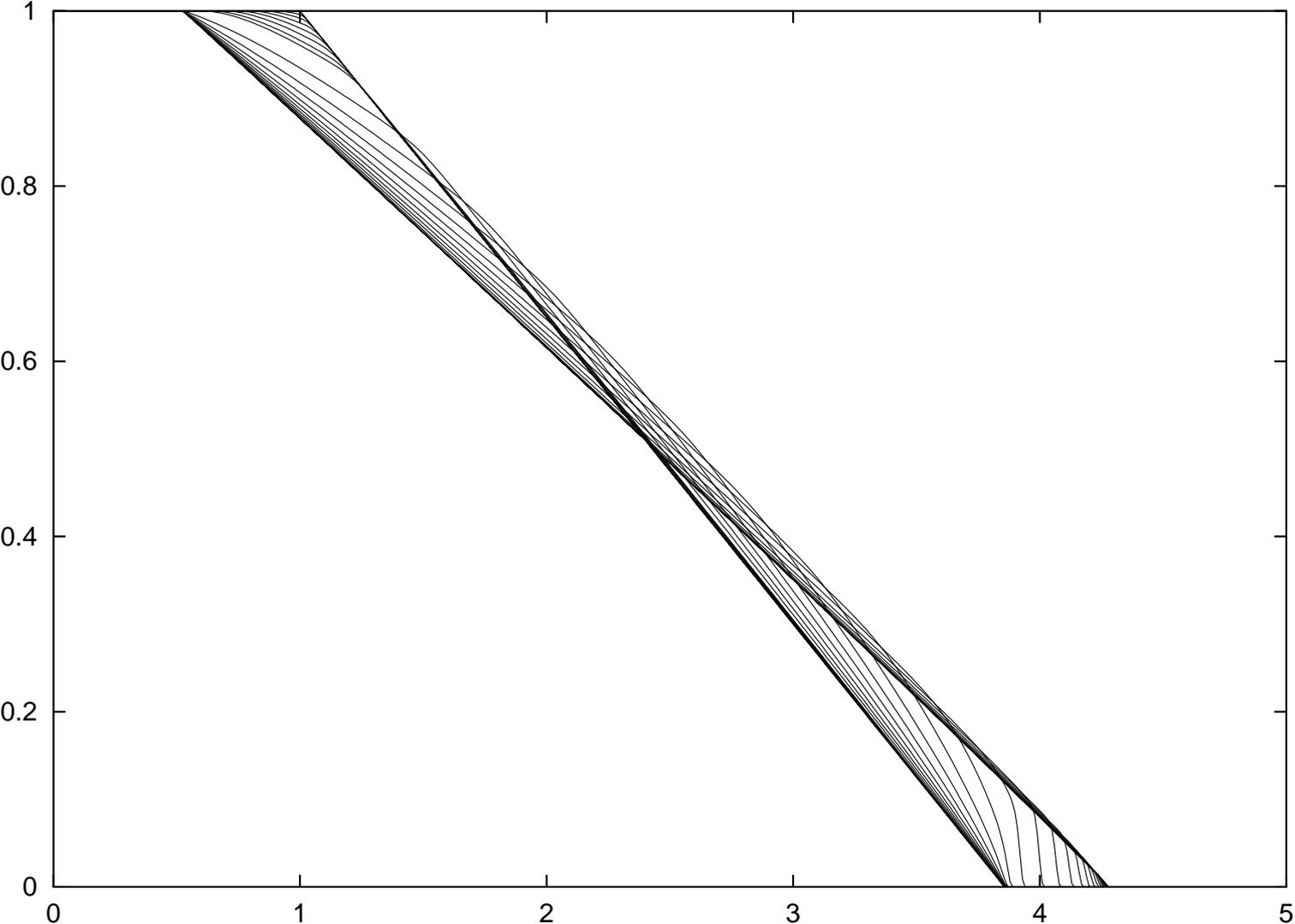
On voit apparaître trois actes, comme décrit par le modèle de Boutreux, Raphael et deGennes.

# Avalanche sur fond rugueux



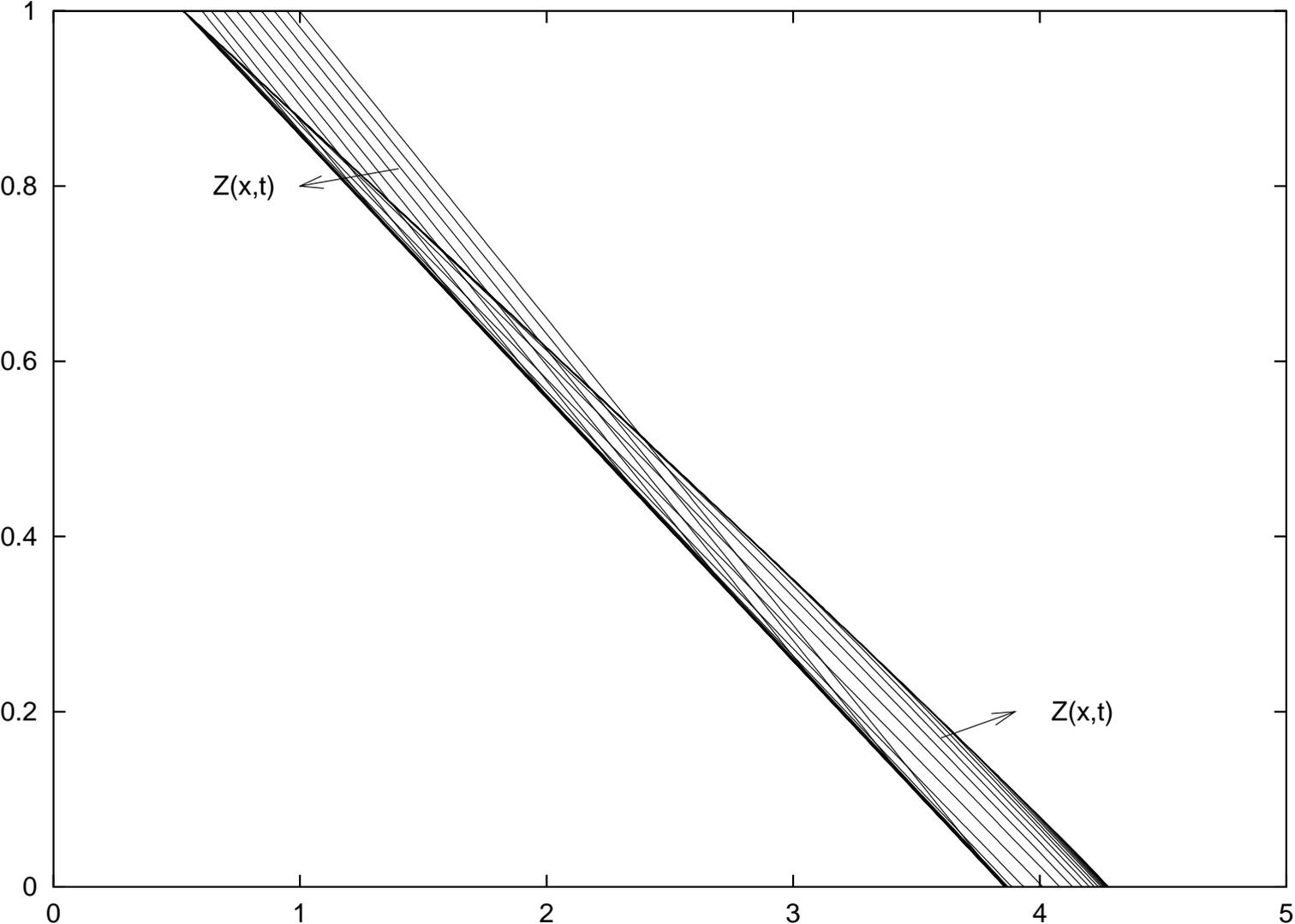
Evolution de R

# Avalanche sur fond rugueux



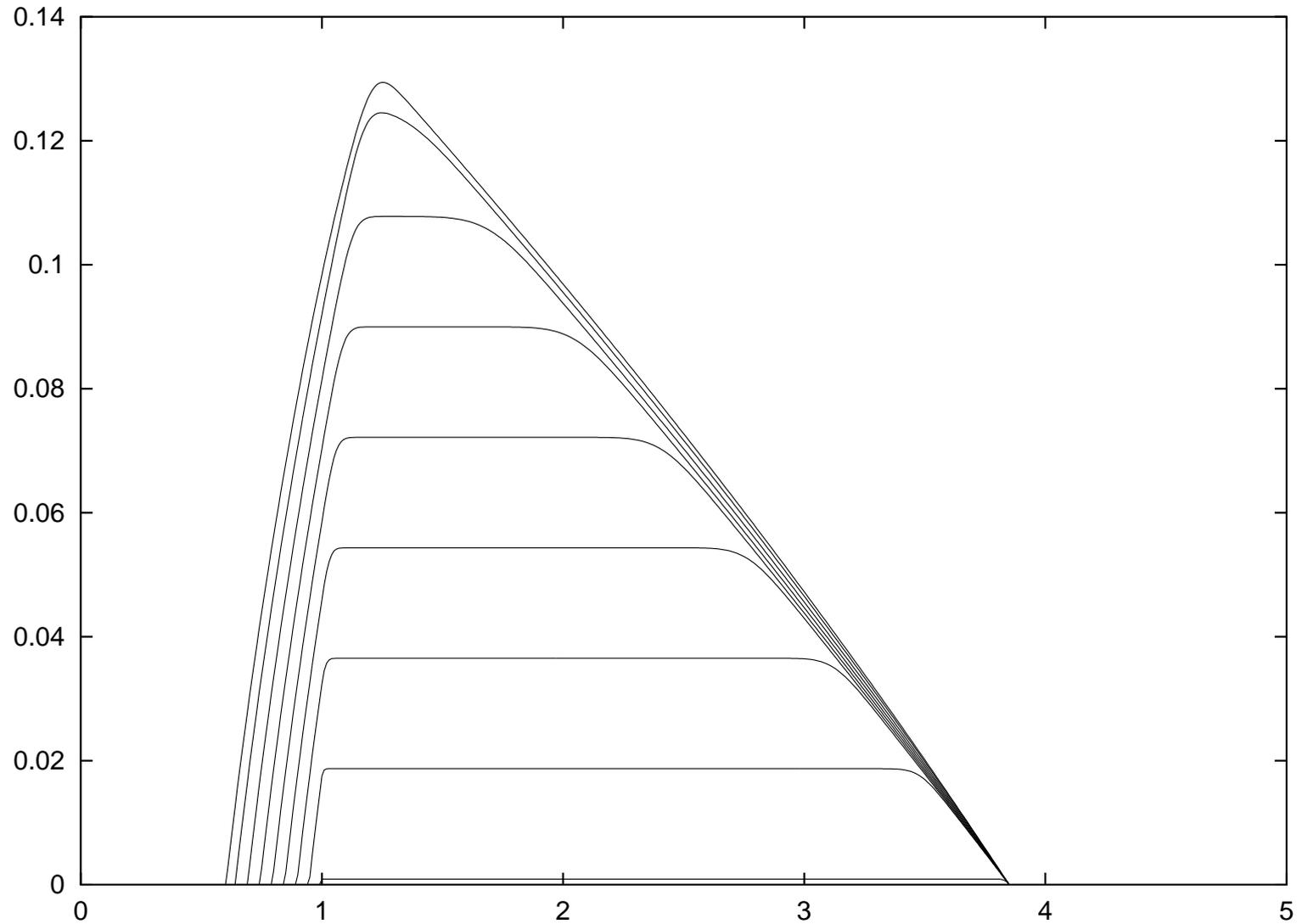
Evolution de h

# Avalanche sur fond rugueux



Evolution de  $Z$

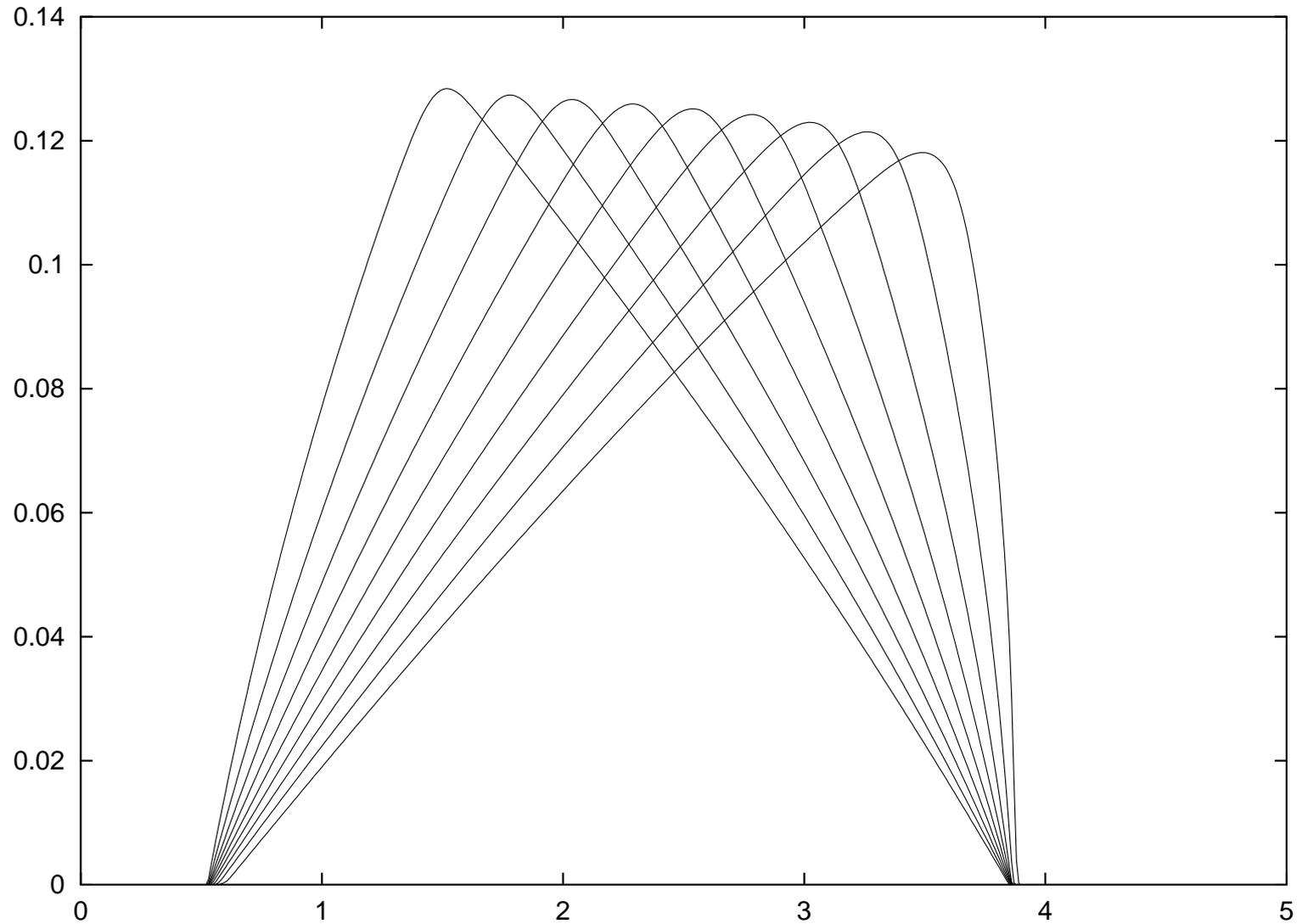
# Avalanche sur fond rugueux



ACTE I de R

# Avalanche sur fond rugueux

---

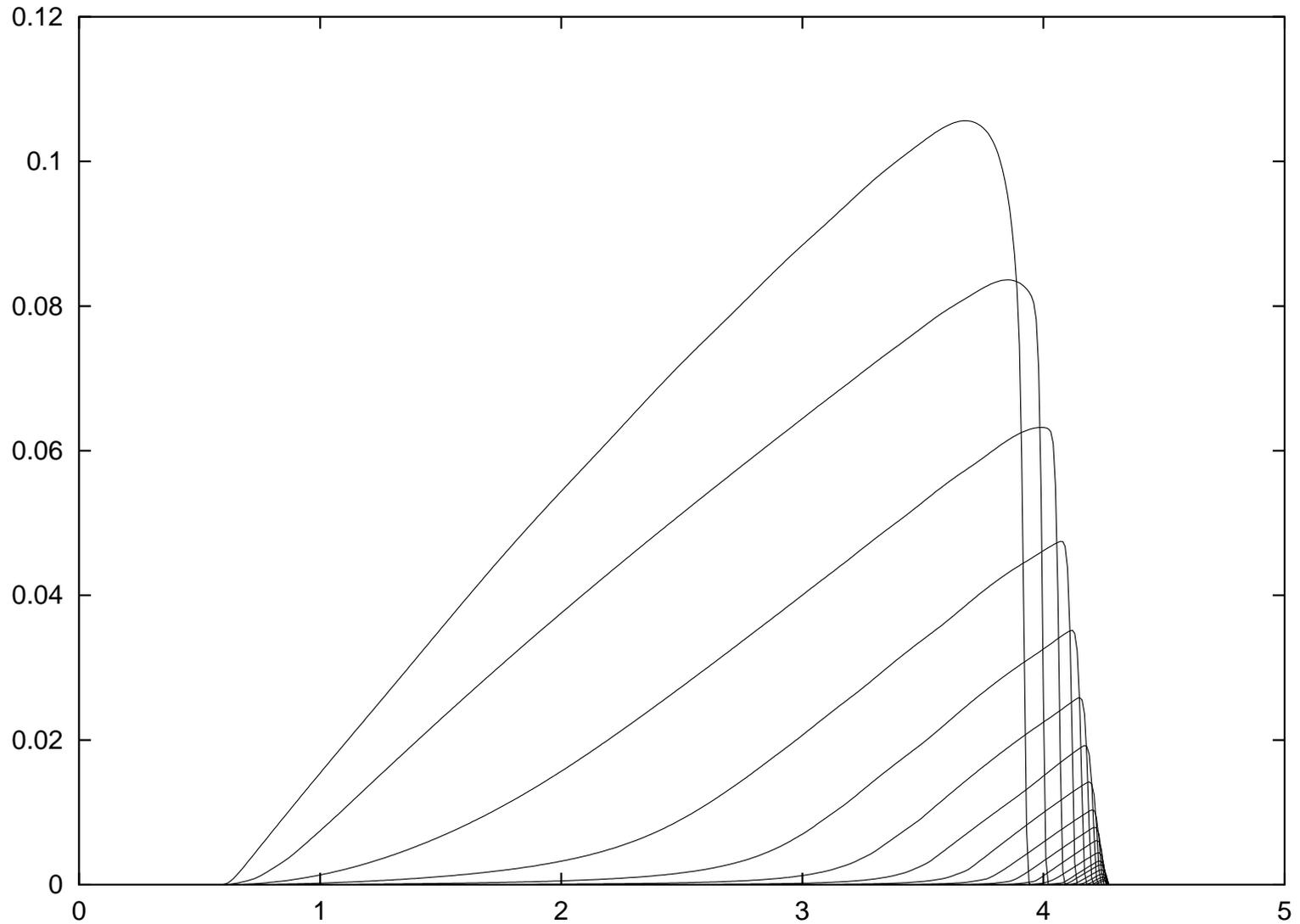


---

ACTE II de R

# Avalanche sur fond rugueux

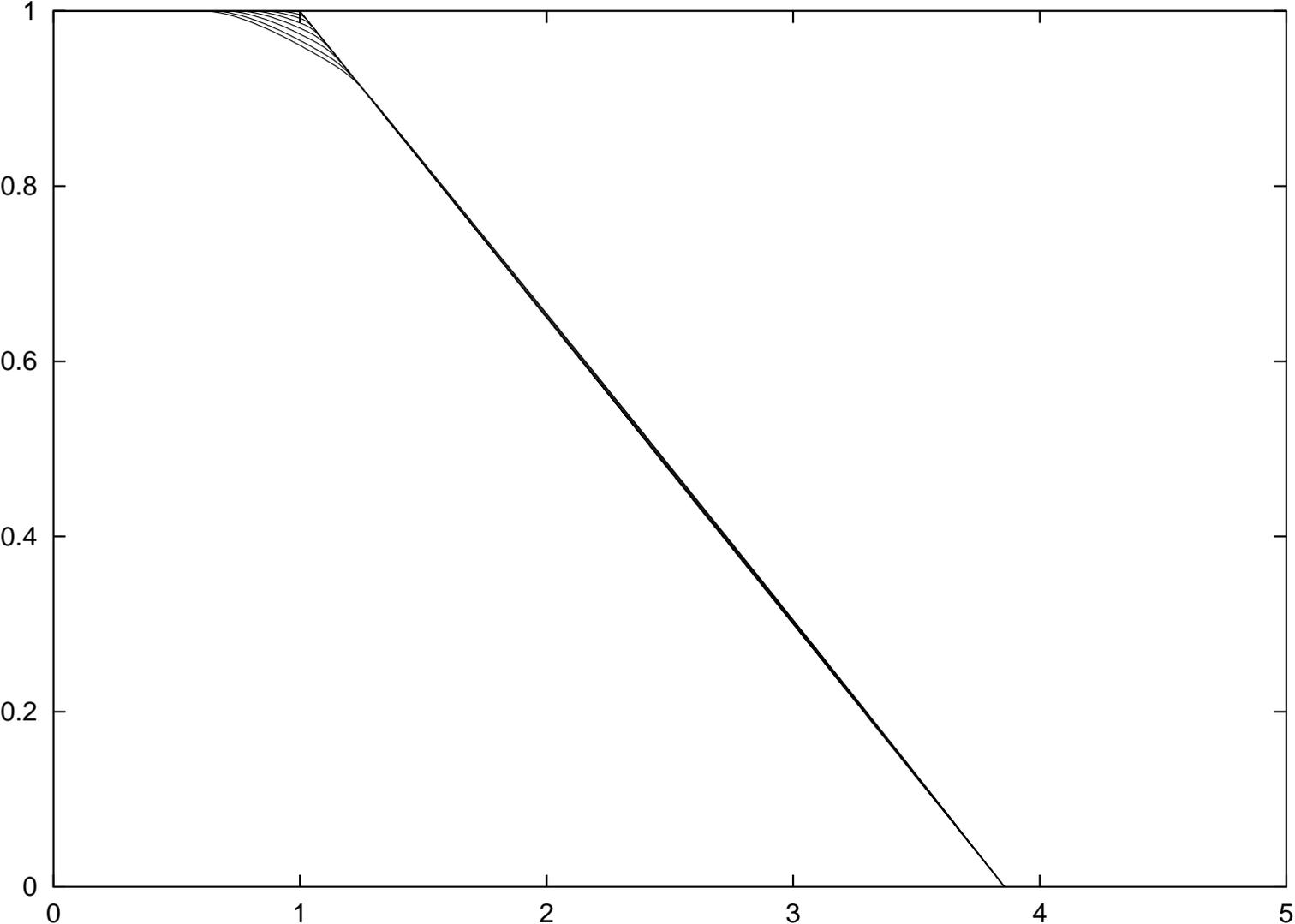
---



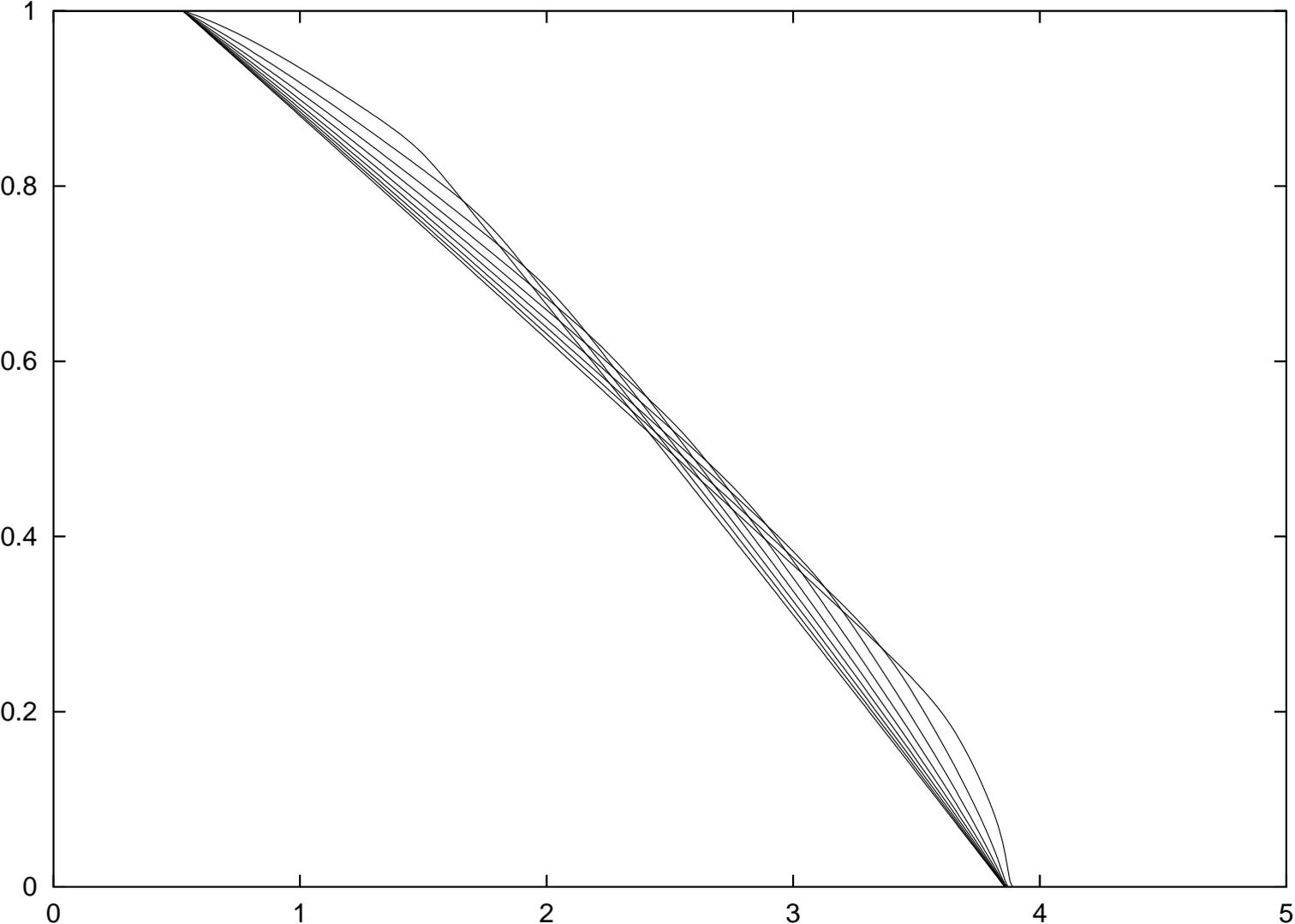
---

ACTE III de R

# Avalanche sur fond rugueux



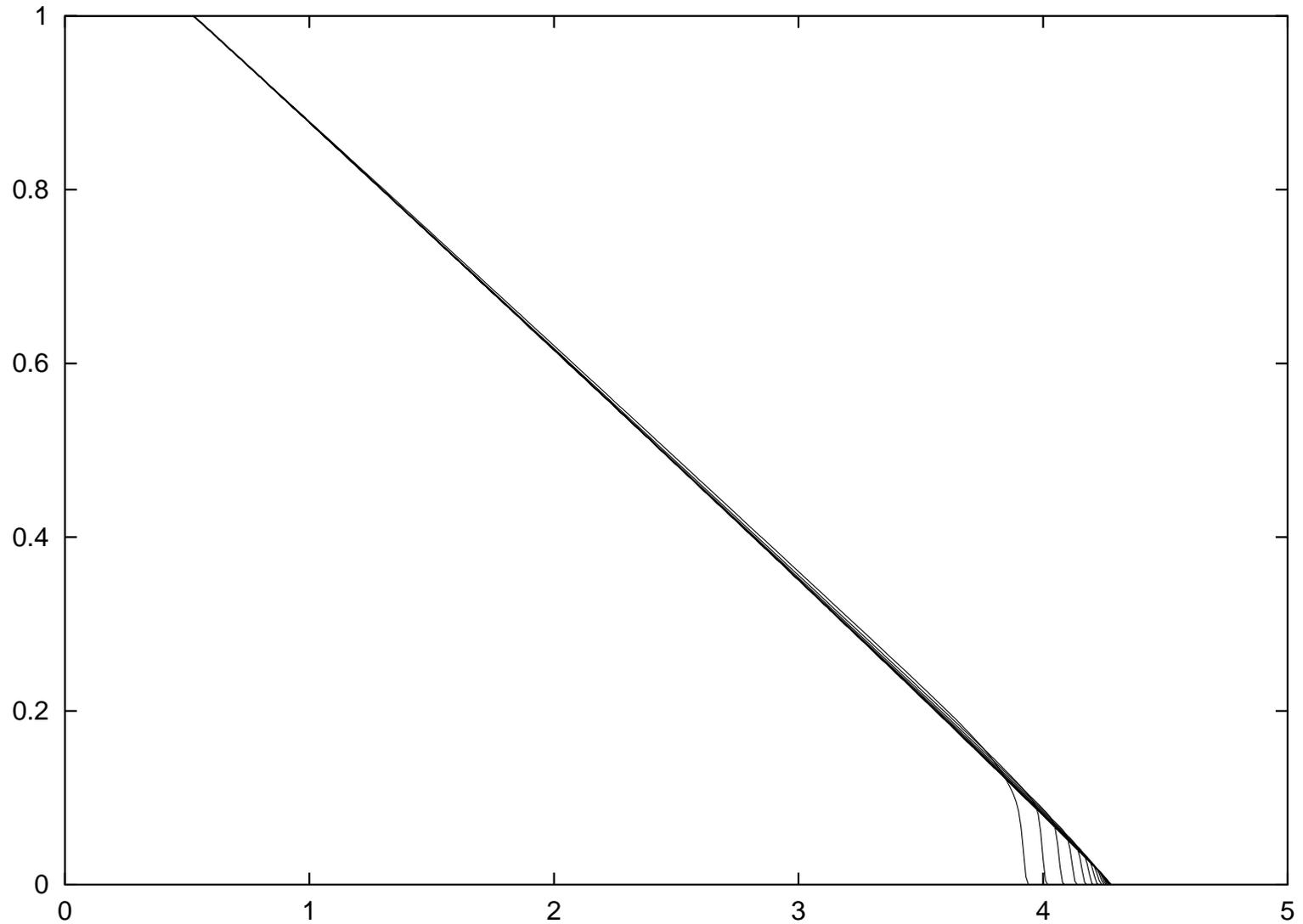
# Avalanche sur fond rugueux



ACTE II de h

# Avalanche sur fond rugueux

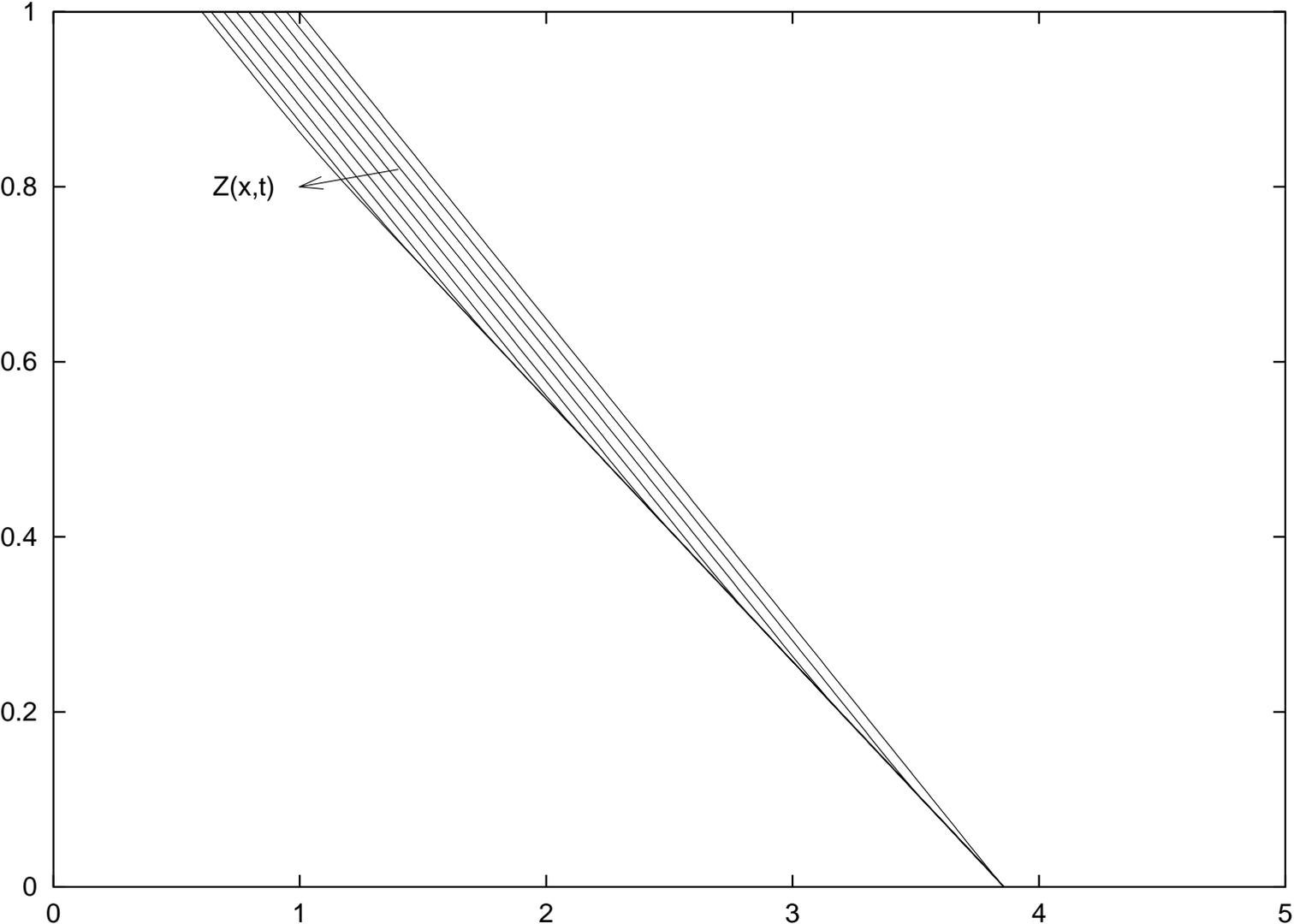
---



---

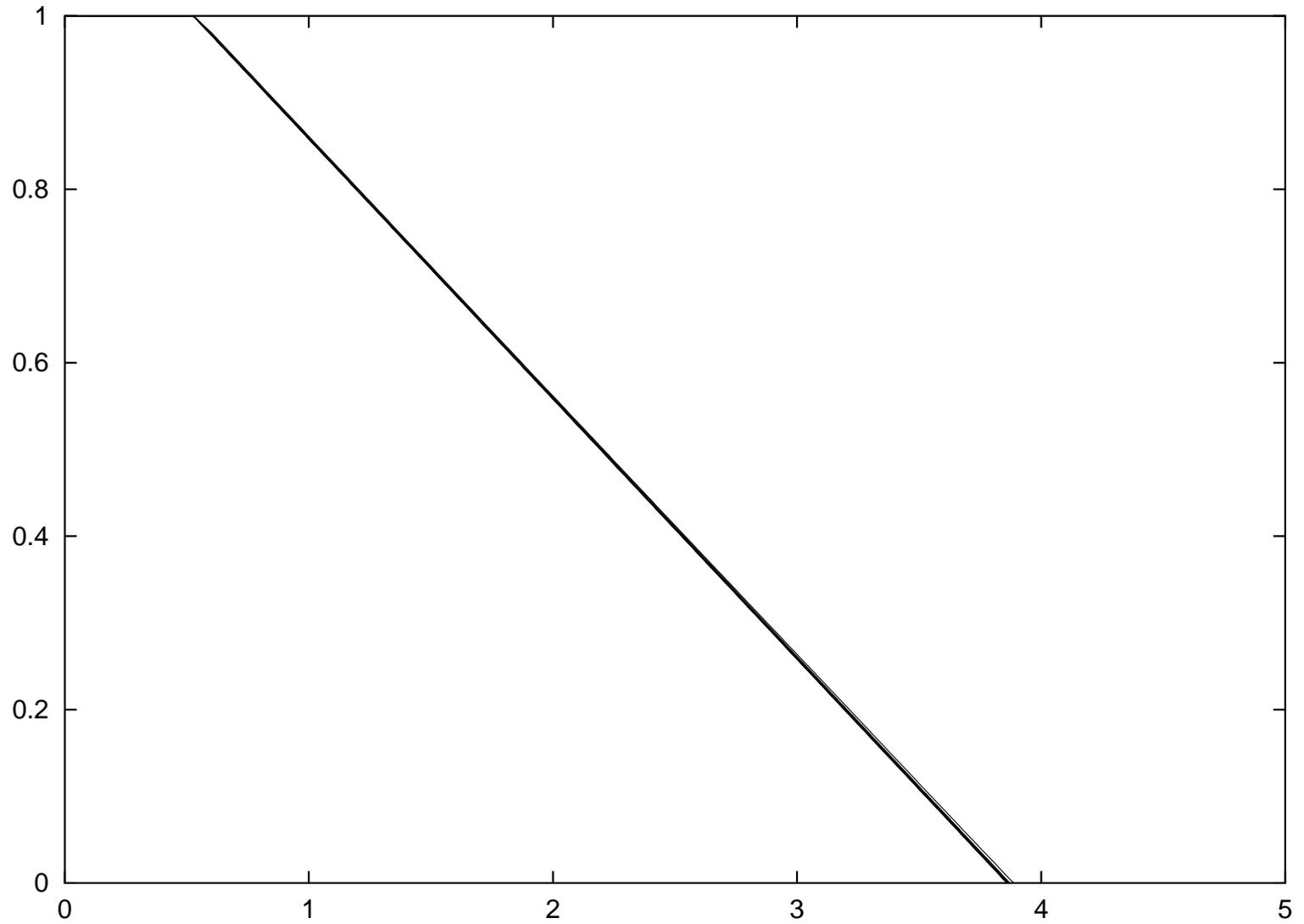
ACTE III de h

# Avalanche sur fond rugueux



# Avalanche sur fond rugueux

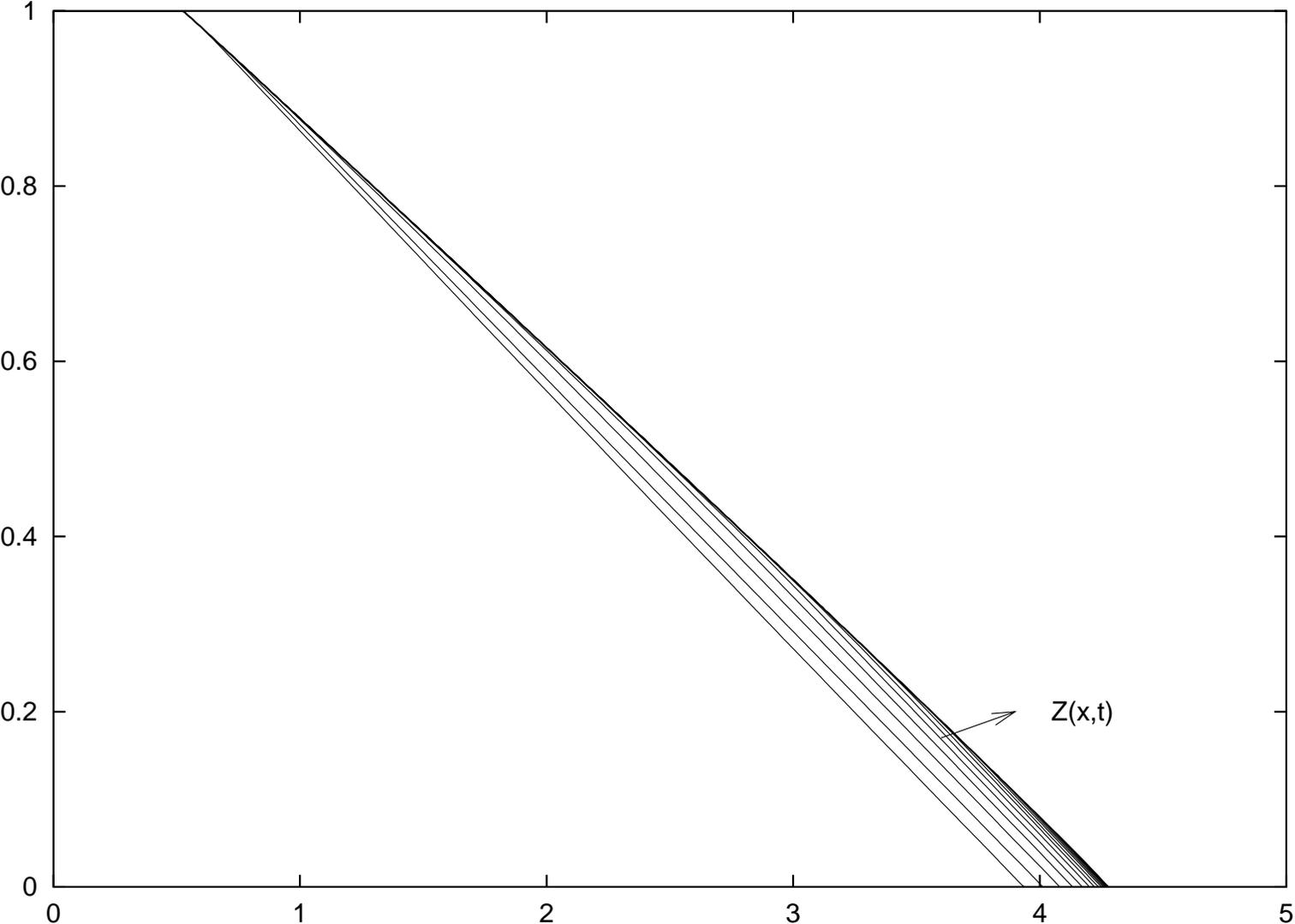
---



---

ACTE II de Z

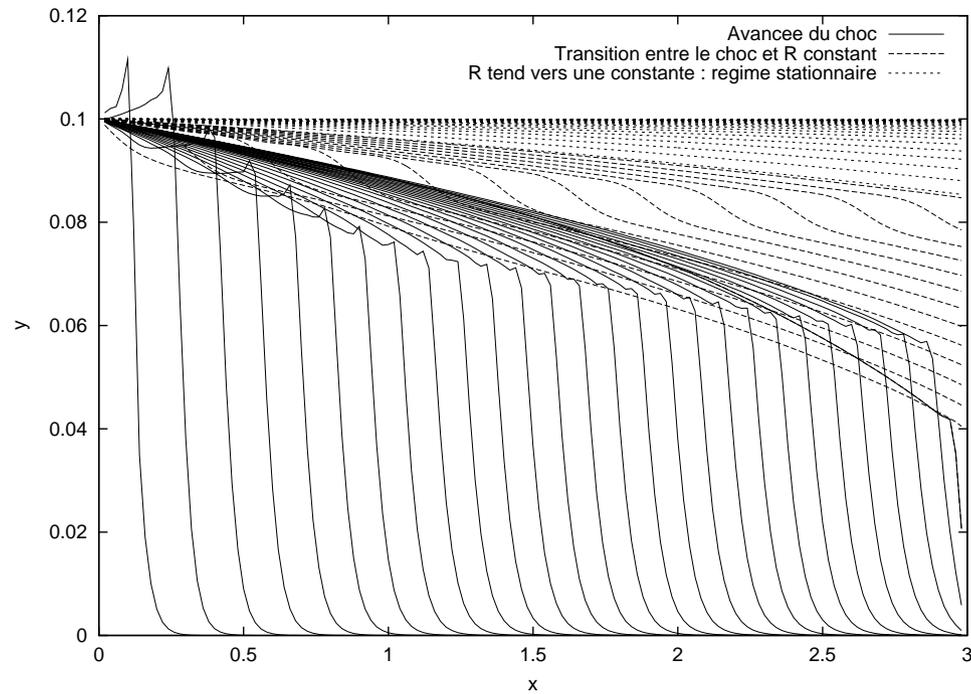
# Avalanche sur fond rugueux



## Avalanche en sortie libre

# Avalanche alimentée en sortie libre

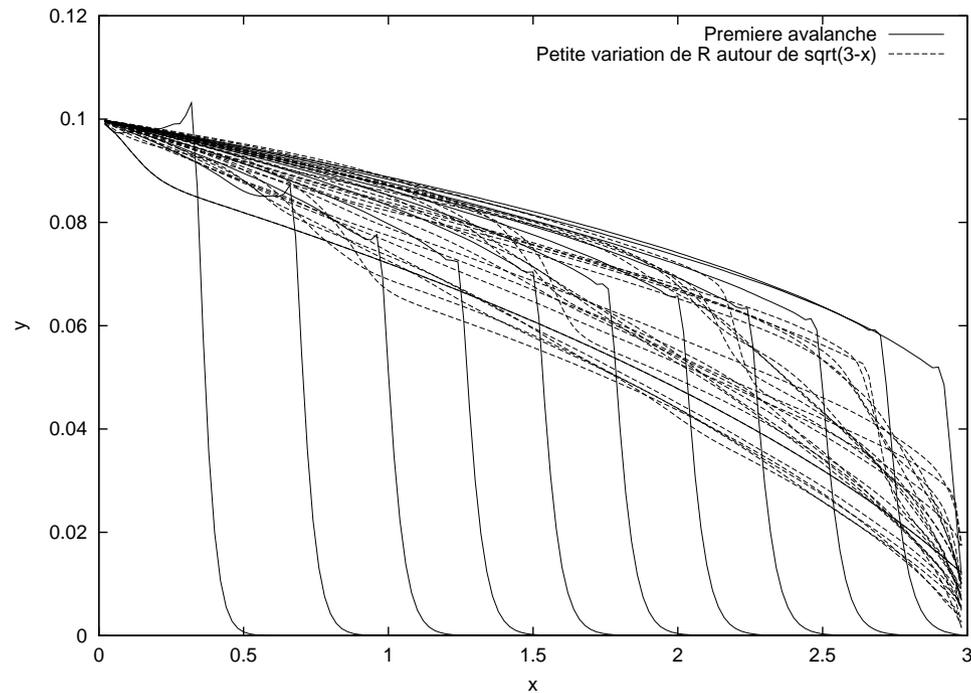
Avancée d'un choc puis apparition d'un mode stationnaire.



# Avalanche contre un mur

## Avalanche contre un mur

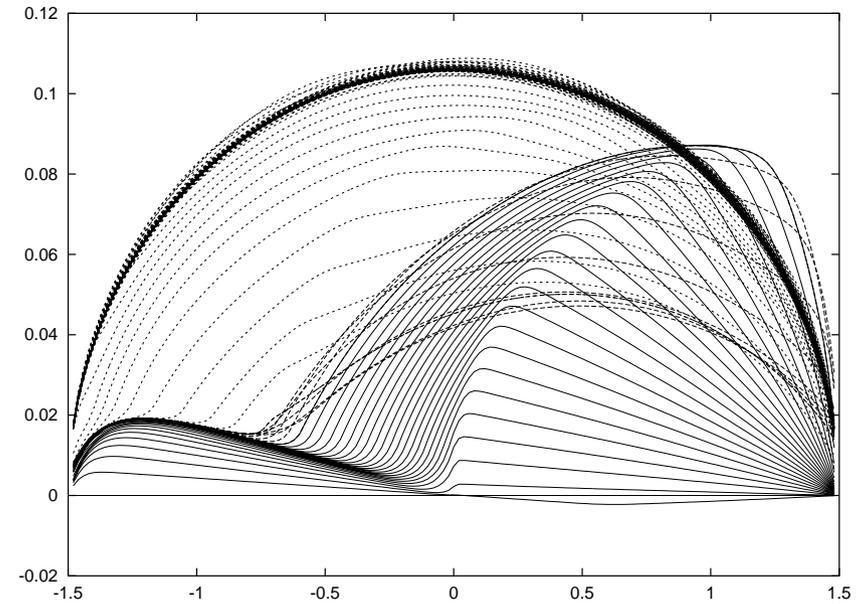
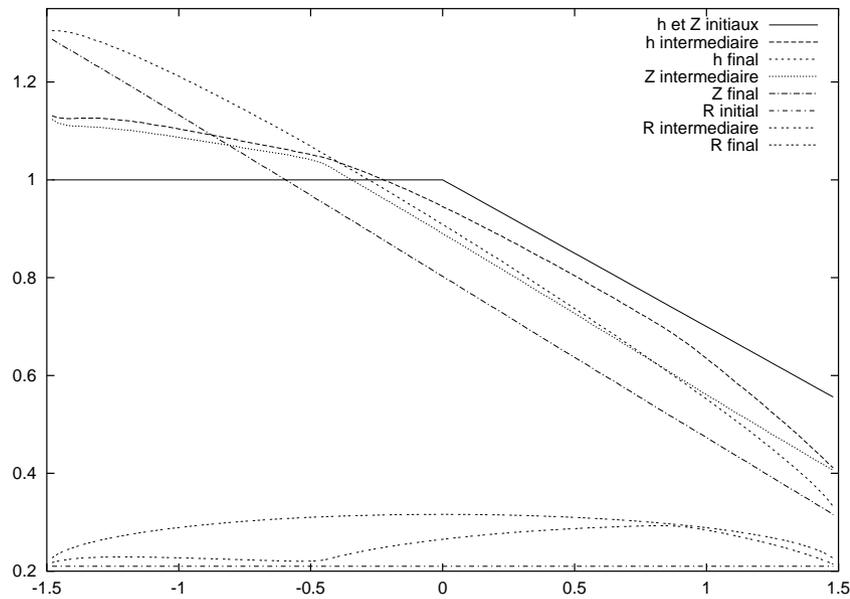
La quantité de grains roulant  $R(x,t)$  prend, après une première avalanche une forme en  $\sqrt{L-x}$ .



# Avalanche dans un tambour tournant

## Avalanche tournante

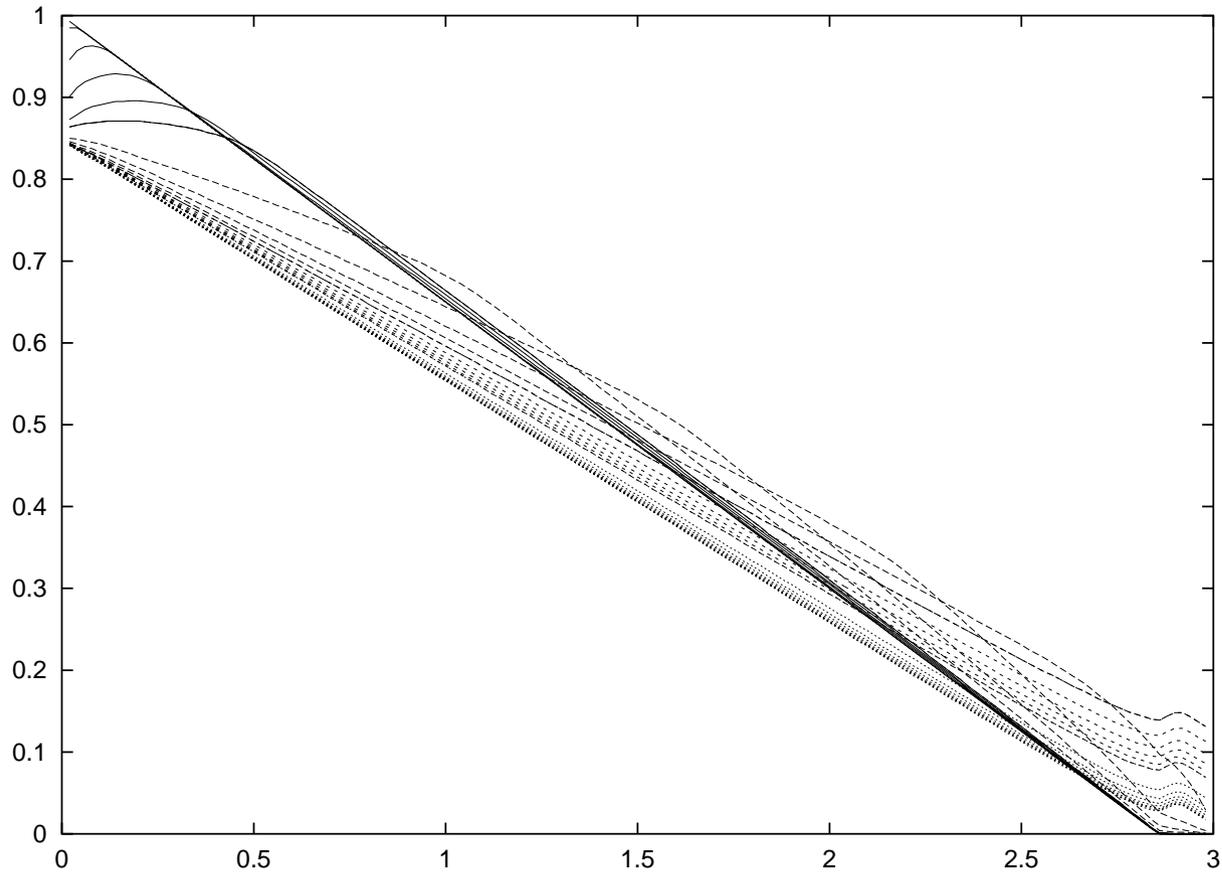
Apparition d'un mode stationnaire.



## Influence du modèle du coefficient de friction

---

Si le modèle de  $\mu$  ne comporte pas de terme de friction, des instabilités apparaissent, ainsi que la formation d'un tas près du mur.



## Conclusion

---

- Les simulations correspondent bien et aux expériences, et aux théories.
- Il aurait été intéressant d'utiliser des modèles plus complexes, mais cela pose des problèmes au niveau des conditions limites.
- Il est tout à fait possible de se servir de cette base pour expérimenter de nouvelles fermetures de vitesse ou des nouveaux modèles de coefficient de friction.