Équation de Saint Venant avec gerris

P.-Y. Lagrée
CNRS & UPMC Univ Paris 06, UMR 7190,
Institut Jean Le Rond d'Alembert, Boîte 162, F-75005 Paris, France
pierre-yves.lagree@upmc.fr ; www.lmm.jussieu.fr/∼lagree

6 février 2010

1 Problème

1.1 Expression de la vitesse

Examinons le problème correspondant à l'écoulement au dessus d'une bosse f donnée, cherchons la perturbation du niveau d'eau associée η, la vitesse supposée constante dans chaque section u et la hauteur d'eau h. Les équations SV en stationnaire en négligeant les frottements sont :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \text{ et } u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \text{ avec } \eta = h + f,$$

la première montre que le débit est conservé $hu = h_0u_0$, et la deuxième montre que $(\frac{u^2}{2} + g\eta)$ est conservé, il s'agit en fait de la loi de Bernoulli, en substituant

$$\frac{\eta}{h_0} = \frac{\eta_0}{h_0} + \frac{u_0^2}{2gh_0}(1 - \frac{u^2}{u_0^2})$$

or comme $\eta = h + f$ et que $\eta_0 = h_0$ cela nous donne une relation implicite entre f et u. Connaissant la vitesse u et $F^2 = \frac{u_0^2}{gh_0}$ on trouve la topographie

$$\frac{f}{h_0} = 1 + \frac{F^2}{2}(1 - \frac{u^2}{u_0^2})) - \frac{u_0}{u}.$$

1.2 Expressions linéaires

Si les perturbations du fond sont faibles $f = \varepsilon\bar{f}h_0$ avec $\varepsilon \ll 1$, on peut linéariser cette expression, $u = u_0(1 + \varepsilon\bar{u}_1 + ...)$, $\eta = h_0(1 + \varepsilon\bar{\eta}_1 + ...)$ au premier ordre

$$\bar{f} - F^2\bar{u}_1 + \bar{u}_1 = 0, \text{ donc } \bar{u}_1 = \frac{\bar{f}}{1 - F^2}.$$

Bernoulli sans dimension $(F^2\frac{(u/u_0)^2}{2} + \eta/h_0) = (F^2\frac{1}{2} + 1)$, linéarisé devient $F^2\bar{u}_1 + \eta_1 = 0$. On peut ainsi exprimer la déviation relative $\eta_1 = \frac{F^2\bar{f}}{1-F^2}$ de la hauteur d'eau, soit au final au premier ordre :

$$\eta = h_0 + \frac{F^2 f}{F^2 - 1}, \quad u = u_0(1 + \frac{(f/h_0)}{1 - F^2}), \quad h = h_0 + \frac{f}{F^2 - 1}.$$

Suivant le régime, la réponse de la hauteur d'eau sera une élévation ou un creusement associée à une décélération ou une accélération.

1.3 Gerris

gerris résout les équations, les notations sont :
U est en fait hu
$H = Zb + P$ (variable 8 = variable 7 + variable 4) H est la position de la surface libre, Zb la forme du fond et P la hauteur d'eau. Donc la vitesse est U/P (variable 5 sur 4).

2 exemples de résolution

On vérifie la relation linéaire pour qq valeurs de F, et la relation $f(u)$. On montre deux exemples avec des chocs.

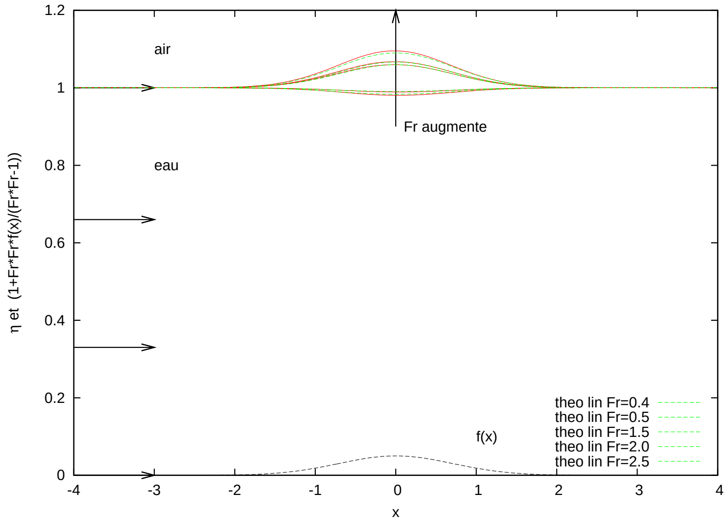

FIG. 1 – Solution linéaire des équations 1D déplacement de la hauteur d'eau.

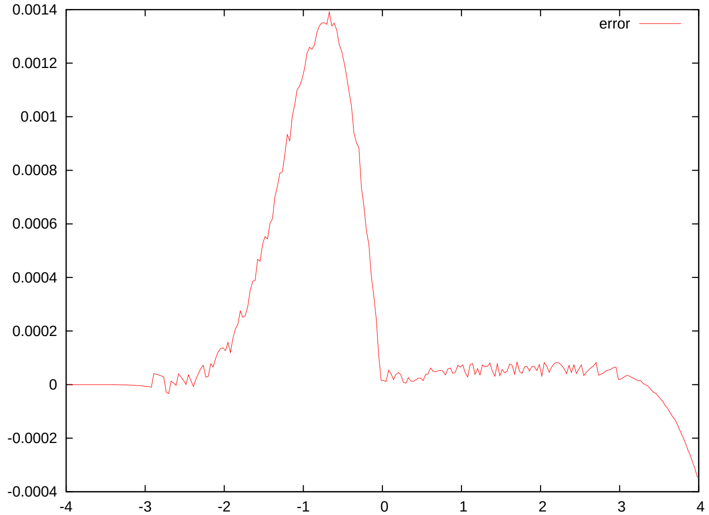

FIG. 2 – Solution linéaire des équations 1D erreur entre le calcul et la formule complète liant f et u.

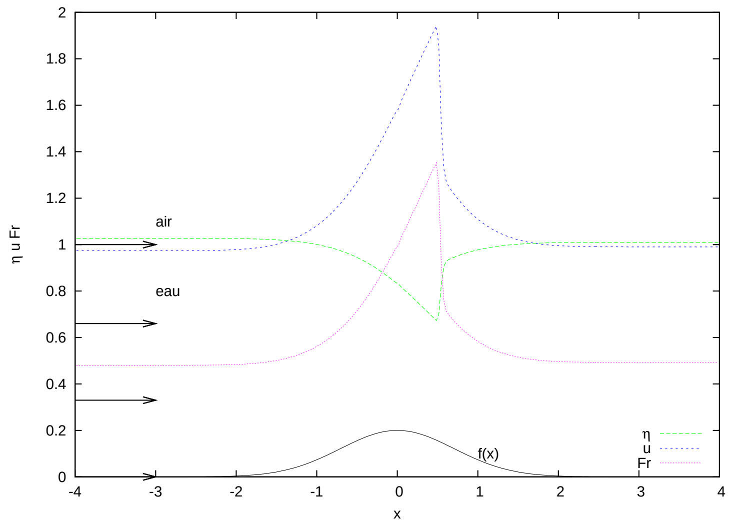

FIG. 3 – Solution avec choc des équations, l'écoulement passe critique au col. LE choc est stationnaire et reste accroché sur la bosse.

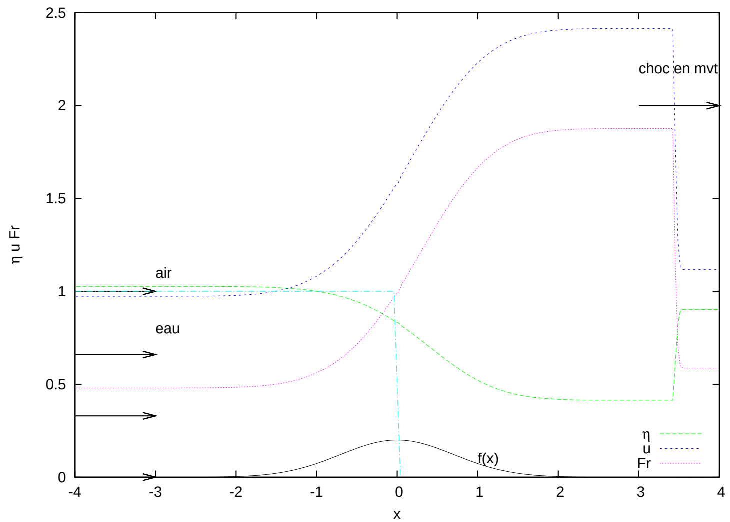

FIG. 4 – Solution avec choc des équations, l'écoulement passe critique au col. Il reste supercritique, le choc se déplace en aval

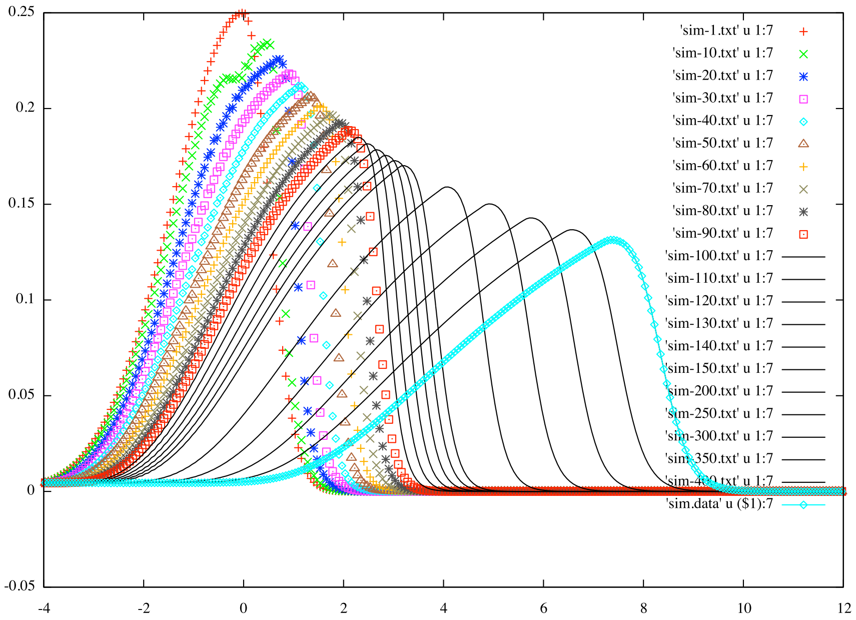

FIG. 5 – volume de contrôle si on veut établir des équations 1D.

FIG. 6 – Déplacement et diffusion d'une onde de diffusion [click to launch the movie, Adobe Reader required]