

## Structuration des écoulements de bio organismes. Bio convection.

Il a été reporté plusieurs fois l'observation d'accumulations de micro-organismes formant des structures périodiques. Ces accumulations ont des formes régulières dépendant du micro-organisme de leur concentration et de la profondeur du récipient.

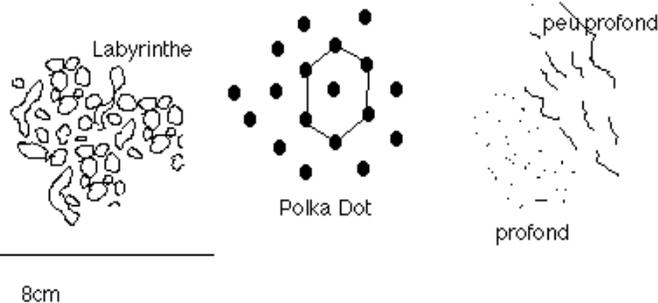
Ce processus découle d'un couplage entre le mouvement réflexe propre des petites bêtes et le mouvement du fluide qui est leur biotope. Il s'agit d'une stratification créée par l'irrésistible mouvement vers le haut des cellules qui provoque une instabilité de type Rayleigh Taylor.

### I- Les micro-organismes

Ces micro-organismes sont ceux que l'on rencontre dans tous les biotopes aqueux (Océans rivières, flaques, fluides dans les animaux...)

On peut citer des algues microscopiques, bactéries, spermatozoïdes. Leur taille est d'environ 1 à 200 $\mu\text{m}$ , et ils sont plus denses que leur milieu d'environ 10%. Leur caractéristique remarquable est qu'ils se déplacent en ondulant, tournant leur flagelle, et en actionnant leurs cils vibratiles. On définit ainsi une vitesse  $V_c$  qui est leur vitesse de nage relative au fluide que l'on peut considérer comme une constante donnée. Le nombre de Reynolds construit sur leur diamètre et cette vitesse (d'environ de 100 $\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) est de l'ordre de  $10^{-2}$ . L'orientation de cette vitesse n'est pas indifférente. Si c'est vers la lumière qu'ils se dirigent, on parle de *phototaxie*, si c'est en direction inverse de leur poids c'est la *gravitaxie* ou *géotaxie*, si c'est vers une concentration chimique *chemotaxie*, mais aussi le cisaillement, le champ magnétique *etc...*

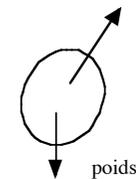
### I-0 exemples d'observations



### I-1 leur dynamique

*A priori*, si les  $\mu\text{org}$ . ne se mouvaient pas, ils tomberaient sous l'action de leur poids, de la poussée d'Archimède et la force de traînée visqueuse, ils sédimenteraient au fond et créeraient ainsi une stratification stable. On pourrait penser qu'ils vont au hasard dans toutes les directions en fait non, il ne se déplacent que dans un sens et leur puissance est telle que la vitesse qu'ils entretiennent est constante et que sa direction est elle même constante et correspond ...

### I-3 gyrotaxie



Du fait de l'existence d'un cisaillement de vitesses, (par ex. si  $\partial u/\partial z > 0$  ou  $\partial w/\partial x < 0$ ) il se crée un couple (proportionnel au volume: bras de levier fois surface) forçant le  $\mu\text{org}$  à tourner en sens inverse des aiguilles d'une montre: ( $\alpha_1$  sont des coefficients qui dépendent de la forme):  

$$(-\alpha_1 \mu u/\partial z + \alpha_2 \mu \partial w/\partial x)v$$

De plus, la bestiole se déplace droit devant elle à la vitesse  $V_c$ , sa poussée est appliquée au centre de poussée au dessus du centre de masse (elles ont les fesses lourdes), il y a donc un couple qui va faire tourner dans le sens inverse le  $\mu\text{org}$

$$(\rho v)hg \sin \theta.$$

Et on suppose que le  $\mu\text{org}$  est en équilibre (old théorie! PK92), vitesse angulaire nulle. Il en résulte que la vitesse n'est plus horizontale mais décalée.

### I-3 équation de conservation associée aux $\mu\text{org}$

On une équation de conservation de la forme:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

pour  $\mathbf{j}$  on choisit trois contributions:

- i) l'entraînement passif des  $\mu\text{org}$ ,  $n \mathbf{u}$ .
- ii) leur mouvement relatif actif  $n \mathbf{V}_c$ .
- iv) on peut aussi associer un vecteur diffusion (une loi de Fick) qui mélange le tout (provenant du choc des molécules d'eau sur les  $\mu\text{org}$ ?),  $-D\nabla n$ . (On prend  $D$  scalaire, mais il serait plus raisonnable de par la dyssimétrie du mouvement de considérer un tenseur).

## II Le fluide

### II-1 discussion des équations

Le fluide (eau) est supposé incompressible newtonien, de densité initiale uniforme  $\rho_0$ .

i) La présence de la suspension de  $\mu\text{org}$  va modifier cette densité qui devient  $\rho_0 + n\nu\Delta\rho$ , où  $\Delta\rho$  est l'excès de densité par rapport à l'eau des  $\mu\text{org}$  et  $n$  leur nombre par unité de volume et  $\nu$  leur (petit) volume.

le terme d'inertie va s'écrire:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = (\rho_0 + n\nu\Delta\rho) \frac{d\mathbf{u}}{dt} \sim (\rho_0) \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

Ce qui veut dire que l'on garde le terme dominant (comme dans l'approximation de Boussinesq).

ii) Le terme de force volumique est donc simplement (puisque le fluide est plus lourd):  $(\rho_0 + n\nu\Delta\rho) \mathbf{g}$ . Il sera ensuite astucieux d'éliminer la partie nivellement barométrique de l'eau au repos en définissant une pression d'excès  $p = p_0 - \rho_0 g z$ . Il ne reste ainsi que:

$$-\nabla p + n\nu\Delta\rho \mathbf{g}.$$

iii) Le tenseur des contraintes visqueuses devrait être lui aussi changé:

- dans les coefficients de transport, il apparaît un terme de couplage des flux (normal par la symétrie de Onsager des coefficients), il peut se manifester par l'intermédiaire des couples existants sur les  $\mu\text{org}$  et restitués au fluide et provoquer une contribution non symétrique au tenseur des contraintes.

- dans le cas classique des particules sphériques passives en suspension: on obtient la correction à la viscosité par la formule d'Einstein (Landau §22). La contribution à  $\sigma_{ij}$  (qui est de l'ordre de  $\mu U/L$ ) est de l'ordre de  $\mu\nu U/L$ .

- une troisième contribution est à envisager est proportionnelle à la poussée du  $\mu\text{org}$ , elle semblerait plus importante que les deux précédentes. Se mouvant à vitesse constante, la force de poussée du  $\mu\text{org}$  est donc au moins égale à l'opposé de la traînée visqueuse qui est environ (formule de Stokes pour une sphère):  $\mu dV_c$  soit donc un terme de contrainte en  $\mu d^{-1} V_c$  par  $\mu\text{org}$ . La contribution de la dilution à  $\sigma_{ij}$  (qui est de l'ordre de  $\mu U/L$ ) est de l'ordre de  $n\nu\mu d^{-1} V_c$ , or on constate que cette contribution n'est pas si petite que cela, est qu'une théorie plus précise nécessitera sa prise en compte (PHK 88).

Il est vraisemblable qu'il faudrait faire une théorie thermodynamique complète de ce milieu avec microtenseur de déformation (c.f. Germain).

Argant de la faiblesse de ces effets nous garderons en première approximation le tenseur des contraintes visqueuses classiques.

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}.$$

iv) l'incompressibilité est toujours supposée (les particules sont aussi incompressibles):

On a donc toujours:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

## II-2 Conditions aux limites:

### II-3 Les équations:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + n\nu\Delta\rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}.$$

bio

-3-

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u} + n\mathbf{V}_c - D\nabla n) = 0 \iff \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla n = \frac{dn}{dt} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}_c n) + D\nabla^2 n.$$

Les équations sont les mêmes que celles de Rayleigh Taylor mis à part le terme source supplémentaire

$-\nabla \cdot (\mathbf{V}_c n)$  qui est égal à  $\partial n / \partial z V_c$  quand les  $\mu\text{org}$  sont strictement *gravitactiques*. Nous toucherons à la fin un mot sur la *gyrotaxie* qui fait tourner le vecteur  $\mathbf{V}_c$  sous l'action des contraintes visqueuses et du moment de rappel du poids.

### III L'instabilité.

#### III-1 L'état de base

En l'absence de mouvement du fluide, on peut trouver un état de base stationnaire qui traduit l'équilibre entre la volonté de remonter à la surface et la dispersion par la diffusion. La solution en exponentielle s'écrit facilement:

$$\partial n / \partial z V_c - D \partial^2 n / \partial z^2 = 0. \text{ etc...}$$

elle fait apparaître une épaisseur  $D/V_c$ .

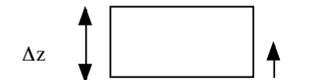
*grasso modo* cette valeur est de 0,05 cm. ( $D = 5 \cdot 10^{-4} (10^{-4}) \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ,  $V_c = 100 \cdot 10^{-6} \text{ms}^{-1}$ ) (valeurs de HPK89)

On estime que pour former ce profil il faut environ un temps égal à celui de la traversée du récipient de hauteur  $l$  pour une algue qui serait au fond. Soit  $t = H/V_c = 10^{-2} / (100 \cdot 10^{-6}) = 100\text{s}$ .

#### III-2 mécanisme de l'instabilité gravitaxique:

Partant d'une solution dispersée, dans un premier temps, les  $\mu\text{org}$  montent vers le haut et constituent leur distribution d'équilibre stationnaire par la compétition entre ce mouvement ascendant et la diffusion. On se trouve alors pour le fluide dans une configuration instable puisque le fluide le plus dense (chargé en  $\mu\text{org}$ ) est au dessus.

Plus précisément, prenons une tranche d'épaisseur  $\Delta z$  à la côte  $z$ , elle contient  $n_0 \nu \Delta z \mu\text{org}$  (par  $\text{m}^2$ ). Si on la perturbe en lui ajoutant  $n\nu\Delta z \mu\text{org}$ , elle se déplace d'une abscisse  $s$ , le PFD s'écrit:



$$(\rho_0 n_0 \nu) \Delta z \frac{d^2 s}{dt^2} = f,$$

la force  $f$  est à évaluer en remarquant que puisque le volume est monté de  $s$  en un temps  $t$ , il s'est alourdi relativement de  $\rho_0 n_0 (z + \Delta z) \Delta \rho s$  et allégé de  $\rho_0 n_0 (z) \Delta \rho s$  (écart de poussée d'Archimède), mais dans le même temps  $t$ , il est arrivé  $n_0 (z+s) V_c t$  et parti  $n_0 (z + \Delta z + s) V_c t \mu\text{org}$  dans ce petit volume, la variation de poids est donc:

$$f = \rho_0 g \Delta \rho \Delta z ((dn_0/dz)s - (dn_0/dz)V_c t).$$

Il y a donc un mouvement vers le haut à vitesse constante  $V_c$  auquel se superpose une perturbation explosive.

$$(\rho_0 n_0 \nu) \Delta z \frac{d^2 s}{dt^2} = \rho_0 g \Delta \rho \Delta z (dn_0/dz) (s - V_c t),$$

bio

-4-

On fait apparaître ainsi une constante de temps (analogue à la fréquence de Brunt - Väisälä)

$$\left(\frac{g \Delta \rho \, dn_0}{n_0 \rho_0 \, dz}\right)^{-1/2}.$$

Si maintenant on examine les effets dissipatifs, on voit qu'ils font apparaître deux temps de diffusion:

$H^2/\nu$  et  $H^2/D$ . Si  $H$  est la hauteur du récipient, et  $dn_0/dz = V_c/D$ .

On fait apparaître un nombre sans dimension de "Rayleigh":

$$R = \left(\frac{g \Delta \rho}{n_0 \rho_0}\right) V_c / D \frac{H^4}{\nu D} = \left(\frac{g \Delta \rho V_c H^4}{\rho_0 \nu D^2}\right).$$

On pourrait choisir une autre échelle pour  $H$ :  $D/V_s$  c'est ce qui a été choisi par CLS75. Les résultats finaux sont bien sûr identiques!

### III-3 mécanisme de l'instabilité gyrotaxique:

Un autre mécanisme à ne pas négliger: la gyrotaxie.

Nous ne l'incluerons pas dans les équations par la suite mais cet effet est crucial. Un mot rapide sur son effet.

En écrivant l'équilibre sous l'action des couples du  $\mu_{org}$ , on obtient l'expression de l'angle de rotation du vecteur direction:

$$\sin \theta \sim \left(\frac{\mu}{\rho h g}\right) (\alpha_1 \partial w / \partial z - \alpha_2 \partial w / \partial x).$$

$B = \mu \alpha / 2 \rho h g$  est appelé rapport gyrotaxique, et  $G = BD/H^2$  est le nombre sans dimension associé.

On comprend ainsi mieux qu'en l'absence d'effet gyrotactique la particule monte verticalement puisque son centre de poussée est au dessus de son centre de gravité.

Si on place des  $\mu_{org}$  gyrotactiques dans un écoulement cisaillé, ils se dirigent dans le sens du minimum de cisaillement (dans un tuyau en régime de Poiseuille il se concentrent au centre).

Cet effet gyrotactique est à l'origine d'une seconde instabilité (K86 pour l'explication simple, et PHK88 pour le cas où on par d'une solution uniforme sans stratification). Dans le cas très visqueux, si on se donne une perturbation de  $w(x)$ , les  $\mu_{org}$  vont se diriger vers les maxima locaux, et entraîner encore plus le fluide dans sa chute:

$$\mu \partial^2 w / \partial x^2 - n \nu \Delta \rho g, \\ \partial_t n + \partial_x (-B \partial w / \partial x - D \partial n / \partial x) \sim 0.$$

donc:

$$\partial_t n - (B \nu \Delta \rho g / \mu) n - D \partial^2 n / \partial x^2 \sim 0.$$

La diffusion calme le jeu mais l'effet gyrotaxique provoque l'instabilité, d'où l'article de HPK89 qui tient compte des deux effets.

### III-4 Les équations adimensionnées:

On mesure les vitesses avec  $V_c$ , les hauteurs avec  $H$  (HPK89), le temps en découle.

On fait apparaître un nombre de Rayleigh. et le nombre de Schmidt égal au rapport des diffusivités.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

$$S^{-1} \frac{d \mathbf{u}}{dt} = -\nabla p - R n \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{u}.$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{\partial n}{\partial z} + \nabla^2 n.$$

+C.L.

### III-5 Linéarisation

on cherche une perturbation d'ordre  $\epsilon$  à la solution de base:

$$\mathbf{u} = 0 + \epsilon \mathbf{u}', p = 0 + \epsilon p', n = \epsilon e^{dz} + \epsilon n'.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad S^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla p' - n' R \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{u}'.$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + w' d e^{dz} = -d \frac{\partial n'}{\partial z} + \nabla^2 n'.$$

avec les C.L.

Remarque: on peu proposer un choix différent pour la dimension de  $n' \rightarrow 1/R$  et de  $p$ : ce qui change la place de  $R$  (Drazin et Landau préfèrent le précédent choix pour Rayleigh Bénard pur).

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla p' - S n' \mathbf{e}_z + S \nabla^2 \mathbf{u}'.$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + R w' d e^{dz} = -d \frac{\partial n'}{\partial z} + \nabla^2 n'.$$

### III-6 Décomposition en modes propres.

Après manipulations on trouve une équation pour  $w'$ ,

et une autre liant  $w'$  et  $n'$ .

c.f. Drazin & Reid p39

On cherche des modes propres: une croissance en  $\exp(\sigma t)$  et comme le problème ne dépend pas de  $x$  et  $y$ , on cherche une solution en:

$$w' = W(z) f(x, y) e^{\sigma t}, \quad n' = \Phi(z) g(x, y) e^{\sigma t}.$$

en prenant la deuxième on voit que:

$$f/g = \text{constante et } (\partial_x^2 + \partial_y^2) g = -k^2 g,$$

est une bonne idée, on prend  $f=g$ .

$$\left(\frac{\sigma}{S} + k^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) W = -R k^2 \Phi.$$

$$\left(\frac{\sigma}{S} + d \frac{d}{dx} k^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \Phi = -d e^{dz} W.$$

+ C.L.

=> en faire une ...

### IV Résolution complète, Résultats.

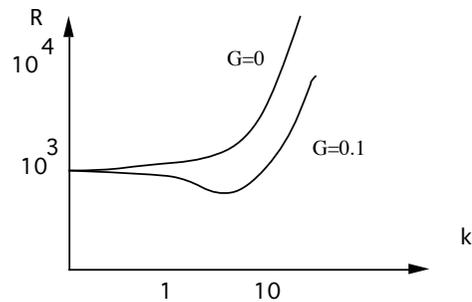
La résolution n'est pas simple, mais en conclusion on peut montrer que la courbe neutre est en:

$$R = 720 (1 + d/2 + (13/105 + 17 k^2/462) d^2 + \dots) \quad (4.20) \text{ HPK 89}$$

qu'il existe un nombre de Rayleigh critique tel que le nombre d'onde critique relatif est infini:

de même on peut faire une analyse en supposant la couche profonde: même résultat  $k=0$ , et le  $R$ :

$$R = 2d^4 + \dots$$



Une résolution à  $d$  quelconque fait apparaître des courbes de la forme (ici pour  $d=1$ ,  $R_c=1185$ ). A chaque fois, le nombre d'onde critique est  $k=0$ .

L'introduction de la gyrotaxie permet de réduire le nombre de Rayleigh critique et de sélectionner une longueur d'onde critique environ égale à l'épaisseur  $H$  ( $G=0.1$ ,  $d=1$ ,  $k_c=3.5$ ,  $R_c=858$ ).

On calcule aussi  $\sigma_{\max}$ =la valeur maximale du taux de croissance exponentiel.

HPK89 notent que la prédiction n'est pas mauvaise, le problème est bien sur que l'on connaît mal les valeurs des différents paramètres qui interviennent.

En résumé, pour une expérience typique (HPK89), on dira que l'on mélange le fluide de manière uniforme à la vitesse angulaire  $\Omega$  ( $=1t/s$ ), il se ralentit au bout d'un temps  $(H^2\Omega/\nu)^{1/2}/\Omega \sim 10s$ , en une centaine de secondes le nivellement se produit (comme nous l'avons déjà dit), le temps caractéristique pour que les structures apparaissent est environ  $H^2/(D\sigma_{\max}) \sim 4s$ .

**remarque:**

on a supposé que les valeurs propres étaient telles que  $\sigma=0$ , mais on peut avoir une oscillation (surstabilité), le mécanisme est présenté par HPK89, quoique jamais observé.

**Bibliographie**

HPK89

Hill Pedley Kessler (1989)

Growth of bioconvection patterns in a suspension of gyrotactic microorganisms in a layer of finite depth

JFM 1989, vol 208, PP509 543

K86

Kessler (1986),

Individual and collective fluid dynamics of swimming cells

J. Fluid Mech 1986, v173 pp 191 -205

PHK88

Pedley Hill Kessler (1988), The growth of bioconvection patterns in a uniform Hydrodynamic suspensions of gyrotactic s microorganisms

J. Fluid Mech 1988, v195 pp223-237

PK92

bio

Pedley Kessler (1992), Hydrodynamic phenomena in suspensions of swimming microorganisms  
Ann Rev Fluid Mech 1992, 24 313 358

Landau

Drazin Reid

dec 95

bio