

# Simulation de la migration d'une dune sous un vent cisailé constant

Sébastien PEARRON

## Résumé

L'avancée des dunes de sable est actuellement un sujet très étudié par les scientifiques. Un des enjeux de la compréhension de ces phénomènes physiques est la lutte contre la désertification de certaines régions d'Afrique. Cette étude mêle les écoulements fluides et les milieux granulaires. La difficulté de cette étude vient de la non linéarité des équations de Navier-Stokes et de l'interaction du fluide avec un milieu granulaire.

On se donne une forme de sol  $f(x, t)$ . L'écoulement considéré est un écoulement cisailé (voir figure 1).

À partir de la forme de la bosse, on calcule l'écoulement autour de celle-là. Cet écoulement induit des forces sur la bosse de sable qui s'érode et change de forme. On calcule donc le nouvel écoulement autour de la bosse, le nouveau frottement qui s'exerce sur elle et ainsi de suite.

On a étudié les deux cas de sol dur ou meuble.

On effectue ici de grandes simplifications. On se place en écoulement laminaire, alors que l'écoulement est turbulent dans la réalité. On considère que la viscosité est constante. On se place dans le cas particulier d'un fluide parfait ( $Re = \infty$ )

L'écoulement est supposé stationnaire.

Deux types de résolution ont été effectuées. Une première est issue de la linéarisation des équations. La seconde est la résolution des équations non linéaires.

Toutes ces simplifications sont certes assez importantes mais nous permettent de nous placer dans un cas que l'on peut résoudre relativement facilement.

Pierre-Yves Lagrée a implémenté les équations en langage C, et ce sont ses programmes que j'ai utilisés pour faire des expériences numériques.

## 1 Calcul de l'écoulement autour d'une bosse fixe

On utilise les équations de Navier-Stokes stationnaires.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$
$$\rho(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2})$$

On choisit  $x = L \bar{x}$ ,  $y = L \bar{y}$ ,  $u = U_0 \bar{u}$ ,  $v = U_0 \bar{v}$ ,  $p = \rho U_0^2 \bar{p}$ .

On a alors :

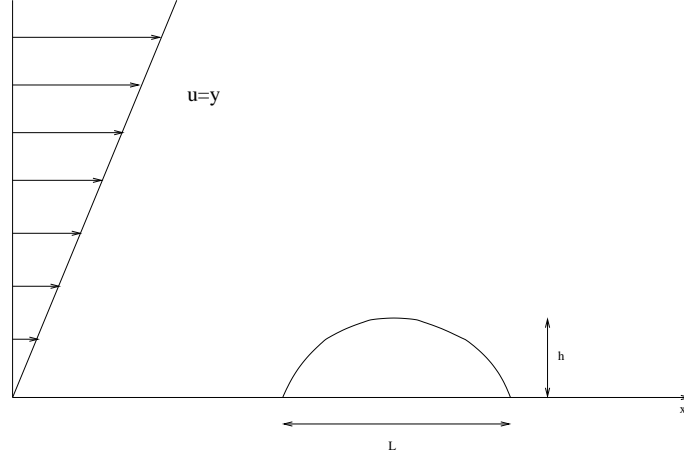


FIG. 1 – Ecoulement cisailé

$$\left( \frac{\rho U_0^2}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\rho U_0^2}{L} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\rho U_0^2}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu U_0}{L^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

et

$$\left( \frac{\rho U_0^2}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\rho U_0^2}{L} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\rho U_0^2}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu U_0}{L^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

Avec  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  et  $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$ , on aboutit aux équations suivantes :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

$$\left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

On se place dans le cas où le nombre de Reynolds est grand et où les effets visqueux restent confinés dans une couche près de la paroi d'épaisseur  $\varepsilon$ . (2)

C'est dans cette couche que la vitesse est perturbée par la bosse. La bosse est donc comprise dans cette couche dans notre modèle.

$$\tilde{u} = \tilde{y}$$

$$\bar{y} = \varepsilon \tilde{y}, \bar{u} = \varepsilon \tilde{u}, \bar{x} = \lambda \tilde{x}, \bar{v} = V \tilde{v}, \bar{p} = P \tilde{p}.$$

L'équation de conservation de la masse donne :

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{V}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

$$\text{et donc } \bar{v} = \frac{\varepsilon^2}{\lambda} \tilde{v}$$

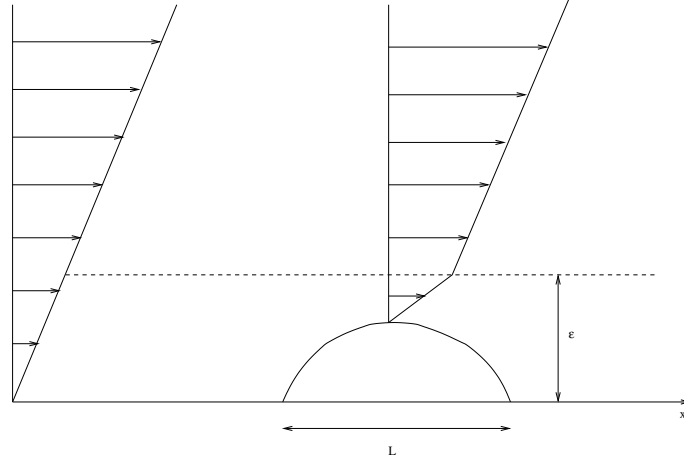


FIG. 2 – Ecoulement perturbé par la bosse

L'équation suivant x s'écrit maintenant :

$$\frac{\epsilon^2}{\lambda} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\epsilon^2}{\lambda} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{P}{\lambda} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\epsilon}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\epsilon}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right).$$

On a donc par moindre dégénérescence  $\bar{P} = \epsilon^2 \tilde{P}$

L'équation suivant y s'écrit maintenant :

$$\frac{\epsilon \epsilon^2}{\lambda} \frac{1}{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\epsilon^2}{\lambda} \frac{\epsilon^2}{\lambda} \frac{1}{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{P}{\epsilon} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\epsilon^2}{\lambda} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\epsilon^2}{\lambda} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right).$$

On a supposé que les effets visqueux sont importants dans la couche limite et donc par moindre dégénérescence :

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} &\simeq \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{\epsilon^2 \tilde{u}}{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} &\simeq \frac{1}{\epsilon Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \end{aligned}$$

$$\epsilon = \lambda^{1/3} Re^{-1/3}$$

On a donc l'équation suivant la direction x :

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re^{2/3}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

Or,  $Re \rightarrow \infty$  et on a alors :

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{d}{dx} \tilde{p} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

On a de même l'équation suivant la direction y :

$$\frac{1}{Re^{2/3}} \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) = -\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{p} + \frac{1}{Re^{4/3}} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{Re^{2/3}} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

Et toujours parce que  $Re \rightarrow \infty$  on a :

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \\ 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \end{cases} \quad (1)$$

Les conditions limites sont :

$$\text{À la paroi, il y a adhérence. } \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y} = f(\tilde{x})) = 0, \quad \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y} = f(\tilde{x})) = 0,$$

En amont de la bosse, l'écoulement est cisailé :

$$\tilde{u}(\tilde{x} \rightarrow -\infty, \tilde{y}) = \tilde{y}, \quad \tilde{v}(\tilde{x} \rightarrow -\infty, \tilde{y}) = 0.$$

Loin en haut de la bosse, on a :  $\tilde{u} = \tilde{y}$ .

## 2 Linéarisation des équations

Sur une petite échelle de longueur, la hauteur de la couche limite peut être considéré comme constante. On peut alors s'intéresser au cas d'une bosse de hauteur faible  $\eta$  ( $\eta \ll 1$ ). On a alors

$$\tilde{u} = \tilde{y} + \eta \tilde{u}_1$$

$$\tilde{v} = \eta \tilde{v}_1$$

$$\text{et par suite } \tilde{\tau} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = 1 + \eta \tilde{\tau}_1$$

On se place dans l'espace de Fourier.

Pour chaque mode,  $f(x) = \eta f_k(\tilde{x}) e^{-\omega t}$  avec  $f_k(\tilde{x}) = FT[f(\tilde{x})]$ , FT désignant la transformée de Fourier.

On pose alors :

$$\tilde{u} = \tilde{y} + \eta \Phi'(\tilde{y}) f_k(\tilde{x}) e^{-\omega t}, \quad \tilde{v} = ik\eta \Phi(\tilde{y}) f_k(\tilde{x}) e^{-\omega t} \text{ et } \tilde{p} = \eta \tilde{p}_1 f_k(\tilde{x}) e^{-\omega t}.$$

On substitue dans l'équation ... avec  $\eta \ll 1$  et on ne conserve que les termes d'ordre au plus un en  $\eta$  dans l'équation.

On a alors :

$$-\tilde{y} ik \Phi'(\tilde{y}) + ik \Phi(\tilde{y}) = ik \tilde{p}_1 + \Phi'''(\tilde{y})$$

$$\text{À la paroi on a : } \Phi'''(0) = -ik \tilde{p}_1(0) = -ik \tilde{p}_1(\tilde{y}) = -ik \tilde{p}_1$$

On dérive l'équation précédente et cela élimine la pression car elle ne dépend pas de  $\tilde{y}$  et on obtient :

$$-\tilde{y} ik \Phi''(\tilde{y}) = \Phi''''(\tilde{y})$$

La fonction d'Airy Ai est solution de l'équation  $f''(x) - xf(x) = 0$ .

On a donc en tenant compte de  $\Phi'''(0) = -ik \tilde{p}_1$  :

$$\Phi''(\tilde{y}) = (-ik)^{2/3} \tilde{p}_1 Ai(\tilde{y}(-ik)^{1/3}) / Ai'(0)$$

$$\text{Sachant que } \int_{-\infty}^{+\infty} Ai(x) dx = 1/3$$

$$\Phi'(\infty) = (-ik)^{1/3} \tilde{p}_1 / (3Ai'(0)) = 1$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= (-ik)^{-1/3} (3Ai'(0)) = 1 \\ \text{et } \Phi''(0) &= (-ik)^{2/3} \tilde{p}_1 Ai(0) / Ai'(0) \\ \text{On a alors } FT[\tilde{p}] &= (3Ai'(0))(-ik)^{-1/3} FT[f] \end{aligned}$$

La forme linéarisée de la perturbation du frottement pariétal  $\tilde{\tau}_1$  est alors :

$$\begin{aligned} FT[\tilde{\tau}_1] &= (-ik)^{2/3} \tilde{p}_1 Ai(0) / Ai'(0) \\ \text{et } FT[\tilde{\tau}_1] &= FT[f] (3Ai(0)) (-ik)^{1/3} \end{aligned}$$

$$FT[\tau] = (3Ai(0))(-ik)^{1/3} FT[f]. \quad (2)$$

On utilise la transformée de Fourier rapide et le programme de Numerical Recipes pour résoudre le problème de la bosse fixe. Les calculs sont assez courts d'une façon générale. Cependant, pour des valeurs de  $Vm^{3/4}$  grandes, *i.e.* de l'ordre de 30, les calculs se font plus difficilement.

### 3 Évolution de la dune

On a précédemment calculé l'écoulement autour d'une dune de forme donnée, et on fait désormais évoluer la dune dans le temps. On écrit tout d'abord la conservation de la masse de la dune :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (3)$$

où  $q$  est le flux de matière (de sable ici) transporté suivant une ligne verticale par unité de temps.

Intuitivement, plus la vitesse de l'écoulement est grande plus le flux de matière entraînée va être important. On peut penser que le flux de matière entraînée est proportionnel au frottement. On peut alors modéliser notre problème par  $q = \alpha\tau$ . Cependant, on se rend bien compte de par notre expérience la plus prosaïque si la vitesse du vent est trop faible il ne va pas y avoir de sable entraîné.

Ainsi, une estimation de la vitesse de la dune ( $\frac{\partial f}{\partial t}$ ) est le rapport  $\frac{q}{f}$ . On utilise aussi une relation reliant la valeur du frottement pariétal ( $\tau = (\frac{\partial u}{\partial y})_{y=f(x)}$ ) au flux de matière entraînée

$$\frac{\partial q}{\partial x} + Vq = V\varpi(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}). \quad (4)$$

et la fonction  $\varpi(x)$  est telle que si  $x < 0$ ,  $\varpi(x) = 0$  et si  $x > 0$ ,  $\varpi(x) = x$ .

Le terme  $\Lambda \frac{\partial f}{\partial x}$  traduit le fait que si la pente est positive il faut exercer une contrainte supérieure pour arracher des particules, et que si celle-ci est négative les grains de sable tombent plus facilement sous le simple effet de la gravité et donc la force à fournir est moins importante.

L'équation 4 s'écrit aussi :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{q_{sat} - q}{l_{sat}} \quad (5)$$

avec  $q_{sat} = \varpi(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x})$

Cela traduit le fait que le flux  $q$  de matière transportée atteint une valeur maximale (devient saturé) après une distance caractéristique  $l_{sat}$ , ce que l'on voit sur la figure 3.

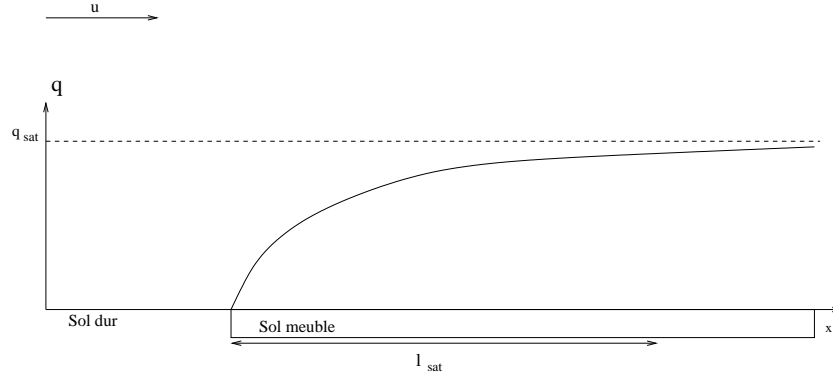


FIG. 3 – Comparaison de la forme finale de dunes ayant la même masse et des formes initiales différentes.

## 4 Résultats pour les équations linéarisées et un sol dur

### 4.1 Invariance

On se rend compte que la forme finale de la dune ne dépend pas de la forme initiale mais dépend de la masse initiale de la dune. Ainsi, on a tracé (figure 4) pour plusieurs formes initiales différentes la forme finale à masse constante.

### 4.2 Autosimilarité

On peut expliquer la constatation précédente par le fait que notre problème est en partie auto-similaire.

On pose  $x = Lx^*$ ,  $f = Ff^*$ ,  $\tau = T\tau^*$ ,  $q = Qq^*$ ,  $t = Et^*$ ,  $m = Mm^*$

$k$  étant un nombre d'onde, on a  $k = \frac{k^*}{L}$

De  $FT[\tau] = (3Ai(0))(-ik)^{1/3}FT[f]$  on tire :  $T\tau^* = L^{-1/3} * (-ik^*)^{1/3}Ff^*$

Et  $T = L^{-1/3}F$

On prend  $T = Q = 1$

donc  $F = L^{1/3}$

D'après la conservation de la masse, on a  $\frac{F}{E} = \frac{Q}{L}$

et par suite  $c = \frac{L}{E}c^* = L^{-1/3}c^*$

$m = \int f dx$  donc  $m = LFm^*$  donc  $m = L^{4/3}m^*$  et  $c = M^{-1/4}c^*$  et vient l'équation

$$\frac{1}{Vm^{3/4}} \frac{\partial q^*}{\partial x^*} + q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s). \quad (6)$$

Le paramètre pertinent est  $Vm^{3/4}$ . À ce paramètre  $Vm^{3/4}$  constant, en faisant varier  $V$  et  $m$ , on obtient les mêmes formes finales de dunes, au changement d'échelle suivant près :

$x = m^{3/4}x^*$  et  $f = m^{1/4}f^*$  ce que l'on constate à la lumière de la figure 5. Cela rejoint donc la première observation de l'invariance de la forme finale de la dune pour une même masse et un  $V$  inchangé. (figure 4)

### 4.3 Évolution en fonction du paramètre $Vm^{3/4}$

On trace les formes des dunes (figure 6) en faisant varier  $Vm^{3/4}$ .

La masse est maintenue constante par une ligne de code la rééquilibrant chaque itération. Il n'est

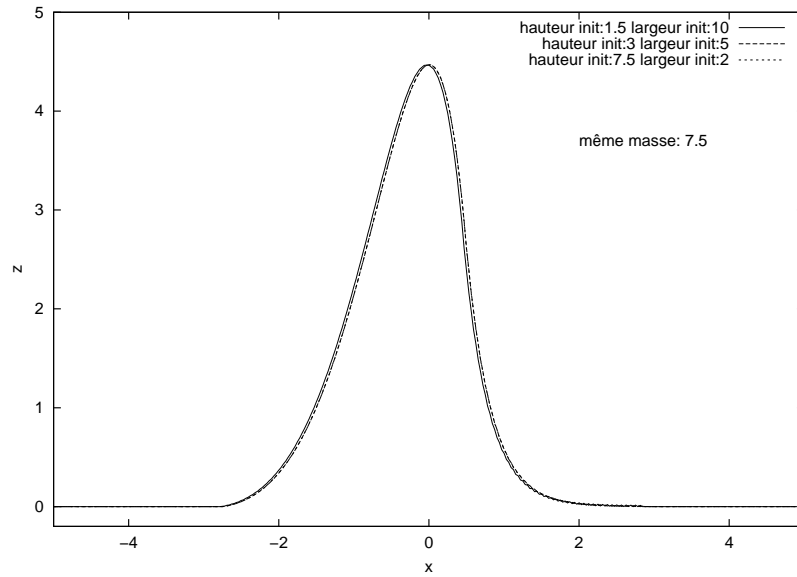


FIG. 4 – Comparaison de la forme finale de dunes ayant la même masse et des formes initiales différentes.

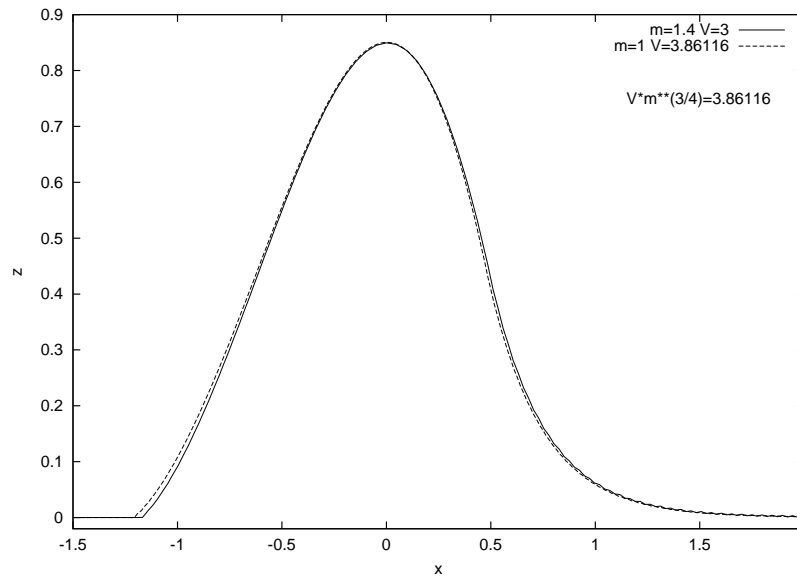


FIG. 5 – Comparaison de la forme de dunes à  $Vm^{3/4}$  identique.

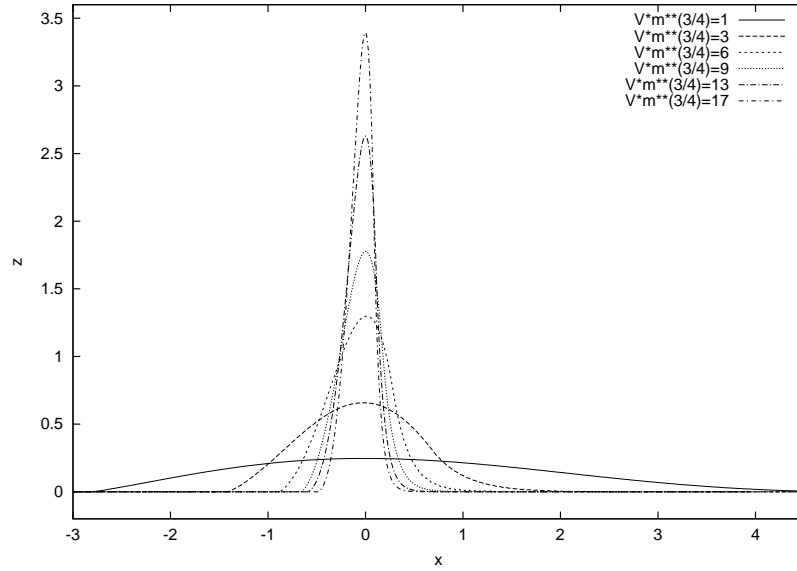


FIG. 6 – Évolution de la forme de la dune en fonction de la valeur de  $Vm^{3/4}$

en effet pas physique que la dune perde de la masse au cours du temps. Cette perte de masse est due à des erreurs d'approximation numérique.

Ces courbes ont été obtenues avec une masse unité et en faisant varier  $V$ . On constate que la dune est d'autant plus haute et étroite que  $Vm^{3/4}$  est grand. On a cherché à savoir si il existait une courbe limite pour de grandes valeurs de  $Vm^{3/4}$  sans obtenir de conclusion. On a testé pour  $Vm^{3/4}=20$ , on obtient une hauteur de dune de 4.1, et on obtient des hauteurs de 5 et 5.8 pour des valeurs respectives de  $V$  qui sont 27 et 30. On n'a pas représenté ces courbes pour des raisons de clarté des figures. Il est d'autant plus difficile d'obtenir des résultats que ce paramètre est grand, les calculs n'aboutissent pas pour des valeurs de  $Vm^{3/4}$  supérieures à 35.

On trace aussi la vitesse d'avancée de la dune toujours en fonction de ce paramètre  $Vm^{3/4}$  sur la figure 7. Les valeurs pour un  $Vm^{3/4}$  trop petit (à gauche de la barre verticale) ne sont pas valables (voir plus loin). En dehors de ce fait, on constate une rupture de pente pour  $Vm^{3/4} \simeq 11$  ce qui correspond à un changement de la taille du domaine pour faire les calculs. En effet, pour  $V \in [4, 8]$ , on a pris  $lx=8$  et  $nx=1024$ ; pour  $V \in [9, 10]$ , on a pris  $lx=8$  et  $nx=2048$ ; pour  $V \in [11, 13]$ , on a pris  $lx=4$  et  $nx=2048$ ; pour  $V \in [14, 26]$ , on a pris  $lx=4$  et  $nx=4096$ .

On peut faire une approximation de cette courbe en une droite (effectué avec gnuplot) qui donne  $y = 1 + x/32$ , soit  $c^* = 1 + V^*/32$ .

De plus,  $c = c^*m^{-1/4}$  donc  $\frac{1}{c} = \frac{1}{c^*}m^{1/4}$ .

Ainsi,  $c = m^{1/4}(1 + \frac{Vm^{3/4}}{32})$ .

On a fait des mesures de vitesse pour avec  $V=3$  et une masse variant de 0.05 à 17. (figure 10) et on trace  $\frac{1}{c}$  en fonction de  $m^{1/4}$ .

On trace  $\frac{m^{1/4}}{(1 + \frac{Vm^{3/4}}{32})}$  en fonction de  $m^{1/4}$  (soit la fonction  $x \rightarrow \frac{x}{1 + \frac{x^3}{32}}$ ) et on superpose les deux courbes. (figure 8)

On se rend compte que l'expérience valide la théorie pour des valeurs de  $m^{1/4}$  de 1.8, soit une masse de 9. On observe malheureusement pas le changement de signe de la dérivée prévu par la théorie.

On a essayé de tracer cette vitesse pour des valeurs de  $\tau_{seuil}$  différentes, ( $\tau_{seuil} = -0.25$  et



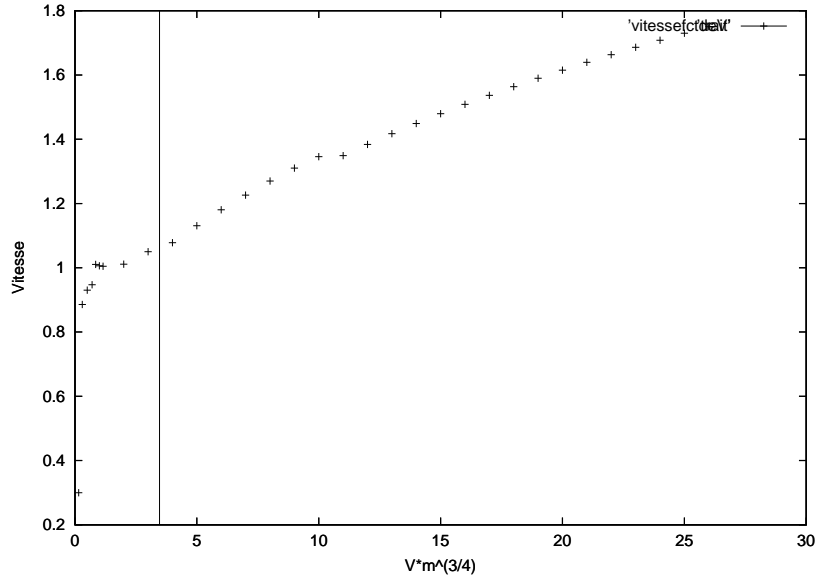


FIG. 7 – Vitesse de la dune pour une masse unité en fonction de  $V$  et limite de validité

$\tau_{seuil} = -0.5$  sont des valeurs que l'on a utilisées plus tard), mais les calculs n'aboutissent pas.

Il y a plusieurs types d'erreurs numériques pouvant se produire. Un phénomène fréquent est l'apparition de dunes parasites qui sont "digérées" par la dune principale. (figure 9).. La dune parasite rejoint la dune principale, augmente de taille pendant que la dune principale voit la sienne diminuer et elles échangent leurs rôles. La nouvelle dune parasite s'éloigne.

#### 4.4 Variation de la valeur de $\tau_{seuil}$

On change la valeur du paramètre de seuil pour  $m = 1$  et  $V = 3$ . (figure 11) Lorsque  $\tau_{seuil}$  est plus petit, (ici la plus petite valeur représentée est -1.3),  $\tau - \tau_{seuil}$  est plus grand. Ainsi,  $\frac{\partial q}{\partial x} + Vq$  est plus important, égal à une constante positive, et donc  $\frac{\partial q}{\partial x}$  est plus grand. Il y a donc un flux de matière qui augmente et donc plus de matière élevée et donc une dune plus haute.

#### 4.5 Variation de la valeur de l'angle d'avalanche

On considère que la dune ne peut être trop pentue sur son côté droit et par conséquent que pour une certaine valeur d'angle limite il y a une avalanche. On fait varier cet angle d'avalanche et on regarde l'allure de la courbe. (figure 12) Le modèle d'avalanche considéré ici est simplifié à l'extrême car il produit une pente constante dès lors que l'on dépasse l'angle limite.

#### 4.6 Flux de sortie

On modifie le programme précédent en enlevant le fait que la masse de la dune est constante. Cela est vrai dans la réalité mais le programme fait perdre de la masse à la dune. Ainsi, on observe un flux de sortie non nul dans certains cas, c'est-à-dire que  $q$  n'est pas nul sur le bord aval de la dune et donc qu'elle perd de la matière. Les résultats sont présentés sur la figure 13 et ont été effectués avec  $lx=16$  et  $nx=1024$ . La valeur affichée est la dernière valeur du flux de sortie avant que la dune ne disparaisse.

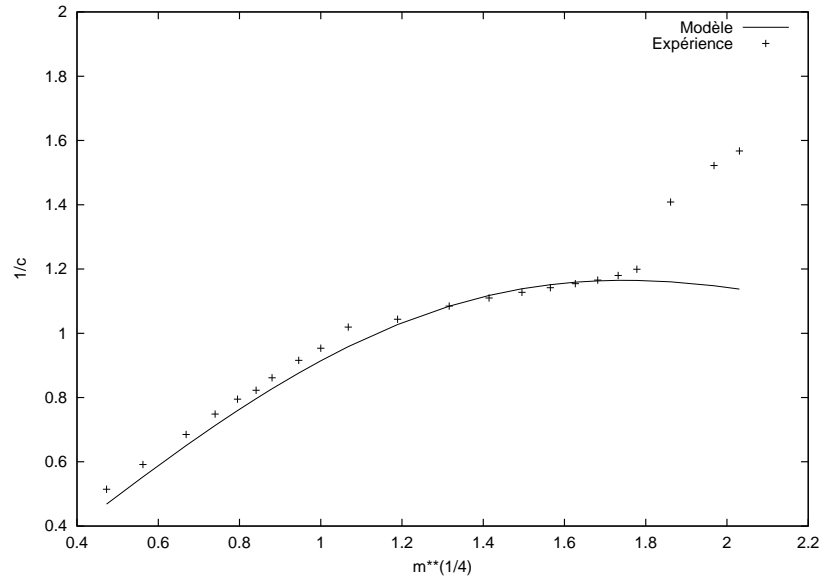


FIG. 8 – Inverse de la vitesse en fonction de  $m^{1/4}$

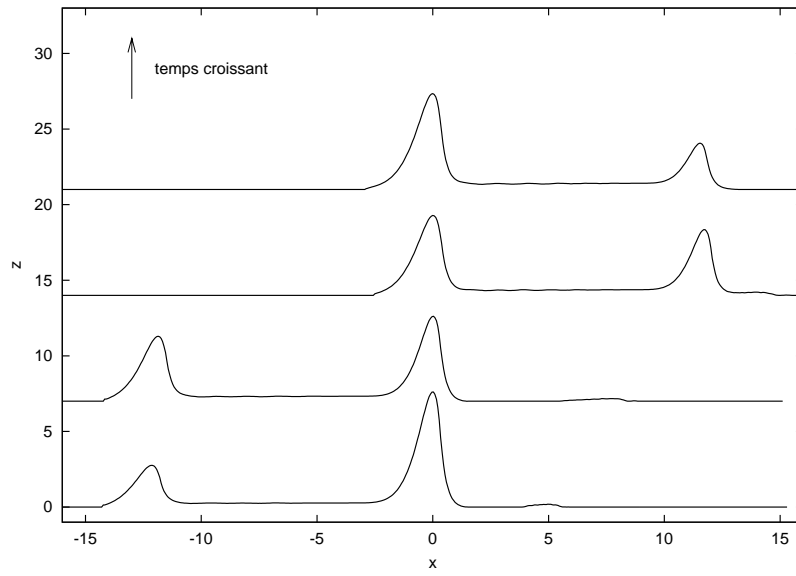


FIG. 9 – Digestion d'une dune parasite par la dune principale

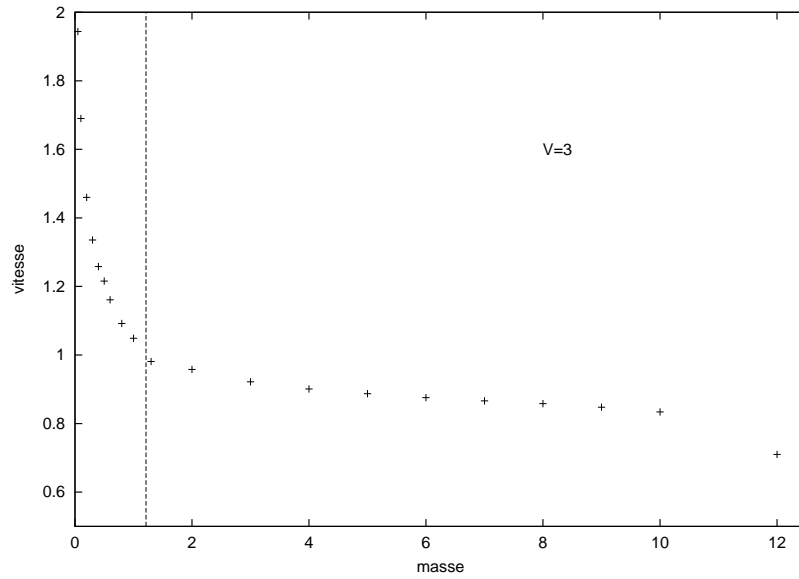


FIG. 10 – Vitesse de la dune en fonction de la masse et limite de validité

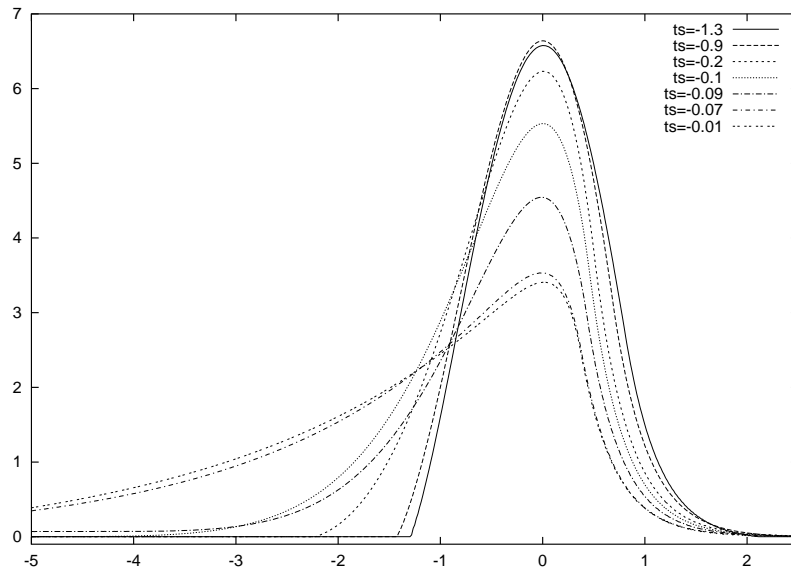


FIG. 11 – Évolution de la forme de la dune en fonction de la valeur de  $\tau_{seuil}$

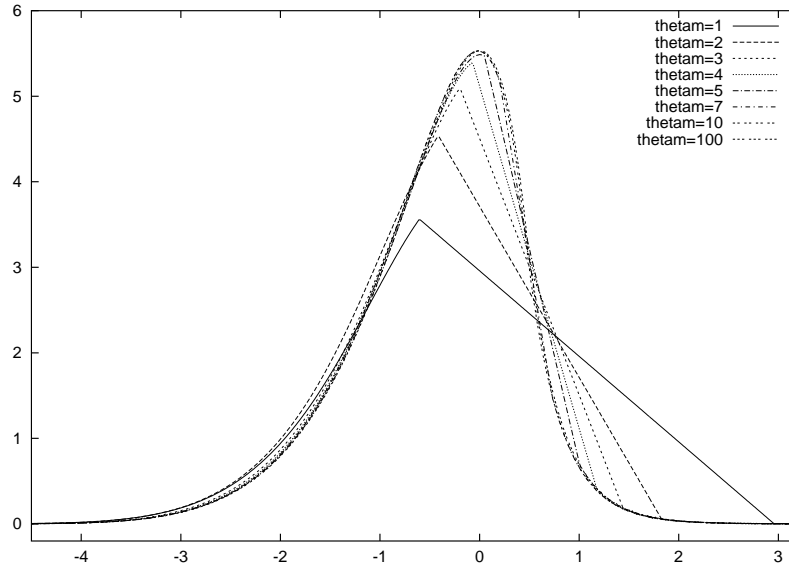


FIG. 12 – Évolution de la forme de la dune en fonction de la valeur de l'angle d'avalanche.

On observe qu'alors il existe une valeur charnière de  $Vm^{3/4}$  (entre 3.45 et 3.5). Pour  $Vm^{3/4}$  inférieur à cette valeur, il existe un flux de sortie non nul, la dune perd donc de la matière en permanence et finit par mourir. On constate que cette dernière valeur du flux de sortie est toujours égale, mais le flux de sortie varie dans le temps. Si  $Vm^{3/4}$  est supérieur à cette valeur alors le flux de sortie est nul et la dune est prene. Ainsi, les mesures effectuées avec le programme conservant la masse constante ne sont pas pertinentes pour un  $Vm^{3/4}$  supérieur à la valeur charnière. Cette valeur charnière change quelque peu si l'on change les valeurs de  $l_x$  et  $n_x$ . Ainsi, si  $l_x = 16$  et  $n_x = 2048$ , la valeur limite est entre 3.5 et 3.6 et non plus entre 3.45 et 3.5.

On trace la forme de la dune en fonction de la valeur de  $Vm^{3/4}$  pour des valeurs raisonnables de ce paramètre. (figure 15) Ces dunes sont bien de pente plus faible en amont qu'en aval conformément à l'observation.

On refait cette expérimentation avec  $\tau_{seuil} = -0.25, -0.5, -0.7$ . (figure 14).

On constate que la valeur charnière est linéaire avec  $\tau_{seuil}$ .

## 5 Résultats pour les équations linéarisées et un sol érodable

On a désormais un sol érodable, et la dune peut donc creuser le sol.

On trace les formes finales de dunes pour des bosses initiales différentes. Le paramètre  $V$  est constant. (figures 16 et 17)

Une première observation est que la dune a bien creusé le sol. On remarque que plus la dune est haute initialement et moins elle creuse. On peut d'ailleurs remarquer que dans le cas  $l_x = 8$  et  $h_0 = 5$  la dune est surélevée par rapport à son niveau initial ce qui est une erreur numérique probablement due au faible ratio hauteur initiale-largeur du domaine.

On remarque que les dunes sont parfaitement superposables pour une largeur de domaine donnée. En revanche, à forme initiale donnée et à  $V$  différents, on observe bien des formes finales de dune différentes.

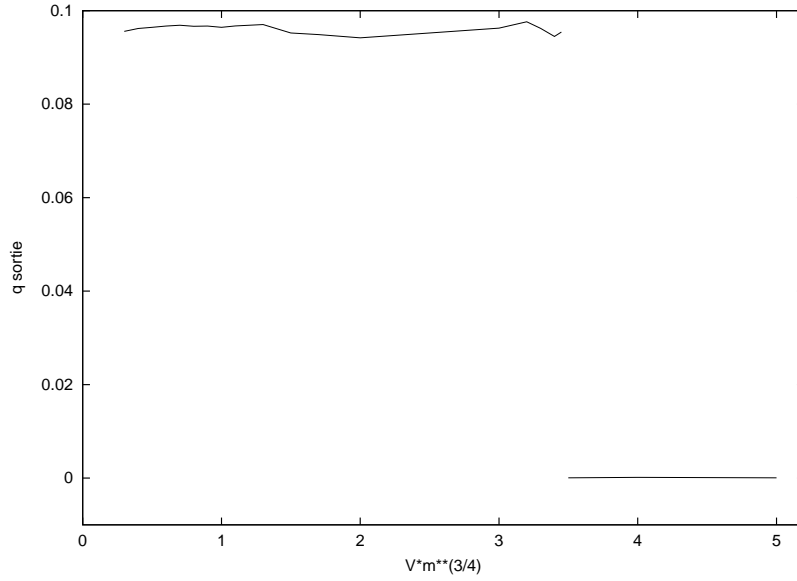


FIG. 13 – Flux de sortie en fonction de  $Vm^{3/4}$  pour  $\tau_{seuil} = -0.1$

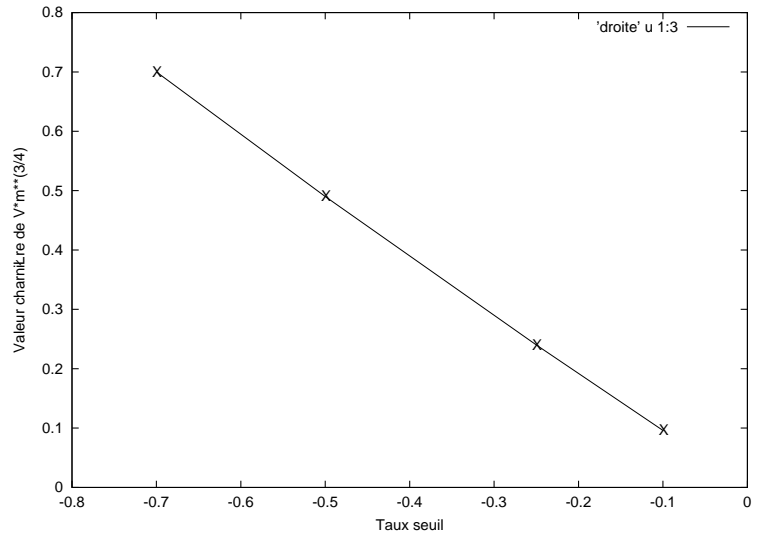
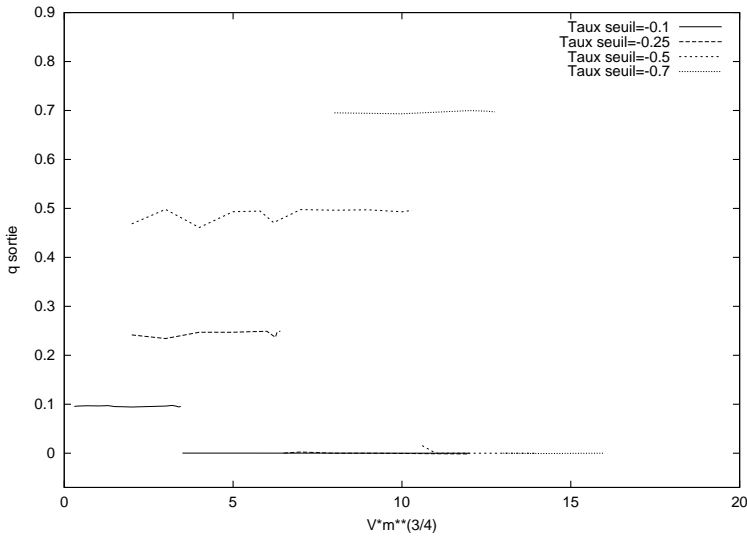


FIG. 14 – Flux de sortie en fonction de  $Vm^{3/4}$  pour différentes valeurs de  $\tau_{seuil}$

## 6 Résolution en non-linéaire

Le sol n'est pas érodable dans ce programme. On effectue les calculs précédents sans effectuer la linéarisation des équations.

Cette linéarisation permet de faire des calculs plus rapides, et il faut donc réduire le nombre de points avec le programme non linéaire pour que les calculs ne prennent pas trop de temps.

On compare les résultats de ces deux façons de résoudre le problème. On part de deux bosses initiales de même forme, et on regarde les frottements initiaux. (figures 19 et 20)

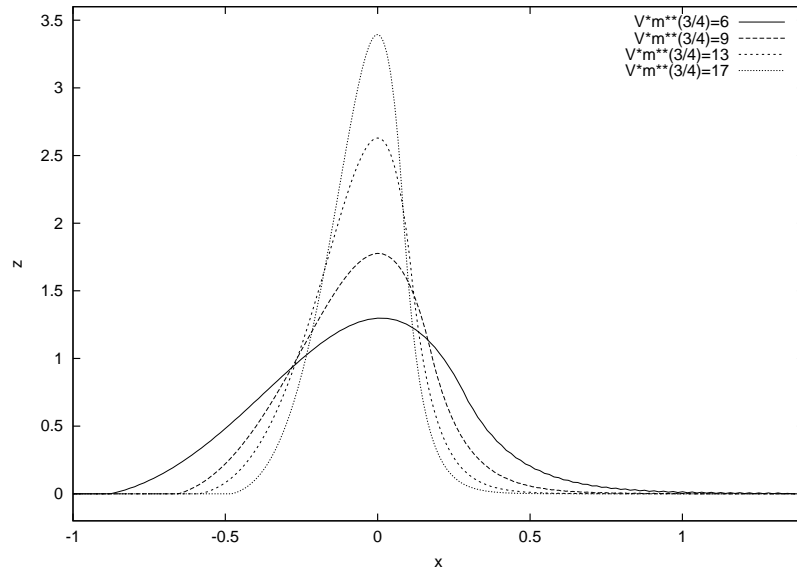


FIG. 15 – Évolution de la forme de la dune en fonction de la valeur de  $Vm^{3/4}$  pour des valeurs raisonnables de ce paramètre.

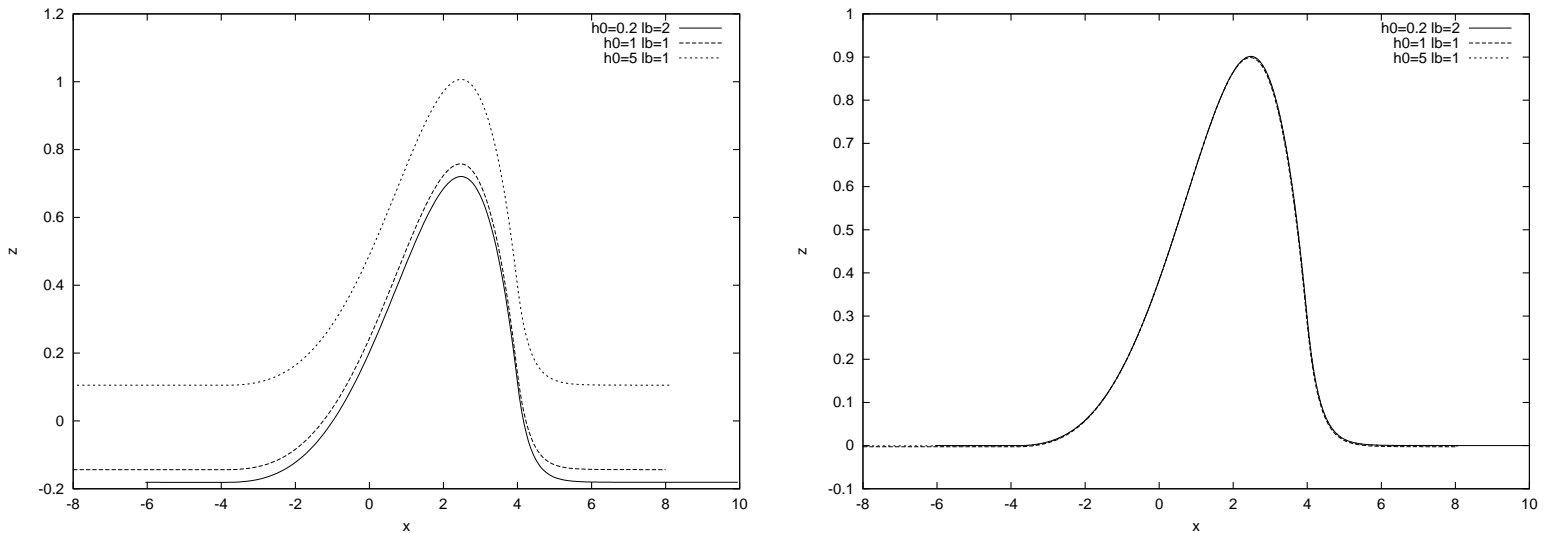


FIG. 16 – Comparaison de la forme finale de dunes pour des formes initiales différentes avec  $lx=8$ ,  $V=3$  et  $\lambda=0.3$

On compare aussi les formes finales de dunes sur les figures 21 et 22. On remarque que la bosse non linéaire est plus haute et que le frottement pariétal est plus important. On observe une bulle de recirculation sur la figure 21, en effet le frottement pariétal devient négatif, et donc du sable est rejeté dans le sens contraire de l'écoulement.

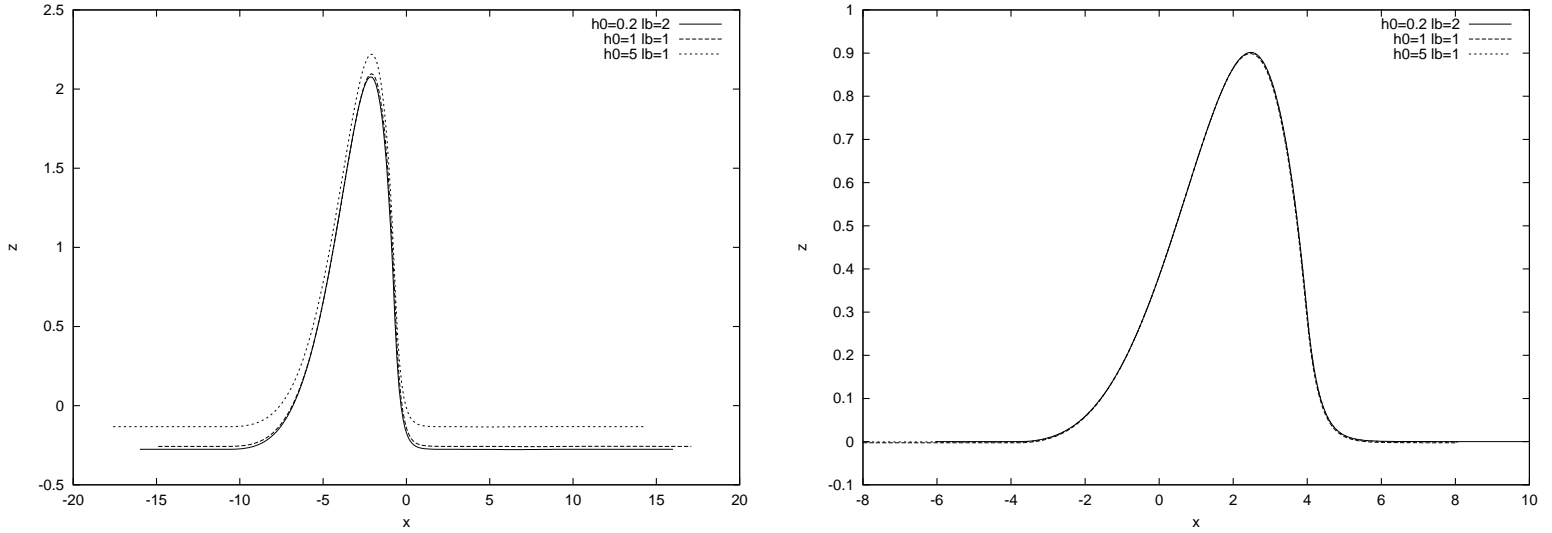


FIG. 17 – Comparaison de la forme finale de dunes pour des formes initiales différentes avec  $lx=16$ ,  $V=3$  et  $\lambda=0.3$

## 7 Un autre type d'équation

On s'intéresse désormais à l'équation suivante :

$$q = \varpi(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}). \quad (7)$$

et la fonction  $\varpi(x)$  est telle que si  $x < 0$ ,  $\varpi(x) = 0$  et si  $x > 0$ ,  $\varpi(x) = x$ .

On cherche de la même façon que précédemment les liens d'autosimilarité. On pose encore  $x = Lx^*$ ,  $f = Ff^*$ ,  $\tau = T\tau^*$ ,  $q = Qq^*$ ,  $t = Et^*$ ,  $m = Mm^*$

On a toujours  $T = L^{-1/3}F$

On prend  $T = Q = 1$

donc  $F = L^{1/3}$

On a toujours par conservation de la masse  $\frac{F}{E} = \frac{Q}{L}$

et par suite  $c = \frac{L}{E}c^* = L^{-1/3}c^*$

$m = \int f dx$  donc  $m = LFm^*$  donc  $m = L^{4/3}m^*$  et  $c = m^{-1/4}c^*$

Il vient l'équation :

$$Qq^* = T\tau^* - \frac{\lambda F}{L} \frac{\partial f^*}{\partial x^*}$$

$$Q = 1 \text{ et } T = 1 \text{ et } F = L^{1/3} \text{ donc } \lambda^* = \frac{\lambda F}{L} \text{ et } m = L^{4/3}m^* \text{ et } \lambda^* = \frac{\lambda}{L^{2/3}} \text{ et } \lambda^* = \frac{\lambda}{m^{1/2}}.$$

On a donc l'équation :

$$q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s - \frac{\lambda}{m^{1/2}} \frac{\partial f^*}{\partial x^*}). \quad (8)$$

Ce paramètre  $\lambda^*$  est un nouveau paramètre d'autosimilarité.

Le sol est érodable. On remarque encore que pour un domaine de longueur donnée et un pas de maillage suivant  $x$  donné, on obtient la même bosse finale, quelle que soit la forme de la dune initiale. (figure 23)

On trace l'évolution lorsque la dune initiale est un bruit blanc. Les dunes sont éliminées les unes après les autres et il n'en reste finalement qu'une. (figure 24)

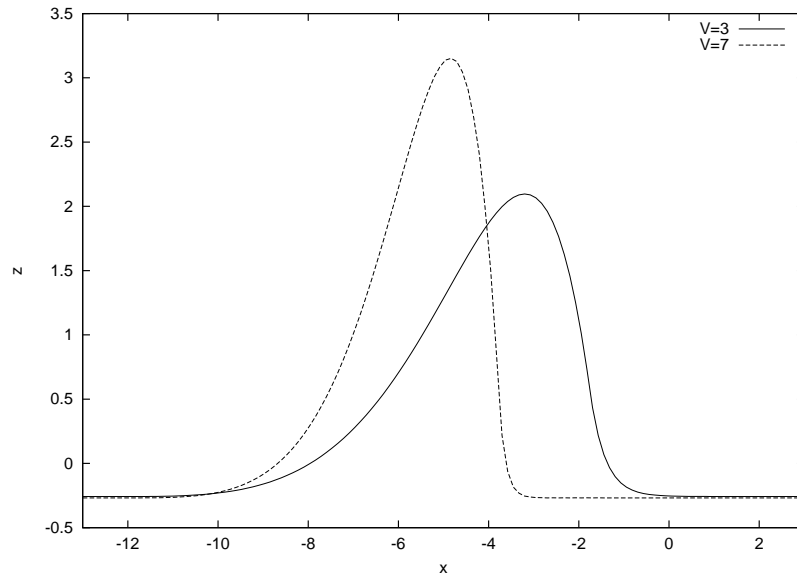


FIG. 18 – Comparaison de la forme finale de dunes pour des paramètres  $V$  différents avec  $h_0=1$ ,  $l_b=1$ ,  $l_x=16$ , et  $\lambda=0.3$

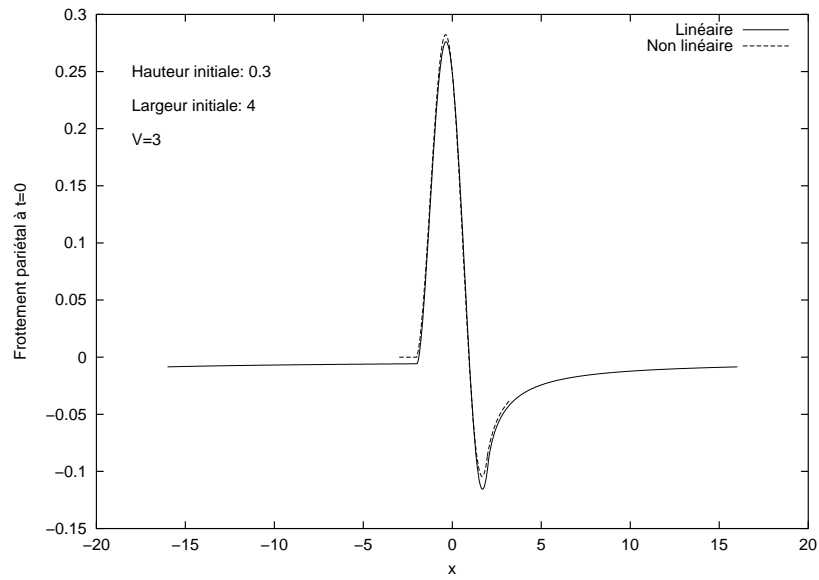


FIG. 19 – Comparaison du frottement pariétal initial pour la résolution linéaire et non linéaire, pour une hauteur initiale de 0.3 (le frottement ici tracé est en fait  $\tau - 1$ )



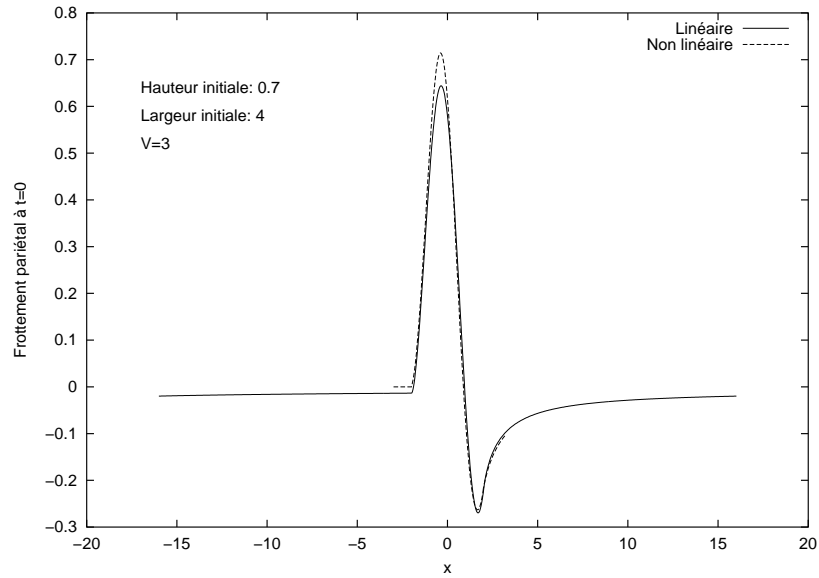


FIG. 20 – Comparaison du frottement pariétal initial pour la résolution linéaire et non linéaire, pour une hauteur initiale de 0.7 (le frottement ici tracé est en fait  $\tau - 1$ )

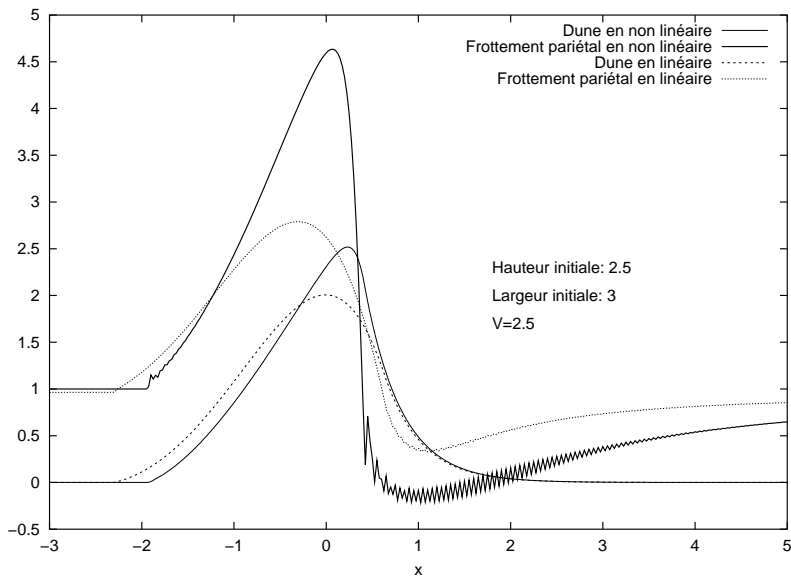


FIG. 21 – Comparaison du frottement pariétal final ( $\tau - 1$ ) et de la forme finale de la dune pour la résolution linéaire et non linéaire, pour une hauteur initiale de 2.5

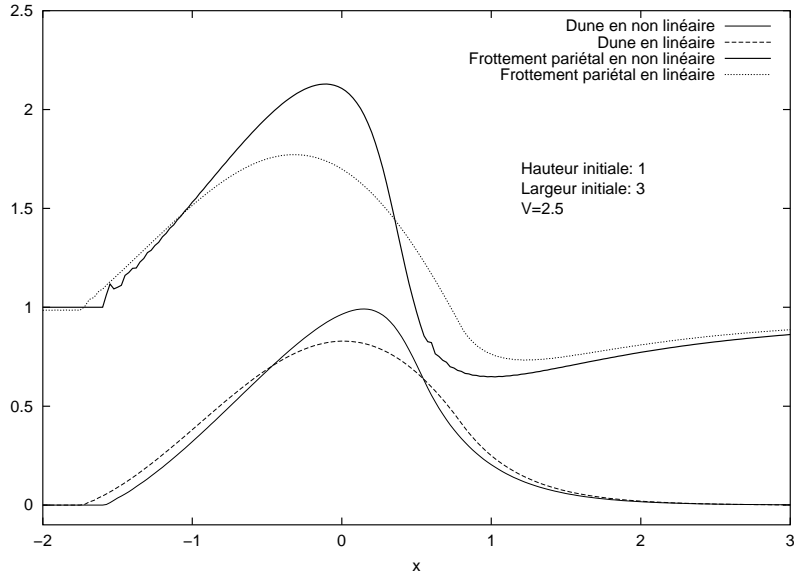


FIG. 22 – Comparaison du frottement pariétal final ( $\tau - 1$ ) et de la forme finale de la dune pour la résolution linéaire et non linéaire, pour une hauteur initiale de 1

On trace aussi l'évolution lorsque la dune initiale est une bosse exponentielle. On constate l'apparition rapide d'un bruit, puis le système évolue comme le précédent avec une seule dune au final. (figure 25) Cela est dû au fait que la dune part d'une situation d'instabilité, retrouve des oscillations à une fréquence particulière et évolue ensuite vers une seule dune.

On étudie l'influence du paramètre  $\Lambda$ . On remarque sur la figure 26 que plus  $\Lambda$  est petit plus la courbe est haute et la pente forte. En effet, plus  $\Lambda$  est petit et plus il a de l'influence si la pente est grande, soit lorsque le terme  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est assez grand pour que le terme  $\Lambda \frac{\partial f}{\partial x}$  ait une valeur significative. Cela est à rapprocher de l'étude de la variation de  $\tau_{seuil}$ . (figure 11)

On trace la vitesse  $c^*$  de la dune en fonction du paramètre d'autosimilarité  $\frac{\lambda}{m^{1/2}}$  sur la figure 27.

## 8 Comparaison avec le code Castem

On compare les résultats obtenus avec ceux obtenus avec le code Castem. Le temps de calcul de ce code est très long, de l'ordre de plusieurs jours pour un calcul réalisé en quelques minutes avec le programme en C. Ces calculs ont été faits par Kouamé Kan Jacques Kouakou. On trace le frottement initial avec le programme en C utilisé prédominamment et avec Castem à l'instant initial. (figure 28). Les calculs étant phénoménalement longs avec Castem, on n'a pu comparer les dunes finales.

## 9 Ouverture sur la résolution en trois dimensions

On effectue cette fois-ci des calculs avec un programme en trois dimensions. Le sol est désormais érodable. On se limite dans un premier temps pour ce programme à deux dimensions, en faisant une bosse invariante selon une dimension.

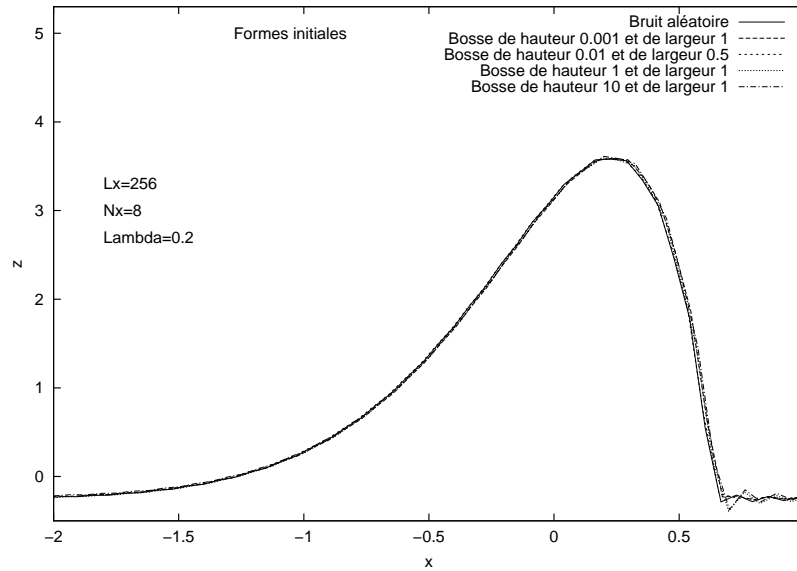


FIG. 23 – Comparaison des formes finales de dunes pour des bosses initiales très différentes en linéaire.

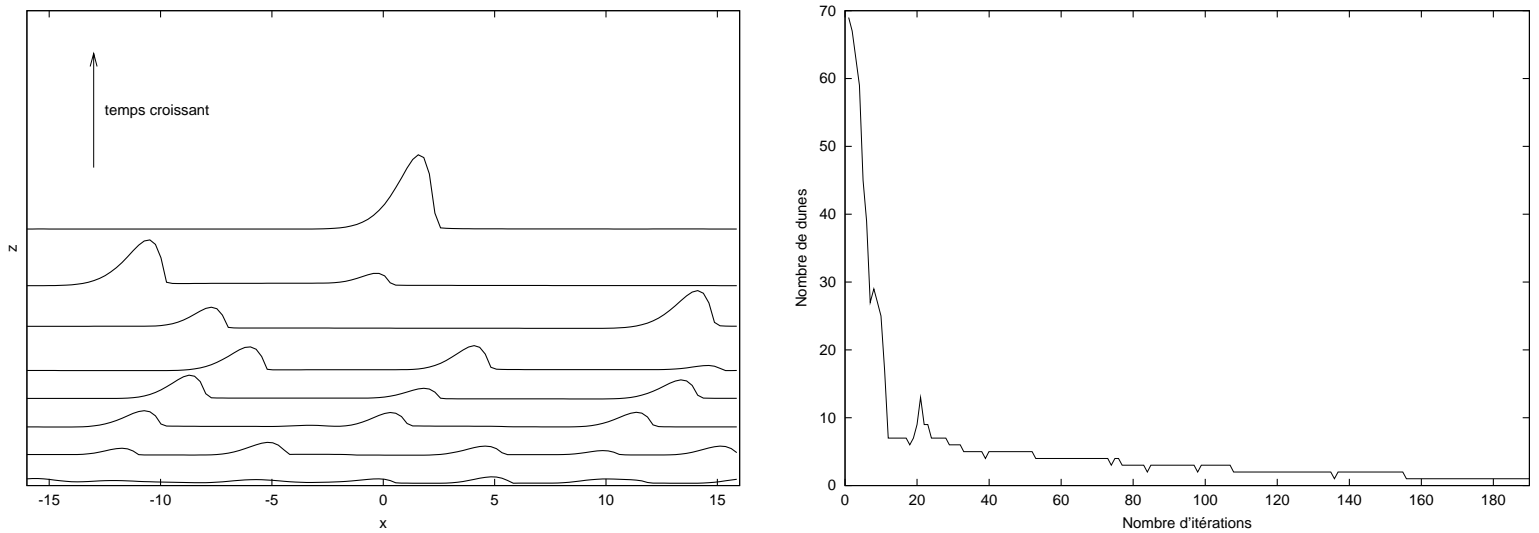


FIG. 24 – Évolution d'un bruit blanc en fonction du temps pour  $l_x=16$ ,  $n_x=256$  et  $\lambda=0.3$

Les premiers essais avec ce programme ne furent pas concluants quant à la comparaison des deux programmes à cause d'un domaine d'étude trop petit. Le frottement ne revient alors pas à une valeur nulle, ce que l'on voit sur la figure (29). En effet, l'utilisation de la transformée de Fourier rend de fait le problème périodique, ce qui induit des erreurs numériques. Pour un domaine trop petit, le frottement ne revient pas à zéro en aval de la dune et la périodicité induit qu'il est non nul aussi en amont de la dune.

On effectue donc les calculs avec un domaine beaucoup plus grand, ( $l_x=32$ ) afin que cette

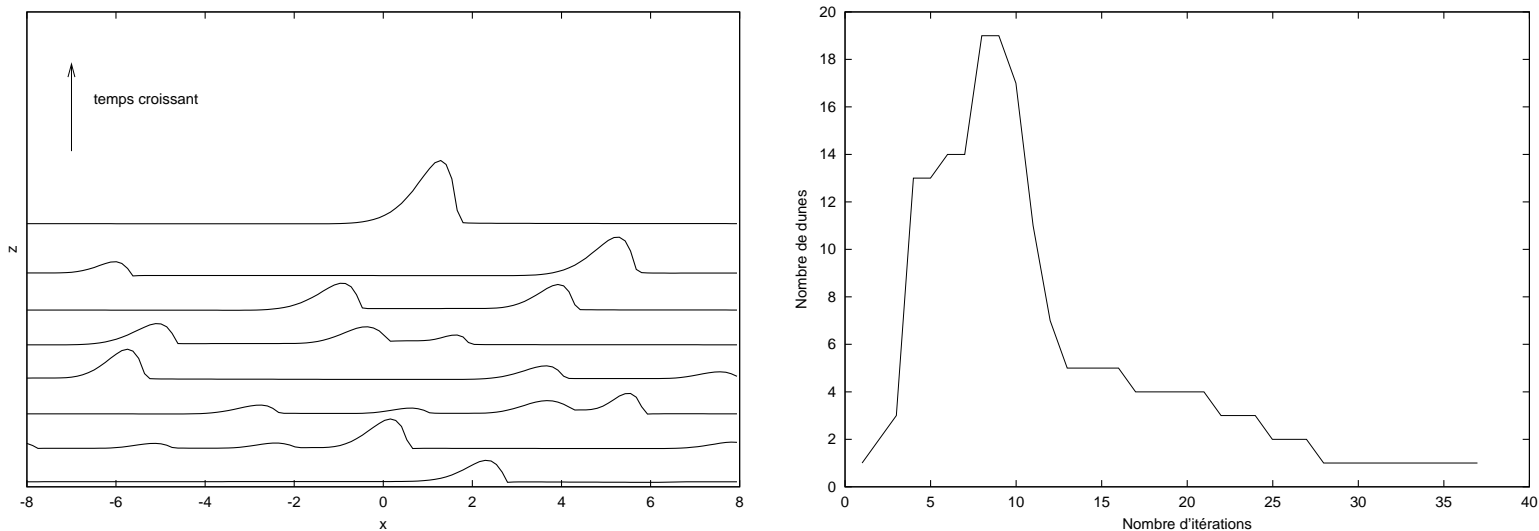


FIG. 25 – Évolution d’une bosse exponentielle en fonction du temps pour  $lx=8$ ,  $nx=256$  et  $\lambda=0.2$

erreur numérique ne survienne plus.

On compare ensuite le programme 2D linéarisé avec ce programme 3D utilisé en 2D utilis pour des masses finales identiques. Dans la cas du programme 3D, le sol est meuble et la masse évolue au cours du temps. Le programme 2D est utilisé avec un sol non érodable et avec une masse constante. Les résultats sont sur la (figure 30).

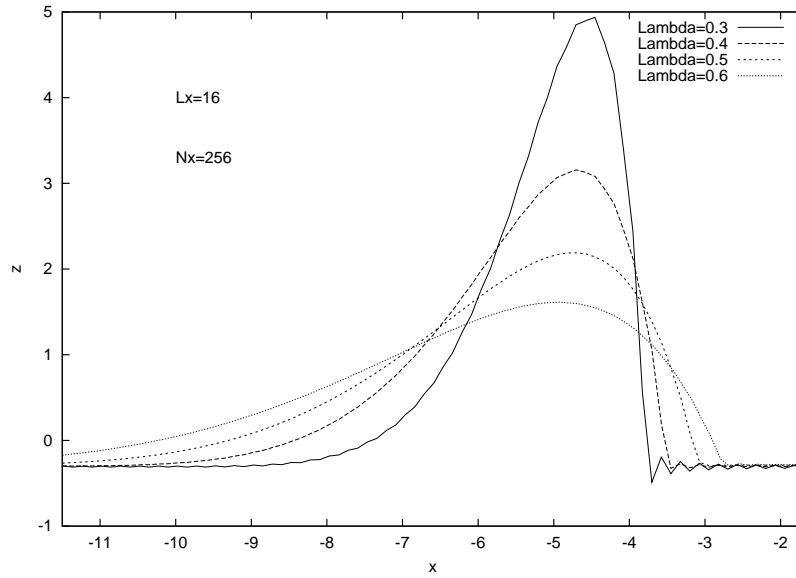


FIG. 26 – Influence du paramètre  $\Lambda$  en linéaire, la courbe ayant été redimensionnée par  $x = m^{3/4}x^*$  et  $f = m^{1/4}f^*$

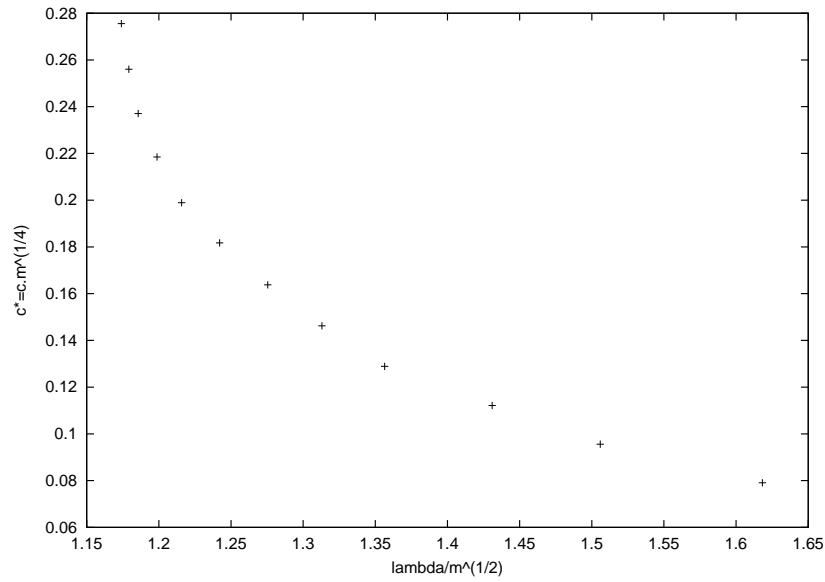


FIG. 27 – Vitesse de la dune en fonction de  $\frac{\lambda}{m^{1/2}}$  pour un domaine de longueur  $lx=16$  et  $nx=256$  points

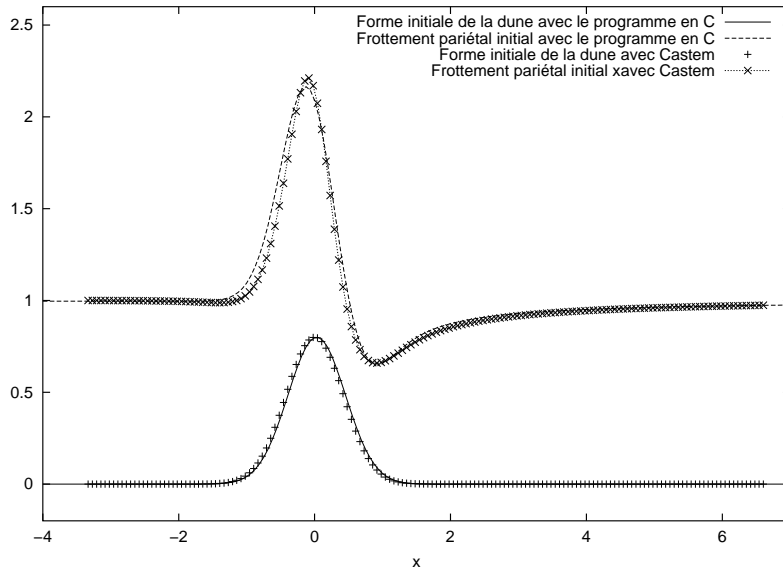


FIG. 28 – Comparaison du frottement initial avec le programme en C linéarisé et Castem

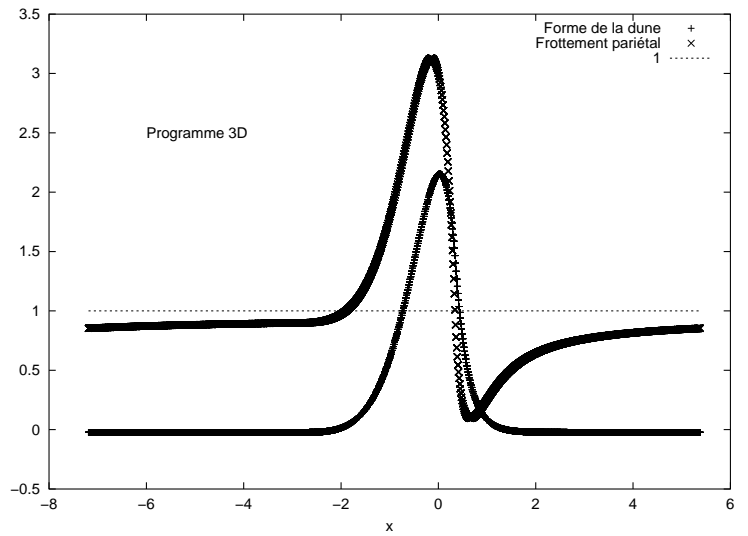
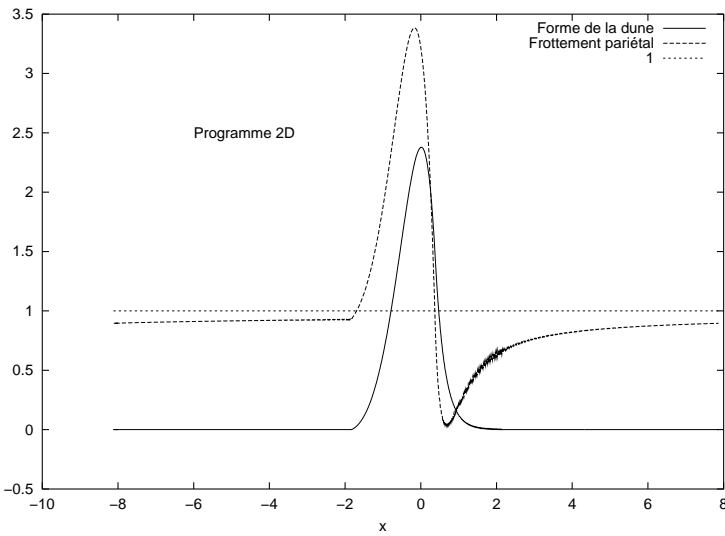


FIG. 29 – Observation du frottement pour un domaine trop petit avec les programmes 2D et 3D

## Références

- [1] KKJ Kouakou , "Erosion Sdimentation dana un canal", rapport partiel
- [2] B. Andreotti, P. Claudin P. and S. Douady, "Selection of dune shapes and velocities. Part 2 : A two-dimensional modelling", Eur. Phys. J., B 28 , pp 341-352, (2002). <http://www.lps.ens.fr/recherche/formes/papers/DunesPart2.pdf>
- [3] K. Kroy G. Sauermaun & J. Hermann : "A minimal model for aeolian sand dunes", Physical Review

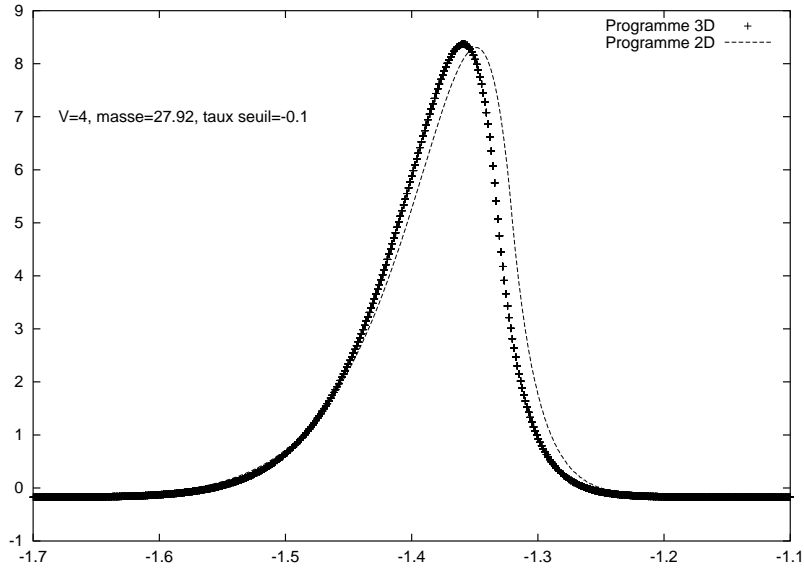


FIG. 30 – Comparaison des programmes en deux et trois dimensions.

[4] F. Engelund et J. Fredsøe "Sediments ripples and dunes" Ann. Rev. Fluid Mech.

[5] <http://www.nr.com>.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Calcul de l'écoulement autour d'une bosse fixe</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Linéarisation des équations</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Évolution de la dune</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Résultats pour les équations linéarisées et un sol dur</b>	<b>6</b>
4.1	Invariance . . . . .	6
4.2	Autosimilarité . . . . .	6
4.3	Évolution en fonction du paramètre $Vm^{3/4}$ . . . . .	6
4.4	Variation de la valeur de $\tau_{seuil}$ . . . . .	9
4.5	Variation de la valeur de l'angle d'avalanche . . . . .	9
4.6	Flux de sortie . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Résultats pour les équations linéarisées et un sol érodable</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Résolution en non-linéaire</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Un autre type d'équation</b>	<b>15</b>
<b>8</b>	<b>Comparaison avec le code Castem</b>	<b>18</b>
<b>9</b>	<b>Ouverture sur la résolution en trois dimensions</b>	<b>18</b>