Équation de Ruissellement: Écoulement de Bagnold pur.

P.-Y. Lagrée
CNRS & UPMC Univ Paris 06, UMR 7190,
Institut Jean Le Rond d'Alembert, Boîte 162, F-75005 Paris, France
pierre-yves.lagree@upmc.fr ; www.lmm.jussieu.fr/∼lagree

10 février 2010

1 Problème

1.1 Film simple

Il s'agit de résoudre une chute de fluide avec une viscosité de type Bagnold le long d'un plan incliné d'angle α (avalanche stationnaire). On en cherche une solution cisaillée simple $u(y)$. Par définition de ce fluide la viscosité est construite avec le gradient de vitesse et la taille du grain :

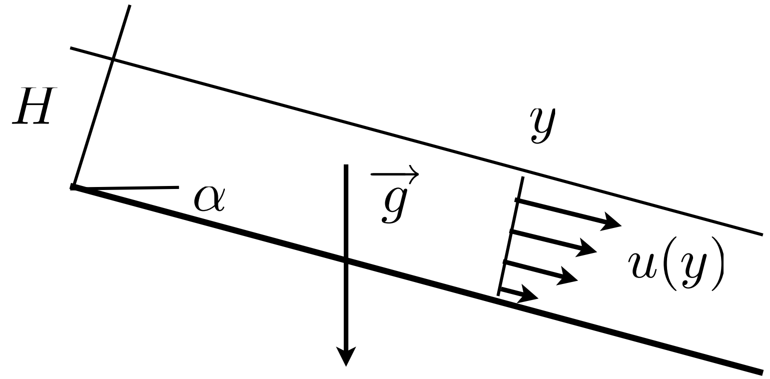
$$\mu = \rho d^2 \frac{\partial u}{\partial y}$$

où d est le diamètre du grain et ρ la densité des grains. L'écoulement est invariant par translation en x pris le long du plan incliné, les équations de Navier Stokes avec cette viscosité particulière s'écrivent ($u(y)$ suivant x et $u = v = 0$ en $y = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ en $y = H$) :

$$0 = 0, \;\; 0 = 0 + \frac{\partial}{\partial y}(\rho d^2 \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}) + \rho g \sin\alpha \;\text{ et }\; 0 = -\frac{\partial}{\partial y} p - \rho g \cos(\alpha).$$

De solution le profil de Bagnold :

$$u = \sqrt{gd}(\sin\alpha \frac{H^3}{d^3})^{1/2}(\frac{2}{3})(1 - (1 - \frac{y}{H})^{3/2}), \;\; v = 0, \;\; p = \rho g H(1 - \frac{y}{H})\cos(\alpha).$$



2 G

Gerris résout :

$$\rho \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = -\overrightarrow{\nabla} p + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\mu(\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}^T)) + \rho \overrightarrow{f}, \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0.$$

qui est écrit sous la forme :

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = alpha\{-\overrightarrow{\nabla} p + \overrightarrow{\nabla} \cdot (MU(\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u} + \nabla\overrightarrow{u}^T))\} + Source(\overrightarrow{u})$$

où $alpha$ est l'inverse de la densité et MU la fonction de viscosité et $Source$ un terme de forçage volumique : la gravité.
Le tenseur de taux de déformation est $D_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, l'invariant D_2 noté D2 dasn gerris est $D_2 = \sqrt{D_{ij}D_{ij}}$, avec $D = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u} + \nabla\overrightarrow{u}^T)$
Pour le cas cisaillé pur $D_{11} = D_{22} = 0$ et $D_{12} = D_{21} = (1/2)(\partial u/\partial y)$, ce qui donne $D_2 = \sqrt{D_{ij}D_{ij}} = \frac{\partial u}{\sqrt{2}\partial y}$.
La viscosité de Bagnold est donc construite avec (voir le cas test "Creeping Couette flow of Generalised Newtonian fluids" :
`http ://gfs.sourceforge.net/tests/tests/couette.html`)

$$\mu = \rho d^2 \sqrt{2} D_2.$$

3 Adimensionement de Gerris

3.1 Adimensionnement

On pose $x = H\bar{x}$ et $y = \bar{y}$ où H sera la hauteur de l'écoulement H/d est le nombre de grains dasn l'épaissuer de la couche H en en mouvement) et $u = \sqrt{gH}\bar{u}$ $v = \sqrt{gH}\bar{v}$ et $p = \rho g H\bar{p}$. on a $\bar{\rho} = 1$ (le 1/alpha) et $\bar{d} = d/H$, la fonction $\bar{\mu}$ vaut $\bar{d}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \bar{d}^2\sqrt{2}\bar{D}_2$.

$$\frac{d\overrightarrow{\bar{u}}}{d\bar{t}} = \frac{1}{\bar{\rho}}(-\overrightarrow{\bar{\nabla}}\bar{p} + \overrightarrow{\bar{\nabla}} \cdot ((\bar{d}^2\sqrt{2}\bar{D}_2)(\overrightarrow{\bar{\nabla}}\,\overrightarrow{\bar{u}} + \overrightarrow{\nabla}\,\overrightarrow{\bar{u}}^T)) + (\sin\alpha\,\overrightarrow{e}_x - \cos\alpha\,\overrightarrow{e}_y)$$

3.2 Bagnold

L'équilibre le long d'un plan incliné re donne bien que

$$0 = 0 + (\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\bar{d}^2(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}})) + \sin\alpha$$

La solution sans dimension est :
$\bar{u} = (\sin\alpha)^{1/2}\frac{1}{d}(\frac{2}{3})(1 - (1-\bar{y})^{3/2})$, $\bar{p} = (1-\bar{y})\cos(\alpha)$. et $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{(\sin\alpha)^{1/2}}{d}\sqrt{1-\bar{y}}$.

4 Résultat

Pour le calcul on se place dasn uen boîte carrée de H par H. On choisit 25 grains dans l'épaisseur (d'où le `Define d 0.04`), l'angle est choisi égal $\pi/4$, d'où `Define alph 0.785398163397448`, on met le $\sqrt{2}$ en dur (`Define s2 1.4142135623731`) On code la fonction de viscosité notée MU avec `Mu = D2*(s2)*d*d ;`. On sauve la dérivée et on vérifie l'expression de D2.

On retrouve la solution exacte. Remarquer l'appel à gnuplot dans le "`run.sh`" qui trace automatiquement le profil en cherchant la valeur de l'angle et de la taille de grain dans le fichier `gfs`.

le calcul se lance avec `run.sh` il se termine au temps 11 :
`step : 12254 t : 11.00000000`

archive des fichiers à la page :
`www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SOURCES/GERRIS/BAGNOLDP/BAGNOLDP.zip`.

retour à la page "gerris par un nul" :
`www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SOURCES/GERRIS` .

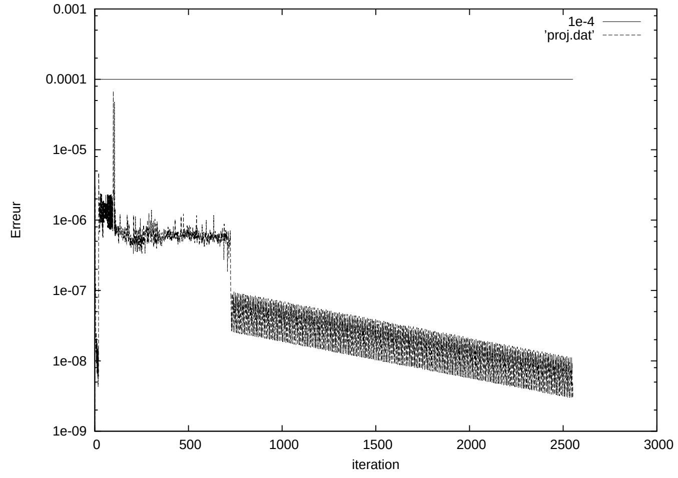


FIG. 1 – Variation d'un itération à l'autre.

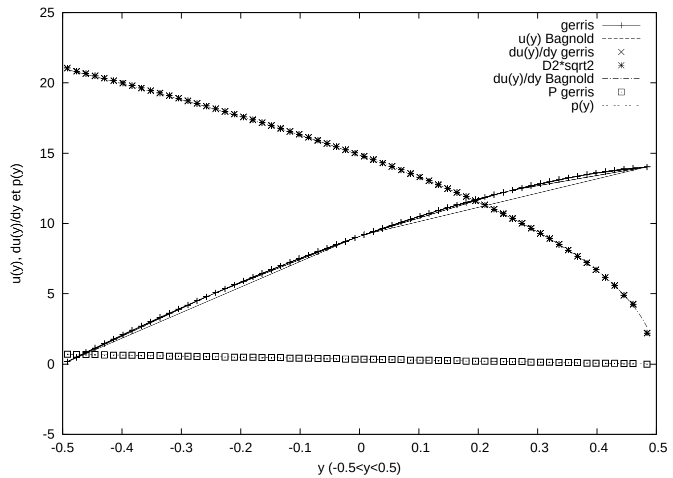


FIG. 2 – Solution exacte et solution de Gerris, pression gradient de vitesse et vitesse. $\bar{d} = 1./25$

5 Code

```
####################################################################
 ####################################################################
# Bagnold par PYL, sauver dans "bag.gfs"
# 02/10
# valeurs de dimension alph=pi/4  25*d=H
Define alph 0.785398163397448
Define d 0.04
Define U0   (1-pow((1-(y+0.5)),1.5))*2./3.*sqrt(sin(alph))/d
Define Nraf 3
Define Nrafp2 6
Define s2 1.4142135623731


1 1 GfsSimulation GfsBox GfsGEdge{} {
# on s'arrete au bout du temps 500 quoiqu'il arrive
  Time {end = 500   }
  Init { istep = 1 } {
    Mu = D2*(s2)*d*d;
 # verification des gradients sauves en  9 et 10 dans sim.data 9:DY 10:DD
    DY = dy("U");
#remarquer le s2=sqrt(2)
    DD = D2*(s2);
    }

# viscosite Mu
  SourceViscosity {   }  Mu {beta = 1}
#  AdvectionParams { gc = 1 }
# densité 1
 PhysicalParams { alpha = 1. }

# au moins 8 cases, soit dx=1/2^3=1/8=0.125
   Refine Nraf
# on rafine a 64 cases soit dx=1/2^6=0.015
   AdaptVorticity { istep = 1 } { maxlevel = Nrafp2 cmax = 1e-2 }

   Init {} { U = U0 }
   Source {} V  -cos(alph)
   Source {} U   sin(alph)


  OutputSimulation { step = 1 } stdout
  OutputTime { step = 1 } stderr

# sortie des valeurs dans un fichier
# 1:X 2:Y 3:Z 4:P 5:Pmac 6:U 7:V 8:Mu 9:DY 10:DD 11:DU
  OutputSimulation { istep = 5 } SIM/sim-%g.txt { format = text }
#test d'arret
    EventStop { istart = 20 istep = 1} U 1e-5 DU
    EventScript { istep = 5 } {
cat <<FdF | gnuplot
  set term postscript eps color 14
  set output "sim.eps"
  !cp SIM/sim-$GfsTime.txt sim.data
#plot [0:2.][0:]'SIM/sim-$GfsTime.txt' u 2:6
  #set term aqua
  #replot
FdF
    }


  OutputProjectionStats { istep = 10 } {
    awk '{
      if ($1 == "residual.infty:") print $3  ;
    }' > proj.dat
  }
  }
#condition
#  périodicité d'où le 1 1 right  et le 1 1 du départ
# en bas u=0 et v=0
# en haut d/dy=0  v=0 ET p=0
GfsBox {  top = Boundary {
        BcDirichlet V 0
        BcDirichlet P 0
    }
     bottom = Boundary {
        BcDirichlet U 0
        BcDirichlet V 0
    }
}
1 1 right
####################################################################
####################################################################
```

Pour lancer : Fichier "run.sh" pour lancer le calcul

```
#!/bin/bash
export LANG=C
echo "lancement du calcul"
mkdir SIM
rm SIM/sim*
rm sim.data

gerris2D -m bag.gfs | gfsview2D vue.gfv

echo "alph=\\">   load.gnu
echo `cat bag.gfs | grep "Define alph" | awk '{ print $3}'`>>load.gnu
echo "d=\\">>   load.gnu
echo `cat bag.gfs | grep "Define d" | awk '{ print $3}'`>>load.gnu
echo "ub(x)=(1-(1-(x+0.5))**1.5)*2./3.*sqrt(sin(alph))/d ">>   load.gnu
echo "ubp(x)=sqrt(0.5-x)*sqrt(sin(alph))/d">>   load.gnu
echo "p(x)=  (0.5-x)*cos(alph) ">>   load.gnu
set title "Bagnold vs Gerris"
echo "plot[:] 'sim.data'u 2:6 t'gerris' w lp,\
ub(x) t'u(y) Bagnold',''u 2:9 t'du(y)/dy gerris',\
''u 2:10 t'D2*sqrt2',ubp(x) t'du(y)/dy Bagnold','\
'u 2:4 t'P gerris',p(x)t'p(y)'" >>load.gnu
cat << "FdF" |gnuplot
set xlabel "y (-0.5<y<0.5)"
set ylabel "u(y), du(y)/dy et p(y)"
l'load.gnu'
    set term post
    set output "prof.ps"
    replot
FdF
ps2pdf prof.ps
cat <<FdF | gnuplot
    set ylabel 'Erreur'
    set xlabel 'iteration'
    set logscale y
    plot 1e-4,'proj.dat'w l
    set term post
    set output "err.ps"
    replot
FdF

ps2pdf err.ps
echo "fin normale ?"
```

Fichier "vue.gfv"

```
  # GfsView 2D
View {
  tx = -0.00777133 ty = -0.232281
  sx = 1 sy = 1 sz = 1
  q0 = 0 q1 = 0 q2 = 0 q3 = 1
  fov = 17.2573
  r = 0.3 g = 0.4 b = 0.6
  res = 1
  lc = 0.001
  reactivity = 0.1
}
Linear {
  r = 1 g = 1 b = 1
  shading = Constant
  maxlevel = -1
} {
  n.x = 0 n.y = 0 n.z = 1
  pos = 0
} T {
  amin = 0 min = 0.25
  amax = 0 max = 0.75
  cmap = Jet
} 0 {
  reversed = 0
  use_scalar = 1
}
Vectors {
  r = 0 g = 0 b = 0
  shading = Constant
  maxlevel = 5
} {
  n.x = 0 n.y = 0 n.z = 1
  pos = 0
} P {
  amin = 1
  amax = 1
  cmap = Jet
} U V {
  scale = 0.1
  use_scalar = 0
}
```