04 mai 2005

Mécanique des fluides

MF 101

diffusion du tourbillon

Problème adimensionné de diffusion du Vortex (Navier Stokes Instationnaire en cylindrique) :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{r}}\right) \tag{1}$$

avec à $t = 0$, $\bar{v} = \frac{1}{\bar{r}}$ et $\bar{v} = 0$ en $r = \infty$. On cherche à rendre invariant ce problème par dilatation des échelles :

$$\bar{r} = r^*\hat{r}, \quad \bar{t} = t^*\hat{t}, \quad \bar{v} = v^*\hat{v},$$

ce qui donne

$$\frac{v^*}{t^*}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} = \frac{v^*}{r^{*2}}\frac{\partial}{\partial \hat{r}}\left(\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial(\hat{r}\hat{v})}{\partial \hat{r}}\right) \text{ et la condition initiale } v^*\hat{v} = \frac{1}{r^*}\frac{1}{\hat{r}} \tag{2}$$

Si on choisit $v^* = 1/r^*$ et $t^* = r^{*2}$ pour r^* quelconque fixé positif, alors le problème (1) (et ses conditions aux limites) est exactement le même pour les variables avec un "chapeau" que pour les variables avec une "barre". Sous les transformations :

$$\forall r^* \;\; \bar{r} = r^*\hat{r}, \quad \bar{t} = r^{*2}\hat{t}, \quad \bar{v} = r^{*-1}\hat{v},$$

L'équation (1) et ses conditions sont invariantes :

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial}{\partial \hat{r}}\left(\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial(\hat{r}\hat{v})}{\partial \hat{r}}\right) \text{ et la condition initiale } \hat{v} = \frac{1}{\hat{r}} \tag{3}$$

Cherchons maintenant une solution semblable, la solution s'écrit sous forme implicite :

$$F(\bar{r}, \bar{t}, \bar{v}) = 0, \quad \forall r^* > 0$$

ou de par l'invariance :

$$\mathrm{F}(r^*\hat{r}, r^{*2}\hat{t}, r^{*-1}\hat{v}) = 0, \quad \forall r^* > 0$$

ou encore après arrangement des variables (changement de variables) :

$$F(r^*\hat{r}, \hat{t}/\hat{r^2}, \hat{r}\hat{v}) = 0, \quad \forall r^* > 0$$

puisque c'est vrai pour tout r^*, c'est que r^* n'existe pas, donc, si on pose $\eta = \hat{t}/\hat{r^2}$, $\hat{r}\hat{v} = f(\eta)$

Pas de chance ! Le meilleur choix est $\eta = \hat{r^2}/\hat{t}$, et $\hat{v} = f(\eta)/\hat{r}$. On va donc utiliser ce second choix. Le changement de variables $\bar{x}, \bar{t}$ en η nous donne les formules de dérivation suivantes

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{r}}\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}}\frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} = \frac{2\eta}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{\eta}{-\bar{t}}\frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{5}$$

On réécrit l'équation (1) membre à membre compte tenu de $\bar{v} = f(\eta)/\bar{r}$ et des formules de dérivation : $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{\eta}{t} f'$ et de même : $\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{r}}) = \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\frac{2f'}{t}) = \frac{2\partial}{t\partial \bar{r}} f' = \frac{4\eta}{\bar{r}} f''$ d'où l'on déduit que l'équation aux dérivées partielles devient en fait une équation différentielle ordinaire :

$$f' + 4f'' = 0, \quad \text{compte tenu des conditions aux limites} \quad f = 1 - e^{-\eta/4}.$$

On obtient la forme de la vitesse

$$\bar{v} = \frac{1}{\bar{r}}(1 - exp(-\bar{r}^2/(4\bar{t})))$$

Si on avait choisi comme initialement $\eta = \bar{t}/\bar{r}^2$ l'équation se serait écrite : $(1-8\eta)f' - 4\eta^2 f'' = 0$ dont la solution, moins évidente à trouver, est $f = 1 - e^{-1/(4\eta)}$. On en déduit bien entendu la même vitesse $\bar{v} = \frac{1}{\bar{r}}(1 - exp(-\bar{r}^2/(4\bar{t})))$

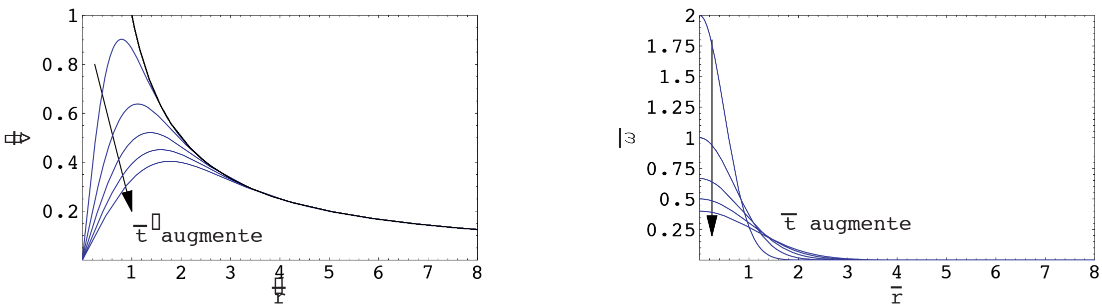

FIG. 1 – Gauche : Evolution de la vitesse en fonction de $\bar{r}$ pour différents temps ($\bar{t} = 5, 10, 15, ...25$ et la donnée initiale $\bar{v} = 1/\bar{r}$. Droite : Evolution de la vorticité en fonction de $\bar{r}$ pour différents temps ($\bar{t} = 5, 10, 15, ...25$)

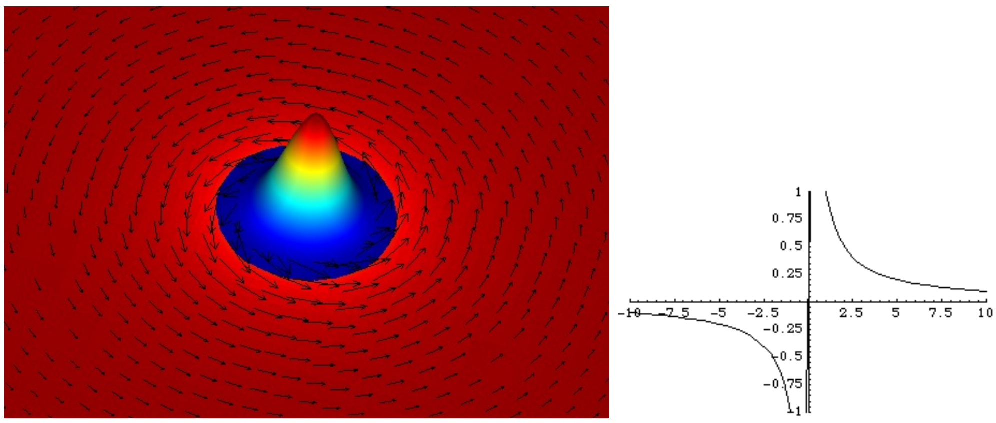

FIG. 2 – vitesse [click to launch the movie, QuickTime Adobe/ Reader required]

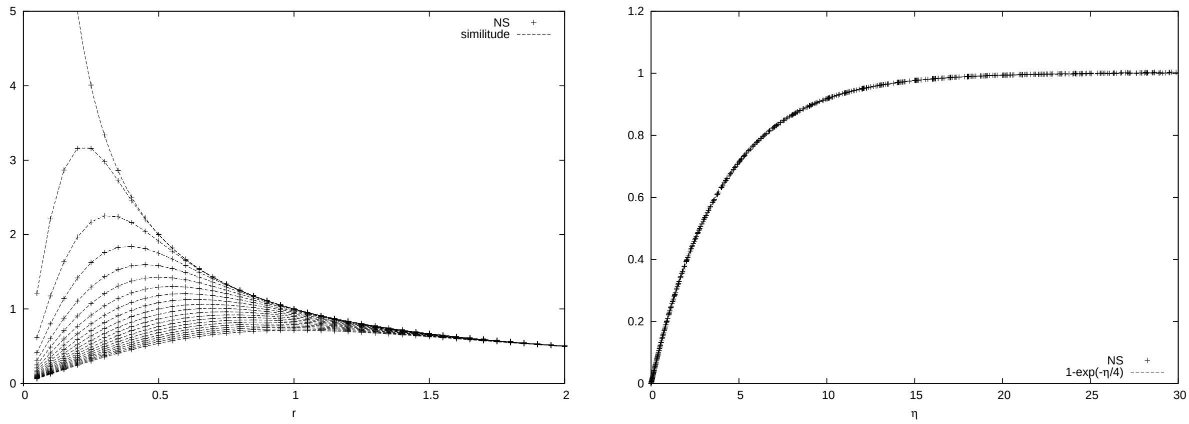

FIG. 3 – Vitesse calculée avec gerris en fonction de $\bar{r}$ pour différents temps (de 0 à 2 tous les 0.1) superposée à la solution analytique à gauche, et retracée en fonction de la variable de similitude (ici $\eta = \hat{r^2}/\hat{t}$) à droite. On note l'excellent accord.

attention faire à la main :

```
file="cut2.dat"
awk 'BEGIN{
  for (a = 0.; a <= 10; a += 0.05)
    print a " " " 0.0  0.0 ";
}' > $file
```

puis lancer le code suivant

```
#
#
# rm cut2.dat;rm vals.data;touch cut2.dat;gerris2D -m vortexNS.gfs |gfsview2D vue.gfv
#
#
#some values
#viscosity
Define nu 0.1
#size of the domain
Define L0 50
# 2^10=1024, dx=0.048
Define Nraf 12

1 0 GfsSimulation GfsBox GfsGEdge {} {
    Time { start = 0 end = 2. }
    PhysicalParams { L = L0 }
    Init { istep = 1 } {
#    Omega = -dy("U")+dx("V")
     Omegav = Vorticity
     eta = (x*x+y*y)/t/4/nu
     }
    EventScript { istart = 0 }{
    file="cut2.dat"
    awk 'BEGIN{
      for (a = 0.; a <= 10; a += 0.05)
        print a " " " 0.0  0.0 ";
    }' > $file
    xterm &
    }

#   Refine Nraf
    # Take a large domain to minimise the influence of boundaries but
    # refine only in a small central disk.
    Refine (sqrt(x*x + y*y) < 1. ? Nraf : Nraf/2)


    SourceViscosity {} nu

    # Initialise a velocity field given by a singular vortex
    Init {} {
     U = -1*y/(x*x+y*y)
```

```
     V = +1*x/(x*x+y*y)
    }

    AdaptVorticity { istep = 1 } { cmax = 1e-3 maxlevel = Nraf }
    OutputTime { istep = 1 } stderr
    OutputSimulation { istep = 5 } stdout
    OutputLocation { step = 0.1 } vals.data  cut2.dat

    OutputPPM     { step = 0.2 } FILM1/vort%6.4f.ppm { v = Vorticity
        min = 0 max = 10
        # Only generate the movie in a small box centered on the origin
        box = -1,-.5,.1,1
    }
 EventScript { start = end } {
cat <<FdF | gnuplot
  set term postscript eps enhanced
  set key bottom
  set output "simU.eps"
   set xlabel '{/Symbol h}'
p[0:30]"< awk '{if((\$1>0)&&(\$1<2)) print \$1,\$2,\$3,\$4,\$5,\$6,\$7,\$8,\$9,\$10}' vals.data"\\
    u (4*\$10):(\$8*\$2) t'NS',1-exp(-x/4) t'1-exp(-{/Symbol h}/4)'
  set term aqua
  replot
FdF

cat <<FdF | gnuplot
  set term postscript eps enhanced
  set output "simS.eps"
   set xlabel '{/Symbol h}'
 p[:2][0:5]'vals.data'u 2:(\$8) t'NS' w p,'' u 2:((1-exp(-\$2*\$2/\$1/4/.1))/\$2) t'similitude'w l,1/x
  set term aqua
  replot
FdF

 }

}
GfsBox {}

# p[:2][0:5]'vals.data'u 2:($8) t'NS' w p,'' u 2:((1-exp(-$2*$2/$1/4/.1))/$2) t'similitude'w l,1/x not
# p[:10][:]'vals.data'u ($2*$2/$1/4/.1):($8*$2),''u 10:($8*$2),1-exp(-x)
# p[:10][:]'vals.data'u ($2*$2/$1/4/.1):($9*$1*.1*2),exp(-x)
#p"< awk '{ if(($1)>1) print $1,$2,$3,$4,$5,$6,$7,$8,$9,$10}' vals.data" u 10:($8*$2),1-exp(-x)
#p[0:10]"< awk '{if(($1>1)&&($1<2)) print $1,$2,$3,$4,$5,$6,$7,$8,$9,$10}' vals.data" u 10:($8*$2),1-ex
#p[:3][:3.5]'vals.data'u 2:($8) t'NS' w p,'' u 2:((1-exp(-$2*$2/$1/4/.1))/$2)t'simil' w l
```