



Projet Personnel en Laboratoire

*Dynamique d'une dune solitaire dans
une cuve de Hele-Shaw*

Pierre Trochet
Promotion 2006

Zusammenfassung

Über das Thema der Dünen wird es oft von den Medien berichtet, aber ihr Entwicklungsmechanismus bleibt bei weitem unbekannt. Der erste Schritt dieser Arbeit war also das Verstehen der gegenwärtigen Theorie. Man soll ein gekoppeltes Problem zwischen der Strömung und der Düne lösen. Aus Vereinfachungsgründen betrachtet man eine inkompressible und viskose Fluide (Wasser) und man berücksichtigt die Turbulenz nicht. In dieser Arbeit wird nur eine Düne in einer Hele Shaw-Zelle untersucht.

Die Strömung über der Beule wird durch die Dreierdeck-Theorie bestimmt, was uns erlaubt, eine Goldstein-Singularität zu vermeiden. Das Kernpunkt zu verstehen ist die Wechselwirkung zwischen der Außenströmung und der Grenzschicht. Dann werden die Reibkraft auf der Düne und der Partikelstrom durch ein empirisches Gesetz verbunden. Schließlich verwendet man das Exner-Gesetz, um die Entwicklung der Düne zu bekommen.

Nach diesem theoretischen Teil haben wir uns auf die numerische Simulation konzentriert. Wir haben ziemlich gute Erlebnisse erzielt, obwohl die numerische Instabilität manchmal stark ist. Wir verfügten über zwei Informatikprogramme : das eine löste ein linearisiertes System (FFT) und das andere das nichtlineare System (Keller Box). Wir haben die Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit, dem Gewicht, der Länge und der Höhe der Düne bestätigt.

Diese Arbeit sollte von einer Experimentreihe vervollständigt werden. Das Interesse von dieser Theorie ist nämlich, das Experiment vorherzusagen, denn alle Beobachtungen sind zur Zeit nicht geklärt.

Abstract

The media often deal with the topic of dunes, but their mechanism of evolution remains by far unknown. The first step of this work was thus to understand the current theory. We have to solve a coupled problem between the flow and the dune. For simplification reasons, we consider an incompressible and viscous fluid (water) and we don't take turbulence into account. In this work we only examine a dune in a Hele-Shaw cell.

The flow above the bump is determined by the "interacting boundary layer-theory" what allow us to avoid a Goldstein-singularity. The essential point to understand is the interaction between the outer flow and the boundary layer. Then the frictional force on the dune and the particle stream are linked together by an empirical law. Finally we use the Exner-law in order to get the movement of the dune.

After this theoretical part, we concentrated on the digital simulation. We obtain rather good results although the digital instability is sometimes strong. We had two computer programs : one solved a linearized system (FFT) and the other one the non linear system (Keller Box). We have confirmed the existing relations between the velocity, the weight, the length and the height of the dune.

This work should be completed by experiments. The interest of this theory is just to predict the experiment because the observations are not clarified at present.

Chapitre 1

Introduction

Les dunes sont des formes qui sont couramment rencontrées dans la nature. Il suffit d'avoir un lit sableux au-dessus duquel s'écoule un fluide (eau ou air par exemple) pour voir apparaître des structures périodiques, dont les échelles possibles sont vastes (de la ride sur une plage jusqu'à la dune dans le Sahara). Au-delà de la dune "classique" que l'on peut voir dans un désert, il y a aussi des dunes sous-marines qui se différencient par la nature du fluide en écoulement. Il faut de plus noter que les dunes ne sont pas l'apanage de la Terre : on rencontre aussi ces structures sur Mars.

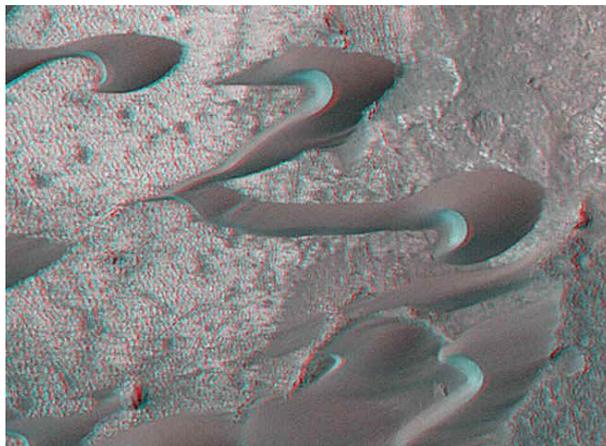


FIG. 1.1 – Champ de dunes sur Mars, source : <http://www.msss.com/>

Le principal problème posé par les dunes se trouve dans l'avancée des déserts. En effet, ces immenses structures ne sont pas inertes et peuvent progresser de plusieurs mètres par an. Cette progression peut avoir de graves conséquences dans des régions comme le Sahara, où des villages et des routes se retrouvent ensevelis. Afin d'enrayer cette évolution, il est primordial de comprendre son mécanisme.



FIG. 1.2 – Dune dans un désert du Maroc, source : <http://www.lps.ens.fr/>

La dynamique des dunes est actuellement un thème de recherches fortement développé du fait de la relative méconnaissance du phénomène. En effet, la modélisation n'est pas fondée sur une théorie "dure", mais plutôt sur des lois de conservation complétées par l'expérience. Il se pose aussi le problème de la résolution numérique qui nécessite souvent des simplifications, afin d'avoir un temps de calcul raisonnable. Il faut donc arriver à concilier les deux pour avoir des résultats satisfaisants.

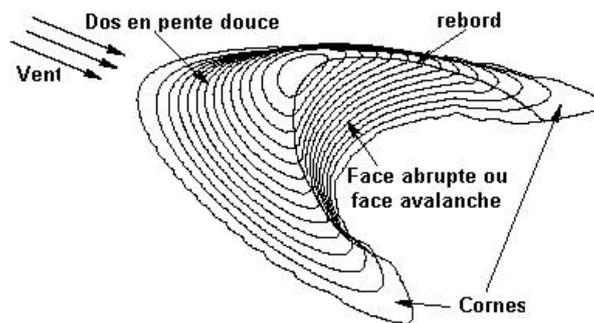


FIG. 1.3 – Schéma d'une dune en trois dimensions, source : <http://www.ica1.uni-stuttgart.de/hans>

Le présent rapport est organisé de la manière suivante. On établit, tout d'abord, le modèle d'évolution de la dune, en résolvant le système couplé que constituent le fluide et la bosse. Ensuite, on essaie de reproduire numériquement les résultats expérimentaux, en résolvant les équations issues du modèle. Dans une dernière partie, on présente les résultats des quelques expériences menées à l'Université d'Orsay.

Afin de pouvoir vérifier la théorie par des expériences, tous nos calculs sont faits en considérant une bosse érodable dans une cuve de Hele Shaw. Cette dernière a les caractéristiques suivantes : une longueur L_c de 50 cm, une hauteur H_c de 15cm et une profondeur b de 2 mm. Une telle hypothèse nous permet seulement de considérer un mouvement bidimensionnel de la dune. Dans la nature, celle-ci est naturellement tridimensionnelle et son mouvement se fait aussi en trois dimensions. Pour une telle modélisation, on peut se référer au travail de thèse de P. Hersen [1].

Chapitre 2

Modélisation dans une cuve de Hele Shaw

2.1 Préambule

Pour arriver à faire avancer une dune, il faut résoudre un système d'équations différentielles couplées. On présente ici la démarche générale de résolution.

Il faut tout d'abord résoudre les équations de Navier-Stokes pour le fluide s'écoulant au dessus de la bosse. Le profil de vitesses ainsi déterminé nous permettra d'obtenir le frottement τ sur la bosse. Une fois cette étape terminée, on cherche à établir une relation entre le frottement τ et le flux q de particules en suspension dans le fluide. Cette démarche est cohérente avec l'étape précédente, car les particules arrachées vont être emportées par le fluide. Enfin, par une loi de conservation, on relie le flux q à la hauteur f de la bosse ce qui nous permet d'obtenir l'évolution de celle-ci par itération du procédé.

2.2 Équations de Navier-Stokes pour le fluide

Toute cette première partie s'appuie sur l'article [2] de P.-Y. Lagrée.

2.2.1 Équations de départ

On considère que le fluide (de l'eau) est incompressible, visqueux et qu'il est en écoulement laminaire. Dans le fond de la cuve de Hele Shaw est disposée une bosse de hauteur petite devant sa longueur ($\alpha \ll 1$ avec $\alpha = H_b/L_b$).

La hauteur et la longueur des parois latérales de la cuve étant très grandes devant la taille de l'interstice (b), on suppose que le fluide "voit" deux plans infinis. Il vient alors un profil de vitesse de Poiseuille selon la coordonnée z . On suppose de plus que la vitesse selon z est négligeable et que la gravité n'influence pas le résultat final.

On a alors par hypothèse simplificatrice :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{z}{b/2}\right)^2\right) u'(x, y) \\ v(x, y, z) &= \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{z}{b/2}\right)^2\right) v'(x, y) \\ w(x, y, z) &= 0 \\ p(x, y, z) &= p'(x, y) \end{aligned}$$

On introduit ces formes de vitesses et de pression dans les équations de Navier-Stokes et on intègre selon z , entre $-b/2$ et $b/2$. On adimensionne ensuite avec U_0 (vitesse), $\frac{6}{5}\rho U_0^2$ (pression) et $L = \frac{U_0 b^2}{10\nu}$ (longueur). Par le principe de moindre dégénérescence, on obtient les équations suivantes avec $Re = \frac{36U_0 L}{25\nu}$:

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = 0 \quad (2.1)$$

$$\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \bar{u} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) \quad (2.2)$$

$$\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \bar{v} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) \quad (2.3)$$

2.2.2 Solution fluide parfait $Re \gg 1$

Dans ce cas, on résout le système suivant :

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = 0 \quad (2.4)$$

$$\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \bar{u} \quad (2.5)$$

$$\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \bar{v} \quad (2.6)$$

Avec la condition de glissement sur la bosse $\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$, qui se traduit ici par : $\bar{v}_1(\bar{x}, 0) = \frac{d\bar{f}}{d\bar{x}}$ (développement de Taylor à l'ordre 1).

On cherche alors une solution au premier ordre, linéarisée autour de l'état de base : $\bar{u} = 1 + \alpha \bar{u}_1$, $\bar{v} = \alpha \bar{v}_1$ et $\bar{p} = -\bar{x} + \alpha \bar{p}_1$. Après injection dans les équations précédentes et dans la condition limite, on aboutit à un système équivalent, dépendant uniquement de la pression et de la forme de la bosse :

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial \bar{y}^2} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}_1(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{y}} = -\frac{d\bar{f}(\bar{x})}{d\bar{x}} - \frac{d^2 \bar{f}(\bar{x})}{d\bar{x}^2}, \quad \bar{p}_1(\bar{x}, \infty) = 0 \quad (2.7)$$

On prend alors la transformée de Fourier de ces deux équations et on obtient la perturbations de la pression et de la vitesse à la paroi :

$$TF[\bar{p}_1] = -(1 + (-ik)) \frac{ik}{|k|} TF[\bar{f}], \quad TF[\bar{u}_1] = |k| TF[\bar{f}]. \quad (2.8)$$

On résout alors ce système, ce qui donne après être revenu dans l'espace physique $\bar{u}_1 = \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}'}{\bar{x}-\xi} d\xi$, l'intégrale de Hilbert.

2.2.3 Solution de couche limite

On reprend maintenant les équations (2.1), (2.2) et (2.3) avec un nouvel adimensionnement selon y . On a $\bar{y} = (\delta/L)\tilde{y}$ et $\bar{v} = (\delta/L)\tilde{v}$ avec $(\delta/L) \ll 1$. On applique le principe de moindre dégénérescence avec $(\delta/L) = Re^{-1/2}$, ce qui nous donne :

$$\delta = LRe^{-1/2} = \left(\frac{U_0 b^2}{10\nu}\right) \sqrt{\frac{25\nu}{36U_0 L}} = \frac{\sqrt{10}b}{12} = 0.26b = O(b)$$

Le système d'équations précédent devient :

$$\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\bar{y}}\right) = 0 \quad (2.9)$$

$$\left(\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\bar{y}}\right) = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\bar{y}^2} - \tilde{u} \quad (2.10)$$

$$0 = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\bar{y}} \quad (2.11)$$

La condition limite sur la bosse est désormais $\vec{U} = \vec{V}_{paroi} = 0$, c'est à dire $\tilde{u}(\tilde{x}, \bar{f}(\tilde{x})) = 0$ et $\tilde{v}(\tilde{x}, \bar{f}(\tilde{x})) = 0$. On a de plus la condition de raccordement entre la solution de couche limite et la solution de fluide parfait, soit $\tilde{u}(\tilde{x}, \infty) = \bar{u}(\bar{x}, 0)$ ce qui implique $\tilde{u}(\tilde{x}, \infty) = \bar{U}_e(\bar{x})$.

2.2.4 Résolution du problème complet

Les principaux résultats qui seront obtenus et exploités sont l'épaisseur de déplacement $\delta_1 = \int_0^\infty (1 - \frac{\tilde{u}}{\bar{U}_e}) d\bar{y}$ et le frottement pariétal $\tilde{\tau} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\bar{y}}(\bar{x}, 0)$ sur la bosse. La méthode intégrale classique est utilisée pour la résolution (P.-Y. Lagrée [2]), en prenant un profil de vitesse exponentiel comme relation de fermeture. Cette méthode donne des résultats convenables jusqu'à une valeur limite de α , $\alpha_{limite} = 0.23$, après laquelle apparaît une singularité dite de Goldstein. Cette dernière se caractérise par le fait que $\tilde{\tau}$ s'annule et dans ce cas, δ_1 et $d\delta_1/d\bar{x}$ deviennent infinies : le programme explose. Pour contourner ce problème, K. Kroy, G. Sauermann et H. J. Hermann [5], ainsi que Andreotti et coll. [6], prolongent le profil de la bosse par un polynôme du 3^e degré. Ils réalisent ensuite leurs calculs sur l'ensemble {dune+profil extrapolé}.

Afin de justifier complètement cet effet, la théorie de la triple couche a été développée. Elle ne permet pas de résoudre le problème de façon définitive, mais évite l'apparition d'une singularité. Nous allons en donner ici une description qualitative. Pour une description plus exhaustive, on peut consulter l'ouvrage de Gersten & Herwig [3] ainsi que celui de Cebeci & Cousteix [4].

Dans la théorie de couche limite classique, il est d'usage de déterminer la solution de fluide parfait, puis, en l'utilisant, de trouver la solution de couche limite. Cela revient formellement à réaliser un développement asymptotique. Dans la théorie de la triple couche, on tient compte du fait que la couche limite peut rétroagir sur le fluide parfait. On scinde alors schématiquement le fluide en trois parties : une sous-couche visqueuse au contact de la paroi, une couche principale et une couche où la solution de fluide parfait est perturbée. L'ensemble

des deux premières couches forme ce qui était notre couche limite "traditionnelle". Un exemple usuel, dans lequel la théorie de triple couche s'applique, est celui de la plaque plane de longueur finie (voir [3]). Dans notre cas, on se limite à une théorie de la "couche limite interactive" (la couche limite classique et une couche dans laquelle le fluide parfait est perturbé).

Ici, la singularité apparaît lorsque la couche limite devient de l'ordre de grandeur de la taille de la bosse. Dans notre cas, on modifie la forme du profil ressenti par le fluide. Pour cela, on rajoute le terme $Re^{-1/2}\tilde{\delta}_1$ à f dans l'intégrale de Hilbert explicitée plus haut. Ce terme supplémentaire traduit la rétroaction de la couche limite sur le fluide parfait. On obtient :

$$\bar{U}_e = 1 + \frac{1}{\pi}vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{d}{d\bar{x}}(\alpha\bar{f} + \tilde{\delta}_1 Re^{-1/2})}{\bar{x} - \xi} d\xi \quad (2.12)$$

Il n'est maintenant plus possible de résoudre séparément les problèmes de fluide parfait et de couche limite. Désormais, ils sont résolus en bloc à partir du système complet ou d'une simplification (plus de détails dans la partie "résolution numérique").

2.3 Relation entre le frottement et le flux de particules

2.3.1 Loi de conservation d'Exner

Pour fixer les idées, faisons un bilan de matière simplifié, comme l'indique le schéma suivant :

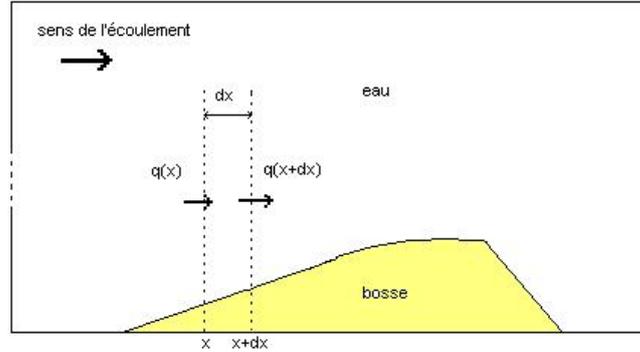


FIG. 2.1 – Bilan de matière sur une cuve d'Hele Shaw, ici en 2D

$$\begin{aligned} q(x)bh_e dt - q(x+dx)bh_e dt &= f(t+dt)dxbh_e - f(t)dxbh_e \\ -\frac{\partial q}{\partial x}bh_e dt dx &= \frac{\partial f}{\partial t}bh_e dt dx \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

On suppose que les longueurs sont infinitésimales de telle façon que h_e , hauteur d'eau au dessus de la bosse, puisse être considérée comme constante. L'équation (2.13) est connue sous le nom d'équation d'Exner. Grâce à elle, on a accès l'évolution de la hauteur de la bosse au cours du temps.

La masse de la bosse est définie par $m = \int \rho f dx$. Or, comme nous travaillons avec des grains, il faut introduire un facteur de compacité ϕ tel que $\rho = \rho_g \phi$. Dans l'équation précédente, cela se traduit par l'apparition d'un coefficient $\phi = 0.65$ en facteur du terme $\frac{\partial f}{\partial t}$. Dans un but de simplification, nous le prendrons égal à 1.

L'adimensionnement de la relation d'Exner nous donne accès à une échelle de temps pour l'avancée de la dune. En effet, on obtient la relation suivante : $\frac{H_b}{T} = \frac{q}{L}$ soit $T = \frac{H_b L}{q}$. Avec $H_b = 0.6cm$, $L = 9.9cm$ et $q = 3.10^{-6}m^2.s^{-1}$ (cf. 3.3.1), on trouve $T = 198s$. Cette valeur est tout à fait cohérente avec celles observées expérimentalement.

2.3.2 Notion de flux saturé

Lorsque le fluide s'écoule au dessus de la bosse, il induit un frottement à la paroi qui est déterminé grâce aux équations de la partie précédente. Ce frottement crée une contrainte au niveau des particules constituant la bosse et entraîne ainsi leur arrachement.

Les formes analytiques proposées pour décrire la relation entre le frottement et le flux saturé sont nombreuses et pour la plupart issues de l'expérimentation. Ces lois empiriques sont fondées sur des approches différentes (en vitesse ou en frottement) et s'expriment avec des variables différentes selon les auteurs (vitesse moyenne de l'écoulement U_0 , frottement τ sur le fond, la puissance de l'écoulement $\tau U, \dots$). Quoiqu'il en soit l'arrachement ne peut se produire que pour une valeur seuil de la variable. Il faut en effet vaincre la force de gravité, avant d'induire tout mouvement. Comme loi générique, on peut proposer la formule suivante :

$$q_{sat} = Q_{sat}(x - x_s)^B . H_e(x - x_s)$$

où H_e représente la fonction de Heaviside, x la variable pertinente (U_0, \dots) et x_s sa valeur seuil. Q_{sat} et B sont des paramètres qui dépendent des grains et du régime de l'écoulement. Pour un exposé plus exhaustif, on peut se référer au travail de thèse de K.K.J. Kouakou [7].

Pour notre modèle, nous considérons une approche liée au frottement, avec une expression de la forme suivante :

$$q_{sat} = Q_{sat}(\tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}) . H_e(\tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}) \quad (2.14)$$

où f est la fonction qui représente la forme de la bosse. Le terme $-\lambda \frac{\partial f}{\partial x}$ est fait pour rapprocher notre modèle de la réalité. Si la pente de la bosse croît, alors $-\lambda \frac{\partial f}{\partial x} < 0$ ce qui exprime le fait qu'il est plus difficile d'arracher sur une pente ascendante. Inversement, si la pente est descendante, la contribution de ce terme abaisse le seuil d'arrachement.

La valeur du coefficient Q_{sat} est discutée en (3.3.1), où on définit q comme le produit $v \cdot d$, v étant une vitesse caractéristique et d le diamètre du grain. En annexe, on trouvera aussi une démonstration de la formule (2.14).

2.3.3 Relation entre le flux et le flux saturé

A l'étape précédente, nous avons implicitement établi une relation entre le flux saturé et la coordonnée d'espace x . (Le frottement dépend de la position sur la bosse). Maintenant, on voudrait relier cette valeur au flux de particules effectif. Pour cela, on reprend le modèle proposé par B. Andreotti et coll.[6] qui est une simplification des travaux de G. Sauermann et coll. [8].

$$l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_{sat} \quad (2.15)$$

l_{sat} est une longueur de saturation pour le flux, c'est à dire une longueur à partir de laquelle $q = q_{sat}$. Cette équation différentielle traduit une évolution qui est comparable à celle d'un condensateur qui aurait une capacité variable avec le temps. Ici, la longueur de saturation joue le rôle du temps caractéristique en électronique. Il est aussi intéressant de remarquer qu'il n'y a pas de terme de la forme $\frac{\partial q}{\partial t}$. Ceci provient du fait que les temps caractéristiques du fluide et de l'évolution de la bosse sont très différents ($t_{fluide} \ll t_{bosse}$). On considère en effet que le profil du flux q s'adapte instantanément à un changement de forme de la bosse. Il est donc inutile de tenir compte d'une dérivée par rapport au temps. Les équations (2.14) et (2.15) donnent donc :

$$l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} + q = Q_{sat} \left(\tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot H_e \left(\tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (2.16)$$

où H_e est toujours la fonction de Heaviside.

Il est à noter que Charru [9] conserve une dérivée temporelle dans son expression de la formule (2.16) ce qui donne :

$$\tau \frac{\partial q}{\partial t} + l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} + q = Q_{sat} \left(\tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot H_e \left(\tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (2.17)$$

Ceci s'explique par le fait qu'il travaille sur des temps beaucoup plus courts, ce qui rend le terme non négligeable. Dans ce cas, on peut définir un temps caractéristique $\tau = \frac{d}{V_s}$ où V_s est une vitesse de Stokes (calculée en 3.3.1) et d le diamètre de la particule. Ici, on a $\tau = 0.011s$. Ce temps peut être compris comme un temps de sédimentation pour une particule.

2.4 Synthèse

La résolution du problème couplé fluide/dune se fait donc de la manière suivante :

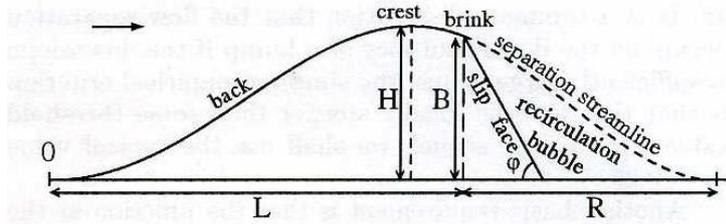
1. résolution de la partie fluide en tenant compte des interactions entre fluide parfait et couche limite, ce qui nous donne accès au frottement τ à la paroi.
2. résolution des équations (2.14) et (2.15), liées à la bosse, à partir du frottement τ précédemment déterminé
3. l'équation d'Exner nous permet de trouver la hauteur f . En réinjectant celle-ci dans l'étape 1 et en itérant, on détermine l'évolution de la bosse au cours du temps

2.5 Remarques

L'expérience montre que la ligne de courant qui suit le profil de la bosse se détache à hauteur du sommet et se raccorde au sol en aval. Ceci entraîne l'apparition d'une bulle de recirculation, où les vitesses sont beaucoup plus faibles que dans le reste du fluide. Sans avoir fait d'hypothèses particulières, notre modèle tient compte de ce phénomène, car il y a une décroissance importante de la vitesse après la bosse.

Cette bulle de recirculation a pour conséquence de créer un dépôt de sable sur la crête de la bosse. Lorsque l'angle de la pente aval est supérieur à une valeur seuil, il se produit une avalanche. Nous en tenons compte dans notre résolution numérique en prenant $\Theta_{max} = 0.44rad$.

FIG. 2.2 – Schéma bidimensionnel de la dune soumise à un écoulement de fluide, source : Andreotti et coll. [6]



Chapitre 3

Résolution numérique

3.1 Résolution des équations liées au fluide

Afin de mener cette résolution, nous disposons de deux codes différents : l'un basé sur la transformée de Fourier rapide et l'autre dit "Keller Box". Le premier résout un système linéaire approché alors que l'autre résout le système non-linéaire. On s'attend donc à avoir une meilleure précision avec Keller Box.

3.1.1 Résolution par transformée de Fourier rapide

Dans cette partie, nous allons expliciter la formule, donnant le frottement en fonction de la forme de la bosse, qui sera résolue par notre programme. Nous partons du système intégral de "Von Kármán" obtenu de manière classique par intégration de la relation (2.10) entre 0 et $+\infty$ selon y :

$$(\bar{U}_e^2 \frac{d}{d\bar{x}} (\frac{\tilde{\delta}_1}{H}) + (\tilde{\delta}_1 + \frac{2\tilde{\delta}_1}{H}) \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}}) = f_1 \frac{\bar{U}_e}{\tilde{\delta}_1} - \tilde{\delta}_1 \bar{U}_e \quad (3.1)$$

avec :

$$\tilde{\delta}_1 = \int_0^\infty (1 - \frac{\tilde{u}}{\bar{U}_e}) d\tilde{y}, \quad \tilde{\delta}_2 = \int_0^\infty (\frac{\tilde{u}}{\bar{U}_e} (1 - \frac{\tilde{u}}{\bar{U}_e})) d\tilde{y}, \quad H = \frac{\tilde{\delta}_1}{\tilde{\delta}_2}, \quad f_1 = \frac{\tilde{\delta}_1}{\bar{U}_e} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \Big|_0.$$

En prenant une relation de fermeture de type exponentiel, on trouve que $H = 2$ et $f_1 = 1$. La relation (3.1) devient alors :

$$\frac{\bar{U}_e^2}{2} \frac{d\tilde{\delta}_1}{d\bar{x}} + 2\tilde{\delta}_1 \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} = \frac{\bar{U}_e}{\tilde{\delta}_1} - \bar{U}_e \tilde{\delta}_1 \quad (3.2)$$

On remplace ensuite \bar{U}_e , $\tilde{\tau}$ et $\tilde{\delta}_1$ par $1 + u'$, $1 + \tau'$ et $1 + \delta'$ respectivement dans la relation (3.2) et dans celle de f_1 . On réalise alors un développement de Taylor à l'ordre 1 qui nous donne les relations suivantes :

$$\frac{1}{2} \frac{d\delta'}{d\bar{x}} + 2 \frac{du'}{d\bar{x}} = -2\delta' \quad (3.3)$$

$$\tau' = u' - \delta' \quad (3.4)$$

En prenant la transformée de Fourier de ces deux relations et en repassant dans le jeu de variables précédent, on trouve :

$$TF[\tilde{\tau} - 1] = TF[\bar{U}_e - 1] - TF[\tilde{\delta}_1 - 1] \quad (3.5)$$

$$TF[\tilde{\delta}_1 - 1] = B(k)TF[\bar{U}_e - 1] \quad (3.6)$$

avec $B(k) = \frac{2ik}{\frac{(-ik)}{2} + 2}$.

On calcule maintenant la transformée de Fourier de la relation (2.12) ce qui donne :

$$TF[\bar{U}_e - 1] = |k|TF[\alpha\bar{f}] + |k|Re^{-1/2}TF[\tilde{\delta}_1 - 1] \quad (3.7)$$

Finalement, en combinant les relations (3.5), (3.6) et (3.7), on trouve la relation entre la frottement et la forme de la bosse :

$$(\tilde{\tau} - 1) = TF^{-1}\left[\left(1 - \frac{B(k)(1 - |k|Re^{-1/2})}{1 - B(k)|k|Re^{-1/2}}\right)|k|TF[\alpha\bar{f}]\right] \quad (3.8)$$

C'est cette relation que le programme résout afin de déterminer la valeur du frottement.

3.1.2 Résolution par l'algorithme de Keller Box

L'adaptation de Keller Box est fondée sur la méthode de Newton. On peut trouver des indications dans l'ouvrage de Cebeci et Cousteix [4]. La résolution ne se fait pas directement, c'est à dire en calculant la vitesse de fluide parfait puis la couche limite, car cela entraîne une explosion du programme. On résout par ce que l'on appelle la méthode inverse. On part d'une couche limite approchée $\tilde{\delta}_1^n$ et on détermine deux vitesses, l'une venant du fluide parfait \bar{U}_e^{FP} , calculée à partir des équations (2.9), (2.10) et (2.11), l'autre venant de la couche limite \bar{U}_e^{CL} , calculée à partir de l'équation (2.12). On calcule alors une nouvelle valeur de couche limite $\tilde{\delta}_1^{n+1} = \tilde{\delta}_1^n + \lambda(\bar{U}_e^{CL} - \bar{U}_e^{FP})$ (λ est un paramètre qui assure la stabilité). En itérant, on converge vers la forme de la couche limite $\tilde{\delta}_1$.

Comme nous l'avons laissé entendre précédemment, la résolution des équations par cette méthode sera beaucoup plus précise, mais en contre-partie, elle est aussi beaucoup plus longue. En particulier, lorsqu'il s'agira de faire avancer la bosse, il sera impossible d'obtenir un résultat en un temps raisonnable. On comprend donc l'intérêt de disposer aussi du code résolvant par FFT : on peut obtenir un résultat convenable en un temps raisonnable.

3.2 La bosse

Repartons des équations (2.14) et (2.15). Notre programme teste d'abord si $\tau > \tau_s + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$. Si la condition est vérifiée, on pose $A_r = V(\tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x})$, sinon $A_r = 0$ ($V = \frac{1}{t_{sat}}$). On doit alors résoudre $\frac{\partial q}{\partial x} + Vq = A_r$ ce qui donne en discrétisant par $x = i\Delta x$ et $t = n\Delta t$:

$$\begin{aligned} \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{V}{2}(q_i^n + q_{i-1}^n) &= A_r \\ q_i^n \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{V}{2}\right) &= q_{i-1}^{n-1} \left(\frac{1}{\Delta x} - \frac{V}{2}\right) + A_r \\ q_i^n &= \frac{q_{i-1}^{n-1} \left(\frac{1}{\Delta x} - \frac{V}{2}\right) + A_r}{\left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{V}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour simplifier, on a pris $Q_{sat} = 1$. Comme il n'y a que la bosse qui peut être érodée, il nous faut introduire un arrachement maximal. Celui-ci est défini par le fait que $f_i^{n+1} = 0$, si $A_r = A_r^{max}$ sur Δt . On déduit de (2.13) que :

$$\frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{\Delta x} = \frac{f_i^n}{\Delta t} \quad (3.10)$$

À partir de (3.9), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{f_i^n}{\Delta t} + \frac{V}{2}(q_i^n + q_{i-1}^n) &= A_r^{max} \\ \frac{f_i^n}{\Delta t} + \frac{V}{2}\left(\frac{\Delta x f_i^n}{\Delta t} + q_{i-1}^n + q_{i-1}^n\right) &= A_r^{max} \\ A_r^{max} &= \frac{f_i^n}{\Delta t}\left(1 + \frac{V\Delta x}{2}\right) + Vq_{i-1}^n \end{aligned}$$

Lors du calcul de l'arrachement, il nous faut désormais faire une comparaison à A_r^{max} . Si $A_r > A_r^{max}$, alors $A_r = A_r^{max}$, sinon A_r reste inchangé.

Une fois que le flux q a été déterminé, on peut calculer $f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(q_i^n - q_{i-1}^n)$. Notre schéma étant explicite, il faut être attentif au respect d'une condition CFL du type $\frac{\Delta t}{\Delta x} \ll 1$. On remarque déjà qu'il faut trouver un compromis entre finesse de résolution (Δx petit) et temps de calcul (Δt le plus grand possible). C'est cette condition restrictive qui nous pousse à utiliser la FFT lorsqu'il s'agit de faire avancer la bosse.

3.3 Exemple de résolution

Dans cette partie, on essaie, sur un cas simple, de faire concorder les résultats numériques avec l'expérience. Le schéma suivant montre la bosse telle qu'elle est dans une cuve de Hele Shaw. (Le sommet et les extrémités sont en fait arrondis).

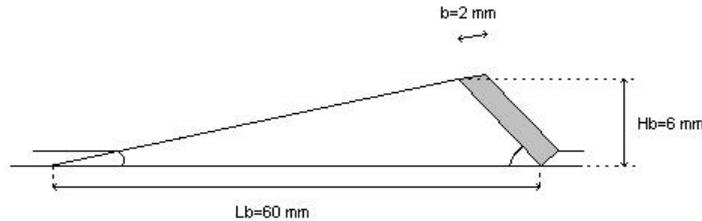


FIG. 3.1 – Modèle expérimental de bosse qu'on utilise pour la résolution

En pratique, L_b est calculée entre les deux valeurs de x telles que $f \leq 0.01H_b$.

3.3.1 Ordres de grandeur

Commençons par nous donner quelques ordres de grandeur qui seront utilisés lors de la résolution. Toutes les valeurs considérées ici proviennent des expériences de A. Goudichaud [11], F. Jusserand et P. Christol [12], réalisées au laboratoire FAST de l'Université d'Orsay.

On vérifie tout d'abord que l'hypothèse $\alpha = \frac{H_b}{L_b} \ll 1$ est respectée. Ici, $H_b = 0.6$ cm et $L_b = 6$ cm donc $\alpha = 0.1$, ce qui est une valeur correcte. On détermine ensuite la longueur d'adimensionnement $L = \frac{b^2 U_0}{10\nu}$ avec $b = 2$ mm, $\nu = 10^{-6}$ S.I. et $U_0 = 24.7$ cm.s⁻¹. On trouve $L = 9.9$ cm. On a alors accès au nombre de Reynolds ($\frac{36U_0L}{25\nu}$) (cf. partie théorique) qui vaut alors $Re = 35212$. La dernière longueur intéressante est l'épaisseur de couche limite $\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$. Avec nos valeurs, cela donne $\delta = 0.53$ mm.

La valeur seuil de la contrainte est reprise de l'article de F. Charru et E. J. Hinch [9] et vaut 0.14. Sa valeur adimensionnée et ainsi que celle du paramètre Λ , qui nous sont utiles pour la résolution, valent respectivement 0.47 et 0.22 (les calculs sont donnés en annexe). De plus, tous nos calculs sont faits avec une valeur de l_{sat} égale à 0.06m.

La grandeur pour laquelle il est intéressant de trouver une valeur caractéristique est la vitesse. Celle-ci est définie par la vitesse telle que les valeurs de la force de gravité et de la force de frottement se compensent. Suivant le régime de l'écoulement, deux valeurs sont possibles. On commence tout d'abord par un écoulement laminaire et on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 g(S-1)\rho_{eau} &= 6\pi\mu V_c \frac{d}{2} \\ gd^2(S-1)\rho_{eau} &= 18\mu V_c \\ V_c &= \frac{d^2(S-1)\rho_{eau}g}{18\mu} \end{aligned}$$

L'application numérique donne $V_c = 1$ cm.s⁻¹. C'est cette vitesse de Stokes que l'on a précédemment interprétée comme une vitesse de sédimentation.

Il est possible d'appliquer le même raisonnement, en considérant cette fois que l'écoulement est turbulent, ce qui nous donne une autre forme pour l'expression de la force de frottement. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 g(S-1)\rho_{eau} &= C_D V_c^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ \frac{2}{3}gd(S-1)\rho_{eau} &= C_D V_c^2 \\ V_c &= \sqrt{\frac{2dg(S-1)\rho_{eau}}{3C_D}} \end{aligned}$$

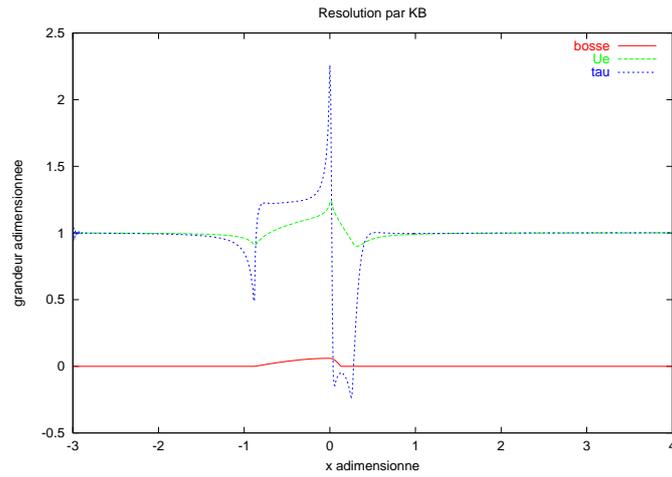
En prenant $C_D = 0.4$, l'application numérique donne $V_c = 1.6$ m.s⁻¹. Cette valeur est beaucoup trop élevée ce qui nous montre que l'écoulement est laminaire.

Il nous faut encore calculer une dernière vitesse qui sera à rapprocher des résultats numériques. On la définit à partir du flux de particules et de la taille de la bosse par $v = \frac{q}{H_b}$. On prend $q = \frac{\gamma d^2}{2}$ avec $\gamma = \frac{U_0}{\delta}$. Ceci signifie que le grain est emporté par l'écoulement à la vitesse $\frac{\gamma d}{2}$. Ici, on a $\gamma = 466$ s⁻¹, ce qui donne $q = 3.10^{-6}$ m².s⁻¹. Avec $H_b = 6.10^{-3}$ m, on trouve finalement que $v = 4.5 \cdot 10^{-4}$ m.s⁻¹. Nous discuterons cette valeur dans la partie expérimentale.

3.3.2 Exemple de résolution sur une dune mesurée

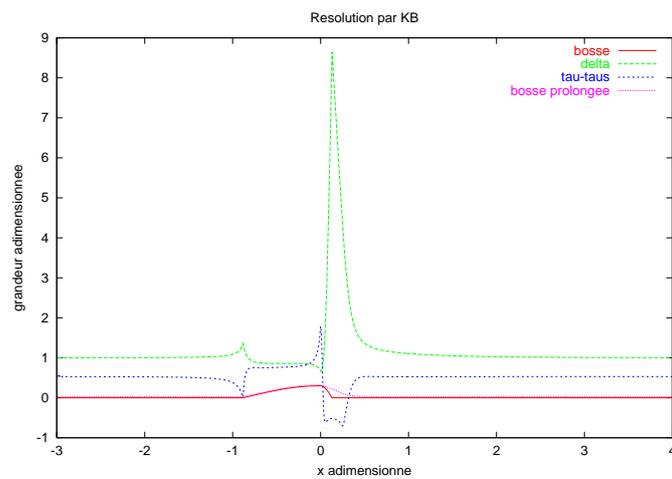
La résolution numérique nous donne les graphiques suivants :

FIG. 3.2 – Vitesse et frottement obtenus par une résolution avec Keller Box



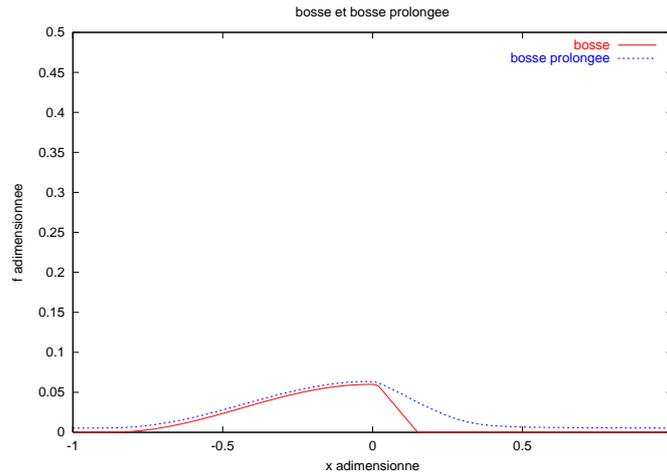
On remarque que le frottement croît sur la face amont de la dune et décroît sur la face aval. Ceci illustre le fait que l'érosion se fait devant et la déposition derrière. C'est ce mécanisme qui permet l'avancée de la dune.

FIG. 3.3 – Frottement et épaisseur de couche limite obtenus par résolution avec Keller Box.



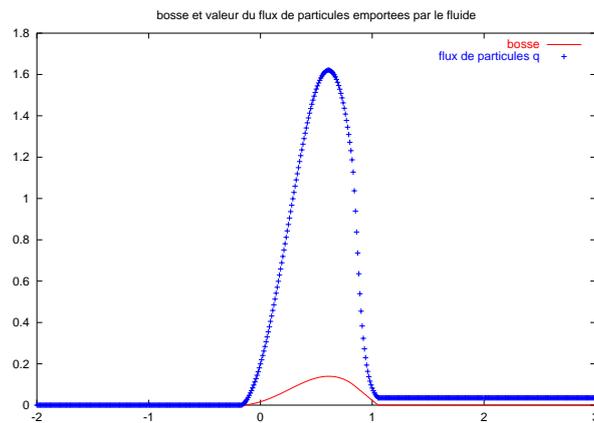
Le pic de $\tilde{\delta}_1$ observé en amont de la bosse est dû à la non-dérivabilité de l'expression mathématique de sa forme. Dans les simulations suivantes, on utilise une formule en cosinus carré, ce qui atténue l'augmentation de $\tilde{\delta}_1$.

FIG. 3.4 – Bosse réelle (\bar{f}) et bosse prolongée ($\bar{f} + \tilde{\delta}_1 Re^{-1/2}$)



On remarque que la bosse prolongée par l'épaisseur de couche limite fait bien apparaître une bulle de recirculation. Si on se réfère à la figure (3.2), la présence de celle-ci, où les vitesses sont plus faibles, coïncide parfaitement avec nos valeurs de \bar{U}_e . Par ailleurs, nous retrouvons le dessin de la figure (2.2).

FIG. 3.5 – Représentation de la bosse et du flux de particules. Ici, la dune perd de la masse

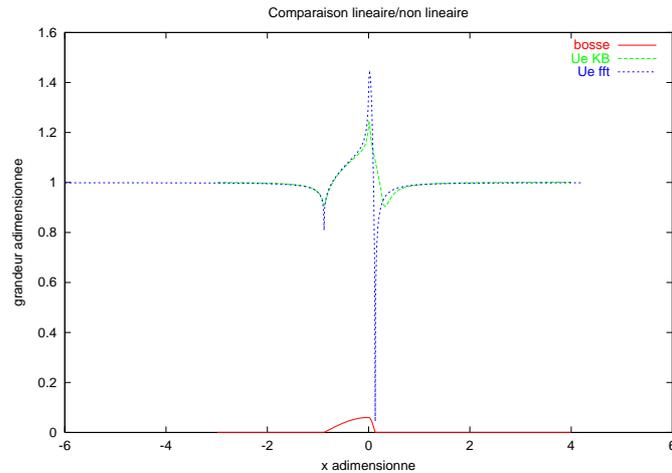


La valeur du flux q , montrée sur le graphique précédent, est cohérente avec nos hypothèses. Avant la bosse, le sol n'est pas érodable : il est donc logique d'avoir un flux nul. Une fois la bosse atteinte, l'arrachement se fait sur la face avant et le dépôt sur la face arrière, ce qui se traduit par une augmentation puis une diminution du flux de particules. Une fois la bosse passée, on considère que le flux reste constant. Cette dernière hypothèse signifie qu'on ne peut ni arracher ni déposer de particules. Une valeur du flux non nulle après la bosse entraîne nécessairement une perte de masse de la dune qui sera plus ou moins importante suivant la valeur de l_{sat} .

3.4 Comparaison des deux méthodes

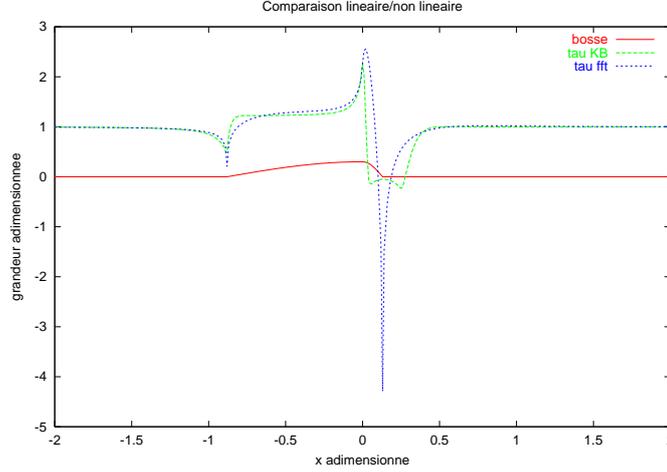
Après avoir réalisé une première résolution avec l'algorithme de Keller Box, on la compare aux résultats obtenus avec la FFT. En effet, comme nous l'avons laissé entendre plus haut, l'algorithme de Keller Box est trop lent pour pouvoir espérer faire avancer la bosse. Si les résultats avec les deux méthodes coïncident, on pourra alors utiliser la FFT pour obtenir le déplacement.

FIG. 3.6 – Comparaison des vitesses \bar{U}_e obtenues par Keller Box et par FFT.



La comparaison des deux méthodes nous donne des résultats similaires, à l'exception de la vitesse résolue par FFT qui est proche de s'annuler. Ce phénomène provient du caractère simplifié du système différentiel résolu. En effet, la FFT résout un système linéaire alors que Keller Box résout un système non linéaire.

FIG. 3.7 – Comparaison du frottement obtenu par Keller Box et par FFT.



On remarque que le frottement obtenu par FFT devient fortement négatif après le sommet de la bosse. Ceci est une réminiscence de la singularité de Goldstein. Le prolongement de la bosse a permis de l’atténuer, mais il ne l’a pas fait totalement disparaître. Au contraire, l’algorithme de Keller Box, qui lui résout le système non linéaire, n’est pas assujéti à ce problème de singularité. Malgré tout, on observe de petites singularités au niveau des changements de pente. Elles sont dues à l’expression même de $\tau \propto vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'}{\bar{x}-\xi} d\xi$ qui fait apparaître la dérivée de f .

À la vue des comparaisons, on peut donc utiliser la résolution par FFT afin de faire avancer la dune.

3.5 Dynamique de la bosse

3.5.1 Relations obtenues grâce aux adimensionnements

Réadimensionnons nos équations afin de trouver des relations entre la longueur, la hauteur, la masse et la vitesse de la bosse. On pose $x = X\bar{x}$, $f = F\bar{f}$, $c = C\bar{c}$, $\tau = \Theta\bar{\tau}$, $q = Q\bar{q}$, $t = T\bar{t}$ et $m = M\bar{m}$. La lettre majuscule correspond à la nouvelle grandeur et celle surmontée d’une barre à la nouvelle variable adimensionnée.

Comme τ_s est une constante, il vient nécessairement que $\Theta = 1$. De plus, comme $q_{sat} \propto \tau$, on a aussi $\Theta = Q = 1$.

En première approximation, on considère que $\tau = u - 1$ et on en déduit alors que $\tau = vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'}{x-\xi} d\xi$. L’adimensionnement de cette dernière relation nous donne $1 = \frac{F}{X} \frac{1}{X} X$ soit $F = X$.

Sachant que la masse de la bosse est définie par $m = \int_{-\infty}^{\infty} f dx$, il vient

$M = FX$, c'est à dire $M = X^2$. Cette dernière relation signifie que :

$$H_b \propto \sqrt{m} \quad (3.11)$$

$$L_b \propto \sqrt{m} \quad (3.12)$$

Reprenons maintenant l'équation d'Exner :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{X}{T} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{1}{X} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit alors que $T = X^2$. Comme $c = \frac{q}{\bar{f}}$, $C = \frac{1}{X} = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Cela signifie que :

$$c \propto \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (3.13)$$

Nous avons donc trouvé trois relations entre la longueur, la hauteur, la masse et la vitesse de la bosse. Nous allons essayer de les retrouver grâce à la simulation.

3.5.2 Résultats numériques

Suite aux relations trouvées dans la section précédente, on trace tout d'abord la hauteur H_b de la bosse et sa longueur L_b en fonction de \sqrt{m} .

Pour les trois graphiques qui suivent, nos paramètres ont les valeurs suivantes : $R_e = 35212$, $\tau_s = 0.47$, $l_{sat} = 0.06$ et $\Theta_{max} = 0.44$.

FIG. 3.8 – Tracé de la relation existant entre H_b et \sqrt{m}

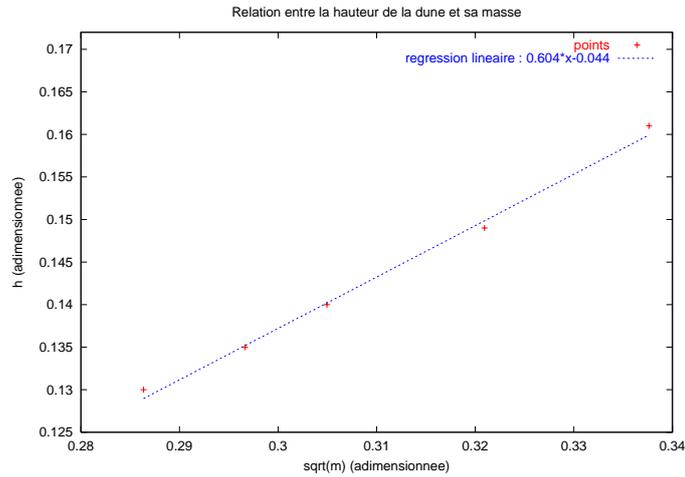
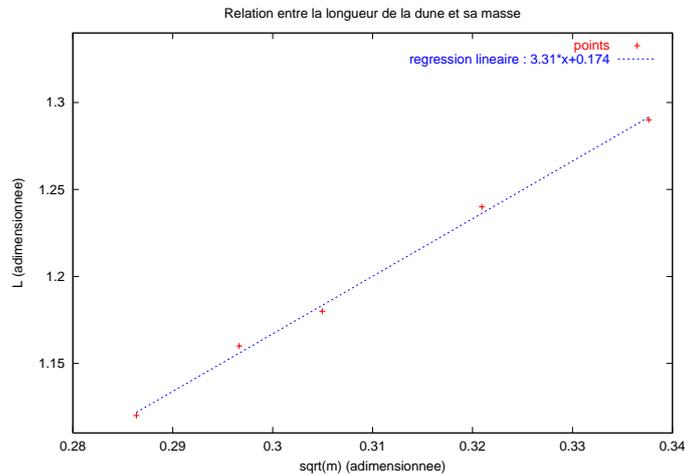


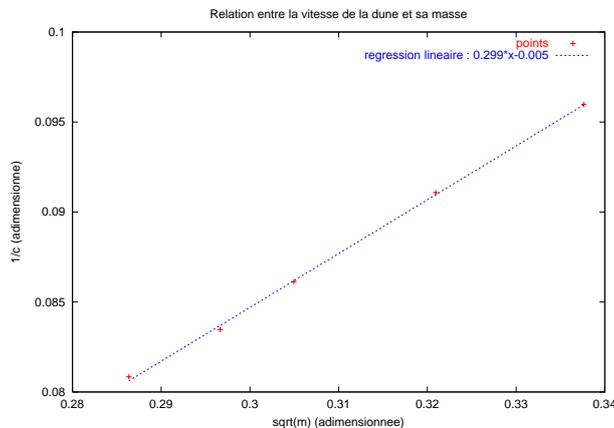
FIG. 3.9 – Tracé de la relation existant entre L_b et \sqrt{m}



On retrouve bien une relation linéaire comme prédit précédemment. On peut remarquer que la longueur et la hauteur ne sont pas nulles pour une masse nulle. En effet, ici, on ne tient pas compte du fait qu'il existe une masse minimale m_s en dessous de laquelle il ne peut pas exister de dune.

Le fait que notre droite de régression linéaire ne passe pas exactement par les points obtenus peut s'expliquer par une erreur numérique. En effet, nous n'avons pas cherché à affiner les calculs en jouant sur Δx et Δt , les pas de temps et d'espace. Par ailleurs, l'approximation faite pour calculer la valeur de la masse peut aussi augmenter cette incertitude.

FIG. 3.10 – Tracé de la relation existant entre $\frac{1}{c}$ et \sqrt{m}

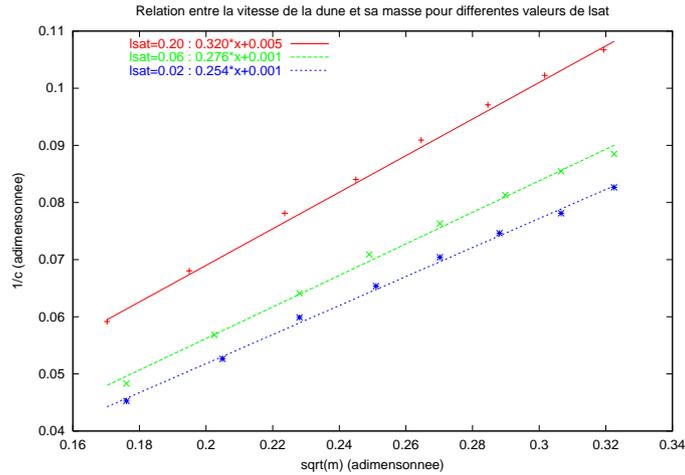


On remarque qu'il existe une masse particulière, disons M , pour laquelle la vitesse devient "infinie". Il est possible que cette masse ait un sens physique. Par exemple, elle pourrait correspondre à la masse seuil m_s évoquée plus haut. En dessous de cette valeur, aucune dune ne pourrait exister. Il serait intéressant de pouvoir évaluer cette valeur de m_s par l'expérience, mais nous faisons face à une difficulté. En effet, les valeurs de l_{sat} et Q_{sat} ne nous sont pas accessibles expérimentalement, alors qu'elles rentrent directement en jeu dans le calcul de M . Il est donc difficile de corréler les résultats théoriques et expérimentaux.

Dans le cas de la simulation numérique, on ne peut déterminer qu'une "limite de masse" m_c au dessus de laquelle la perte de masse sera lente. En effet, la dune modélisée perd toujours de la masse. Un moyen pour mieux quantifier ce phénomène serait de calculer $\frac{\partial m}{\partial t} \frac{1}{m}$.

l_{sat} étant un paramètre modifiable de notre programme, nous avons tracé plusieurs relations entre $\frac{1}{c}$ et \sqrt{m} pour des valeurs de l_{sat} différentes (0.2 m, 0.06 m et 0.02 m). On obtient alors les droites suivantes.

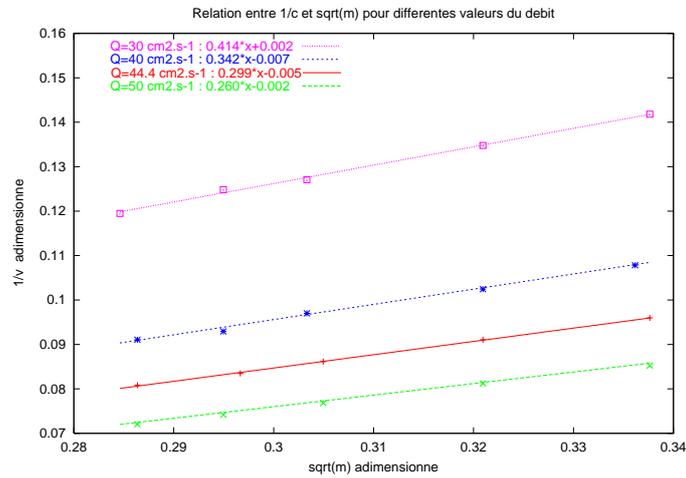
FIG. 3.11 – Tracé de la relation existant entre $\frac{1}{c}$ et \sqrt{m} pour des valeurs de l_{sat} différentes



On remarque que la valeur de l_{sat} influe sur le coefficient en facteur de \sqrt{m} . Une augmentation de l_{sat} entraîne une augmentation de ce coefficient. Cette évolution est cohérente avec l'expérience, car pour un l_{sat} grand, la bosse est plus longue et alors elle se déplace moins vite ($\frac{1}{c}$ augmente). Du fait de la méconnaissance expérimentale de l_{sat} , on ne peut faire ici que des remarques d'ordre qualitatif et non quantitatif.

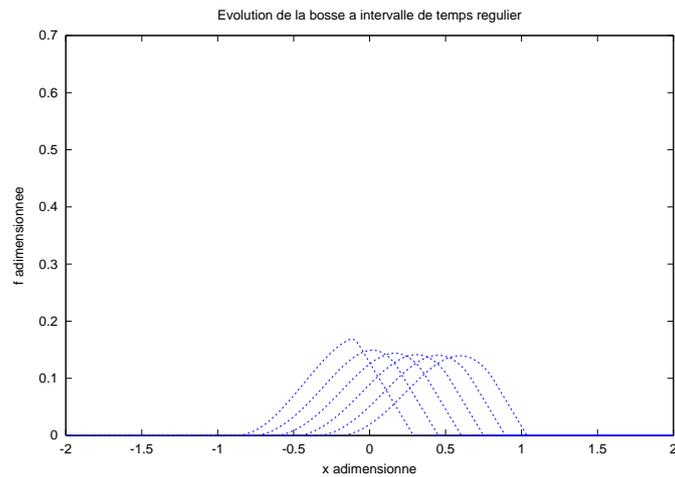
Après avoir fait varier la valeur de l_{sat} , nous avons fait varier la valeur du débit Q de fluide s'écoulant sur la bosse. Il était en effet intéressant de voir comment évolue la vitesse de la dune en fonction de ce paramètre.

FIG. 3.12 – Tracé de la relation existant entre $\frac{1}{c}$ et \sqrt{m} pour des valeurs de Q différentes



On remarque que plus le débit augmente et plus le coefficient de la droite de régression linéaire diminue. Ceci signifie qu'à masse identique, plus le débit est important et plus la vitesse de la dune est élevée.

FIG. 3.13 – Différentes positions de la bosse à des intervalles de temps réguliers



Au début de la simulation, on observe que la forme de la bosse change, avant qu'elle ne se déplace à une vitesse quasi-constante. Une fois ce régime atteint, la bosse progresse sans se déformer.

Chapitre 4

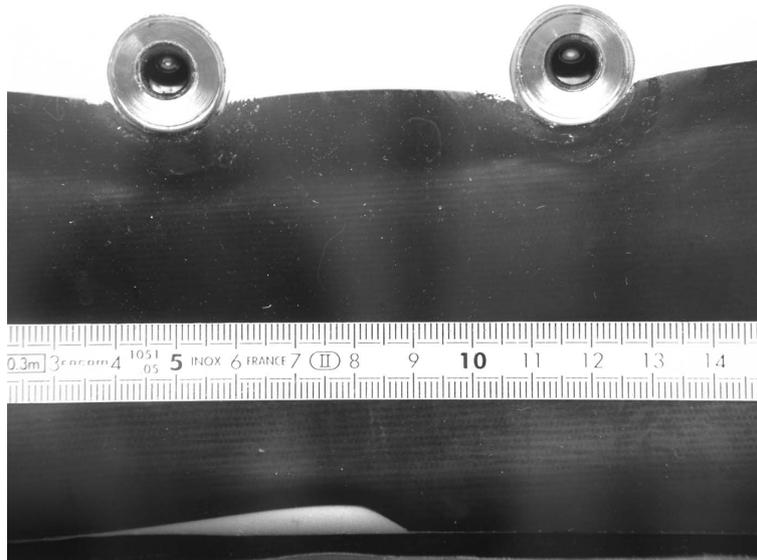
Expériences au laboratoire

4.1 Présentation

Les expériences présentées ici ont été menées avec l'aide de M. Thomas Loiseleux, au Laboratoire FAST de l'Université d'Orsay. Nous disposons d'une cuve de Hele-Shaw telle qu'elle a été présentée en introduction. À l'intérieur, on place une bosse de hauteur $H_b \approx 0.5\text{cm}$ et de longueur $H_b \approx 5\text{cm}$. La hauteur d'eau au-dessus d'elle est d'environ 10cm , ce qui nous permet de considérer qu'elle est "infinie" comparée à H_b . Le paramètre que l'on peut influencer est le débit Q du fluide qui s'écoule au dessus de la bosse. Les expériences sont réalisées pour des tailles de bosses différentes. Ceci nous permet d'évaluer l'influence de la masse.

Les deux seuls grandeurs mesurables sont la hauteur de la longueur de la bosse. En mesurant aussi le temps, nous pouvons avoir accès à la vitesse de la dune.

FIG. 4.1 – Dune en mouvement dans la cuve de Hele-Shaw



4.2 Résultats expérimentaux

Masse (g)	Hauteur (cm)	Longueur (cm)	Vitesse ($m.s^{-1}$)	Débit ($L.min^{-1}$)	Confiance
0.4	0.4	6.2	$9.29 \cdot 10^{-4}$	3.4	moyenne
0.7	0.6	9.5	$6.56 \cdot 10^{-4}$	3.3	bonne
1.0	0.7	9.4	$4.98 \cdot 10^{-4}$	3.3	bonne
1.2	0.8	10.6	$3 \cdot 10^{-4}$	3.1	faible
1.4	0.8	9.7	$4.1 \cdot 10^{-4}$	3.2	bonne

TAB. 4.1 – Caractéristiques d'une dune, une fois le régime stationnaire établi

La colonne "confiance" traduit d'éventuels problèmes lors des manipulations. Pour la première mesure ($m=0.4g$), il est possible que des bulles d'air ait été présentes lors de l'expérience. Pour l'avant dernière ($m=1.2g$), une impureté de taille non négligeable était présente dans la bosse à l'état initial.

On remarque que les vitesses déterminées sont de l'ordre de grandeur de celle calculée plus haut $v = 4.5 \cdot 10^{-4} m.s^{-1}$ (cf. partie 3.3.1). Il faut noter que les dunes perdent un peu de masse pendant l'expérience. En effet, certains grains restent coincés dans le bas de la cuve. (La masse initiale des bosses a été mesurée grâce à une balance).

Comme le nombre d'expériences donnant des résultats convenables est insuffisant, nous reproduisons ici ceux trouvés précédemment par A. Goudichaud ([11]), F. Jusserand et P. Christol ([12]).

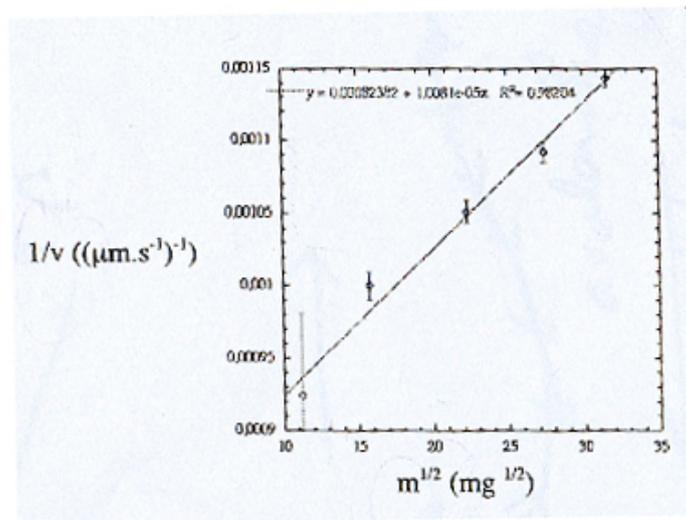


FIG. 4.2 – Relation entre $\frac{1}{v}$ et \sqrt{m} source : A. Goudichaud [11]

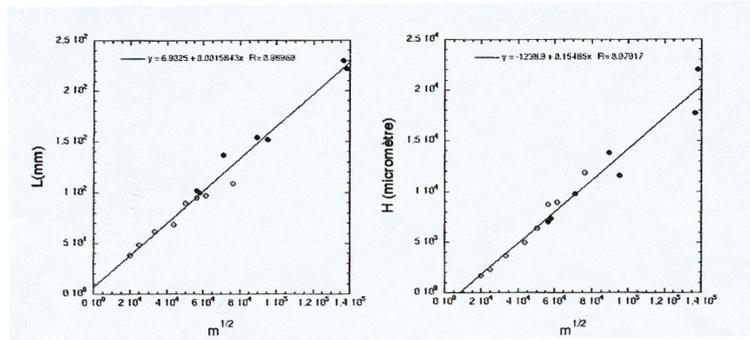


FIG. 4.3 – Relations entre H_b , L_b et \sqrt{m} source : F. Jusserand et P. Christol [12]

4.3 Interprétation

Les mesures réalisées au cours de ces expériences nous ont permis de retrouver les résultats qualitatifs de la partie "résolution numérique". En effet, on constate une évolution linéaire de $\frac{1}{c}$, L_b et H_b en fonction de \sqrt{m} . Cependant, il faut noter que les mesures du tableau sont entachées d'incertitudes, car il est extrêmement difficile de déterminer exactement où sont les extrémités de la bosse. Nos relevés se faisant à la règle, les approximations sont non négligeables. Ces résultats sont donc essentiellement qualitatifs.

Du fait de l'inaccessibilité de l_{sat} par l'expérience, il nous a été impossible de confirmer ou d'infirmer l'évolution prédite par la simulation lorsque l'on fait varier ce paramètre. Une prochaine étape expérimentale pourrait être la détermination de cette constante l_{sat} . Ceci suppose l'imagination d'un protocole expérimental qui n'existe pas encore.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Après avoir repris la théorie actuelle sur le déplacement des dunes, ce travail nous a permis d'affiner, voire de modifier, les programmes permettant la résolution numérique de notre problème. L'objectif principal était d'ajuster nos codes aux paramètres expérimentaux (R_e, L_b, \dots) ce qui a été fait. Nous obtenons d'assez bons résultats d'ordre qualitatifs, ceux-ci étant confirmés par les expériences menées à l'Université d'Orsay. Il reste cependant beaucoup à faire.

Pour ce qui est de la théorie, celle-ci est assez robuste, mais peut-être serait-il possible de compléter le système linéarisé, afin d'obtenir une solution plus proche de celle du système non-linéaire (cf. résolution par FFT et par Keller Box). Par ailleurs, les lois liant le frottement à la forme de la bosse (conservation et Exner) sont essentiellement empiriques et peuvent sûrement être améliorées.

La résolution numérique est satisfaisante en ce qui concerne l'écoulement du fluide. Par contre, la partie liant frottement, flux de particules et forme de la bosse peut-être améliorée. Une première étape pourrait être de jouer sur les pas de temps et d'espace Δt et Δx , le but étant d'avoir le meilleur rapport possible entre temps de calcul et précision.

La partie expérimentale mérite, à mon sens, d'être la plus développée. En effet, les résultats numériques sont pour le moment qualitatifs. Il faudrait mener une série d'expériences afin d'obtenir des résultats quantitatifs. Par exemple, les valeurs de l_{sat} et Q_{sat} , qui sont essentielles pour la résolution numérique, ne sont que peu connues expérimentalement. De même, il faudrait déterminer la masse seuil m_s telle qu'une dune ne peut exister, car nous obtenons numériquement des valeurs de masses auxquelles nous ne pouvons donner de sens physique pour le moment. D'une manière générale, l'expérience nous permettra d'affiner les valeurs des grandeurs d'adimensionnement de nos équations ainsi que celles de nos paramètres. C'est à cette condition que nous pourrions faire des prévisions grâce à la résolution numérique.

À la suite de ce travail, les marges de progression sont grandes dans tous les domaines (théorie, simulation numérique et expérience). Nous avons jeté les premières bases entre la résolution numérique et l'expérience : celles-ci méritent désormais d'être confirmées et approfondies.

Chapitre 6

Annexe

6.1 Retour sur la relation flux saturé/frottement

Nous présentons ici une méthode nous permettant de trouver la forme de la relation $q_{sat} = f(\tau)$ et ainsi de déterminer les adimensionnements nécessaires pour la résolution numérique. Elle s'inspire des travaux de T. Loiseleux et coll. [10] ainsi que de ceux de F. Charru et E. J. Hinch [9].

Considérons une particule sur un plan incliné d'angle β petit sur laquelle un fluide s'écoule. Elle est soumise à son poids apparent ($-\frac{\pi d^3}{6} \Delta \rho g \sin \beta$), à une force de Coulomb ($-\frac{\pi d^3}{6} \Delta \rho g \cos \beta \mu$ où $\mu = \tan \phi$ avec ϕ un angle de friction) et enfin à une force d'entraînement liée à l'écoulement du fluide au dessus d'elle ($3\pi\eta d U_0$ qui est égal à $3\pi\eta\gamma \frac{d^2}{2}$ avec $U_0 = \frac{\gamma d}{2}$).

À l'équilibre on a alors :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi d^3}{6} \Delta \rho g \sin(\beta) - \frac{\pi d^3}{6} \Delta \rho g \cos(\beta) \mu + 3\pi\eta\gamma \frac{d^2}{2} &= 0 \\ \sin(\beta) + \mu \cos(\beta) &= \frac{18\eta\gamma}{2dg\Delta\rho} \\ \sin(\beta) + \mu \cos(\beta) &= \frac{9\tau_c}{dg\Delta\rho} \end{aligned}$$

Avec $\tau_c = \eta\gamma$, un frottement critique. On peut alors définir un nombre de Shields critique qui a pour expression $\Theta_c = \frac{\tau_c}{dg\Delta\rho}$. Dans ce cas, on obtient $\Theta_c = \frac{1}{9}(\sin\beta + \mu \cos\beta)$ ce qui donne $\Theta_{0c} = \frac{\mu}{9}$ pour $\beta = 0$.

En considérant maintenant que $\beta \approx \frac{\partial f}{\partial x} \ll 1$, il vient :

$$\begin{aligned} \Theta_c &= \frac{1}{9}(\beta + \mu) \\ &= \Theta_{0c} \left(1 + \frac{\beta}{\mu}\right) \\ &= \Theta_{0c} \left(1 + \frac{1}{\mu} \frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

Or, on suppose que $q_{sat} = Q_0(\Theta - \Theta_c)$ ce qui donne alors :

$$\begin{aligned}
q_{sat} &= Q_0\left(\Theta - \Theta_c - \frac{\Theta_{0c}}{\mu} \frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= Q_0\left(\frac{\frac{\eta U_0}{\delta} \tau}{\Delta \rho g d} - \Theta_{0c} - \frac{\Theta_{0c}}{\tan \phi} \frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= Q_0 \frac{\frac{\eta U_0}{\delta}}{\Delta \rho g d} \left(\tau - \frac{\Theta_{0c} \delta \Delta \rho g d}{\eta U_0} - \frac{\Theta_{0c} \delta \Delta \rho g d}{\tan \phi \eta U_0} \frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= Q_0 \frac{\frac{\eta U_0}{\delta}}{\Delta \rho g d} \left(\tau - \frac{\Theta_{0c} \delta \Delta \rho g d}{\eta U_0} - \frac{\Theta_{0c} \delta \Delta \rho g d}{\tan \phi \eta U_0} \frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= Q_0 \frac{\eta U_0}{\delta \Delta \rho g d} \left(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

en ayant posé $\tau_s = \frac{\Theta_{0c} \delta \Delta \rho g d}{\eta U_0}$ et $\Lambda = \frac{\tau_s}{\tan \phi}$. En réalisant les applications numériques, on trouve que $\tau_s = 0.48$ (avec $\Theta_{0c} = 0.14$) et $\Lambda = 0.22$ en prenant $\phi = 65^\circ$.

Bibliographie

- [1] P. Hersen (2004) : "Morphogenèse et Dynamique des Barchanes", Thèse de doctorat, École Normale Supérieure - Paris
- [2] P.-Y. Lagrée (2005) : "Interacting Boundary Layer in Hele Shaw cell", non soumis
- [3] K. Gersten & H. Herwig (1992) : "Strömungsmechanik, Grundlagen der Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht", Verlag Vieweg, p 279
- [4] T. Cebeci & J. Cousteix (1999) : "Modeling and Computation of Boundary-Layer Flows", Springer Verlag, p 431
- [5] K. Kroy, G. Sauermann & H. J. Hermann (2002) : "Minimal model for aeolian dunes", Phys. Rev. E66, 031302
- [6] B. Andreotti, P. Claudin & S. Douady (2002) : "Selection of dune shapes and veocities, Part 2 : A two-dimensional modelling, Eur. Phys. J.,B 28, pp 341-352
- [7] K.K.J. Kouakou (2005) : "Instabilités des interfaces écoulement/fond érodable : approches asymptotiques", Thèse de doctorat, Université de Coted'Ivoire, Abidjan, Côte d'Ivoire & Université Pierre et Marie Curie, Paris
- [8] K. Kroy, G. Sauermann & H. J. Hermann (2001) : "Minimal model for aeolian dunes", Phys. Rev. E64, 031305
- [9] F. Charru & E. J. Hinch (2004) : "Ripple formation on a particle bed sheared by a viscous liquid : Part one", soumis au J. Fluid Mech
- [10] T. Loiseleux, P. Gondret, M. Rabaud & D. Doppler (2004) : "Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow", soumis
- [11] A. Goudichaud : "Rapport de deuxième année de magistère", Université Paris-Sud Orsay, Paris
- [12] F. Jusserand & P. Christol (2004) : "Rapport de Projet Personnel en Laboratoire", ENSTA, Paris

Table des matières

1	Introduction	2
2	Modélisation dans une cuve de Hele Shaw	4
2.1	Préambule	4
2.2	Équations de Navier-Stokes pour le fluide	4
2.2.1	Équations de départ	4
2.2.2	Solution fluide parfait $Re \gg 1$	5
2.2.3	Solution de couche limite	6
2.2.4	Résolution du problème complet	6
2.3	Relation entre le frottement et le flux de particules	7
2.3.1	Loi de conservation d'Exner	7
2.3.2	Notion de flux saturé	8
2.3.3	Relation entre le flux et le flux saturé	9
2.4	Synthèse	9
2.5	Remarques	10
3	Résolution numérique	11
3.1	Résolution des équations liées au fluide	11
3.1.1	Résolution par transformée de Fourier rapide	11
3.1.2	Résolution par l'algorithme de Keller Box	12
3.2	La bosse	12
3.3	Exemple de résolution	13
3.3.1	Ordres de grandeur	13
3.3.2	Exemple de résolution sur une dune mesurée	15
3.4	Comparaison des deux méthodes	17
3.5	Dynamique de la bosse	18
3.5.1	Relations obtenues grâce aux adimensionnements	18
3.5.2	Résultats numériques	19
4	Expériences au laboratoire	23
4.1	Présentation	23
4.2	Résultats expérimentaux	24
4.3	Interprétation	25
5	Conclusion et perspectives	26
6	Annexe	27
6.1	Retour sur la relation flux saturé/frottement	27