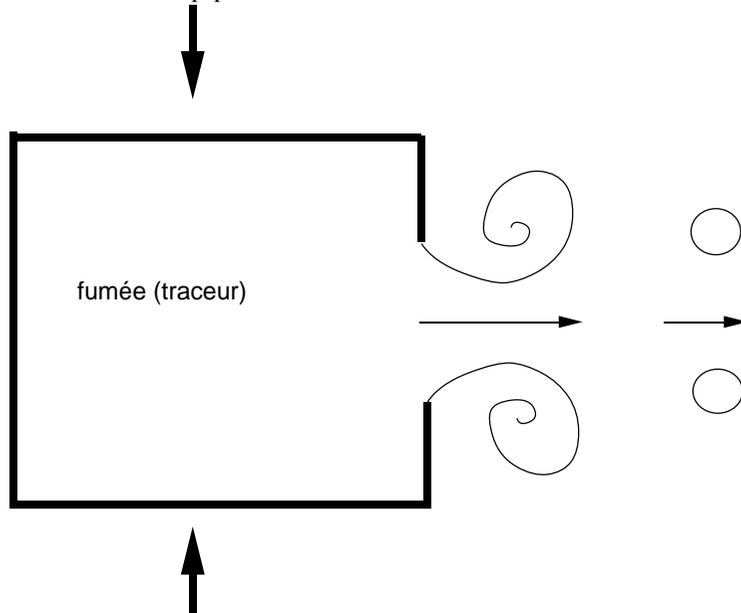


## Stabilité de Vortex

Après avoir étudié n vortex, on regarde maintenant un vortex tout seul. peut il être il est instable?

### Manip

- On fait la manip de la caisse à vortex (cube de 55cm trou de 33cm). La caisse est remplie de fumée d'encens et de papier d'arménie.



On crée la structure en frappant sur les côtés de la boîte. Le tourbillon se déplace par "auto induction". C'est comme les deux vortex ponctuels en 2D.

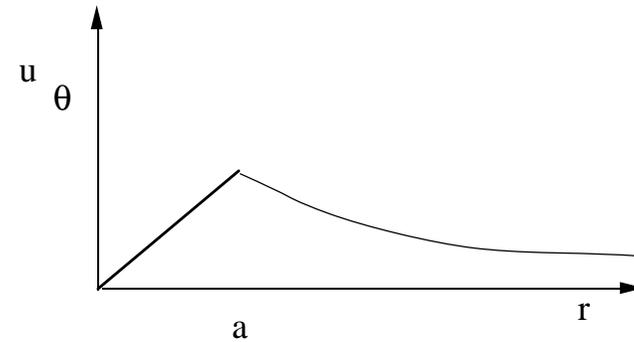
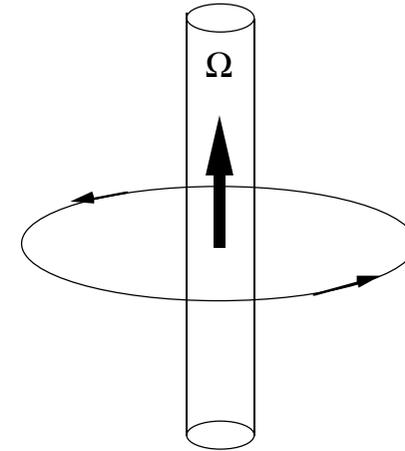
- idem dans une cuve à eau.
- idem avec l'emballage du paquet de cigarettes
- Manip ENS

### définition

Vortex: On appellera vortex une région de vorticité concentrée.

### exemples

Le vortex de Rankine



Une solution exacte des équations d'Euler.

$u_\theta = \Omega r$  (rotation rigide pour  $r < a$ ).

$u_\theta = \Omega a^2 / r$  pour  $r > a$ , champ de vitesse de vortex singulier ponctuel.

si la viscosité n'est pas nulle...

On peut vérifier que toute solution de la forme

$$\underline{U} = V_\theta(r) \underline{e}_\theta + W(r) \underline{e}_z$$

est solution des équations d'Euler .

On va travailler par la suite sur des écoulements à symétrie axiale et de rotation autour de l'axe:

$$\underline{U}_B = V_\theta(r) \underline{e}_\theta$$

On cherchera, de par les invariances, des modes normaux de la forme:

$$u(r) e^{-i\omega t + i\alpha z + in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

Remarque  $n$  qui est entier (périodicité imposée).

Le système

continuité et les moments

On essaye d'utiliser les symétries: on écrit les équations d'Euler en cylindriques.

suivant  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  sans oublier la continuité. On ne met pas de forces de masse.

On vérifie si  $U_B$  convient bien, oui! Et on trouve en plus la pression centripète liée à la force centrifuge.



Les tourbillons correspondent à des régions de basse pression. cf la manip de la bouteille avec un trou. Le tourbillon est matérialisé par les bulles qui correspondent à la région de basse pression.

On écrit ensuite écoulement de base plus perturbation. Remarque que l'équation de continuité est linéaire (il n'y a plus la solution de base dedans).

En revanche les termes non linéaires font réapparaître la solution de base dans l'équation des perturbations. De même la pression de base disparaît.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{U_B + u_\theta'}{r} \frac{\partial}{\partial r} + u_r' \frac{\partial}{\partial r} + u_z' \frac{\partial}{\partial z}.$$

Décomposition en modes normaux

on trouve le problème aux valeurs propres. avec  $\alpha$   $\omega$  et  $n$ . On va chercher le spectre  $\omega(n, \alpha)$ . Cela correspond aux solutions non triviales.

## ÉQUATIONS DE NAVIER STOKES EN CYLINDRIQUES:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{Du_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu (\nabla^2 u_z)$$

avec

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Couette Taylor

Écoulement de base:  $u_r = u_z = 0$   $u_\theta = U_\theta(r)$   $p = P(r)$

$$0 = 0$$

$$-\frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$$

$$0 = \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} U_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_\theta - \frac{U_\theta}{r^2} \right)$$

$$0 = 0$$

$$v = 0 \quad U_\theta(r) \text{ quelconque}$$

$$\text{sinon } U_\theta(r) = Ar + B/r$$

$$A = (\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) / (R_2^2 - R_1^2) \quad B = -(\Omega_2 - \Omega_1) R_2^2 R_1^2 / (R_2^2 - R_1^2)$$

Montrer film ESPCI/ manip/ Film US

### Critère de Rayleigh (1880)

énoncé

Une CNS pour qu'il y ait stabilité linéaire vis à vis des perturbations axisymétriques est que le carré de la circulation ne décroisse pas

Instabilité si et ssi  $r_1 < r < r_2 \Rightarrow r_0 / d(\Gamma^2)/dr < 0$ .

instabilité si discriminant de Rayleigh négatif  $r^{-3} d(\Gamma^2)/dr$ .

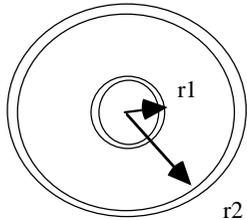
note: on fait du non visqueux dans un premier temps (ce qui revient à dire que les perturbations on un temps caractéristique plus court que le temps visqueux)

### approche heuristique (V.K. )

On réécrit les équations du mouvement en multipliant par r la composante orthoradiale:

$$\frac{D}{Dt}(ru_\theta)=0.$$

(On retrouve un cas particulier du théorème de Kelvin sur la conservation de la circulation:  $ru_\theta$ )



On échange les deux anneaux (c'est une perturbation comme une autre...)

contraintes: ->conservation de la masse et conservation de la circulation

On se pose la question de la stabilité; va t il rester là ou partir?

=> on raisonne en termes de forces: force centrifuge/...

à t=0 on a l'écoulement de base: force centrifuge=force centripète

$$u_i^2/r_i^2 = \rho dp_i/dr \text{ en } i=1,2$$

On l'écrit avec la circulation:

$$\frac{\Gamma_i^2}{4 \pi^2 r_i^3} = \frac{dP}{dr} \Big|_i$$

lors du passage de 1 à 2

La force centrifuge compte tenu de la conservation devient:

$$\frac{\Gamma_1^2}{4 \pi^2 r_2^3}$$

Le gradient de pression est toujours le même celui de  $r_2$ :

$$\frac{dP}{dr} \Big|_i$$

Mais ce gradient est toujours l'ancien  $\frac{\Gamma_2^2}{4 \pi^2 r_2^3}$ .

si Force centrifuge > gradient centripète =>  $\Gamma_1^2 > \Gamma_2^2$ .

dans ce cas l'anneau qui a commencé à se déplacer continue => Instabilité.

On vient de démontrer le critère de Rayleigh à la main.

Il y a une approche du même type due à Rayleigh lui-même mais en utilisant l'énergie.

### démonstration

Perturbations axisymétriques:

$$(u'_r, u'_\theta, u'_z, p) = (u'_r, u'_\theta, u'_z, p) e^{st + i k z + i n \theta}$$

axi n=0.

Dans le cas Euler on trouve:

$$s \begin{pmatrix} u'_r \\ u'_\theta \\ u'_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\Omega r^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_r \\ u'_\theta \\ u'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -dp/dr \\ 0 \\ -ikp \end{pmatrix}$$

On diagonalise l'opérateur de convection.

Une des valeurs propres est 0 (0,0,1) (n°3)

les deux autres sont de signe opposé +/-  $\sqrt{-\phi}$  avec  $\phi = r^{-3} d(\Gamma^2)/dr$ . (n° 1 et 2)

les vp associés sont (1, +/-  $\sigma/2\Omega$ , 0)

on a par exemple par ce changement de base:

$$u_1 = u'_r/2 + \Omega/\sigma u'_\theta \text{ etc...}$$

$$(s - \sigma) u_1 = -1/2 dp/dr$$

$$(s + \sigma) u_1 = 1/2 dp/dr$$

$$s u_3 = -i k p$$

$$1/r(d/dr)(ru_1 + ru_2) + i k u_3 = 0. \quad (\text{éq } 1, 2, 3, 4)$$

Si on peut oublier la pression, la solution sera localisée:

$$u = e_1(r_0) \delta(r-r_0) e^{\sigma(r_0)t}$$

Démontrons le critère de Rayleigh en exhibant une solution qui est un mode localisé autour de  $r=r_0$ , et on suppose que  $\sigma$  est positif et on prend le maximum de ce  $\sigma$ . Si on peut construire une solution autour de ce point...

On considère des k grands (localisation en  $r_0$ ),

$$s = \sigma(r_0) - \frac{1}{k} s_1 + \dots \quad n_s > 0$$

localisé, on ne sait pas encore la puissance du développement

$\eta = k^n(r-r_0)$  on est au voisinage de  $r_0$ . mode localisé.

$$u_1 = U_1(\eta) \quad u_2 = k^{n_2} U_2(\eta) \quad u_3 = k^{n_3} U_3(\eta) \quad p = k^{n_p} P(\eta)$$

$U_i$  et  $P$  sont  $O(1)$

$$\text{éq } 3 \Rightarrow n_3 = n_p + 1$$

$$\text{éq } 2 \Rightarrow n_2 = n_p + n$$

$$\text{éq } 1 \& 2 \Rightarrow n_2 < 0$$

$$\text{éq } 4 \Rightarrow n = n_3 + 1$$

éq 1 =>

$$(s - \sigma) u_1 = \sigma(r_0) - \frac{1}{k} n_s - (\sigma(r_0) + (r-r_0) d\sigma/dr + 1/2 (r-r_0)^2 d^2\sigma/dr^2 + \dots$$

les  $\sigma(r_0)$  s'en vont et aussi la dérivée première =>  $n_s = 2n$ .

Enfin  $-n_s = n + n_p$  est obtenue avec le RHS de 1.

On en déduit:

$$u_1 = U_1(\eta) \quad u_2 = k^{-1} U_2(\eta) \quad u_3 = k^{-1/2} U_3(\eta) \quad p = k^{-3/2} P(\eta) \quad \text{et } \eta = \sqrt{k}(r-r_0)$$

On en déduit l'équation pour  $U_1$  (les autres suivent...)

$$-(s_1 + 1/2 (\eta)^2 d^2\sigma/dr^2) U_1 = -1/2 dp/d\eta?$$

$$\sigma(r_0) U_3 = -i P$$

$$dU_1/d\eta + U_3 = 0.$$

=>

$$1/2 \sigma(r_0) (d^2/d\eta^2) U_1 + (s_1 + 1/2 (\eta)^2 d^2\sigma/dr^2) U_1 = 0$$

Solution générale: polynômes de Hermite...

$$U_1(\eta) = \exp(-\beta\eta^2/2) \quad \text{avec } s_1 = \beta\sigma(r_0)/2; \quad \beta = (-\sigma''(r_0)/\sigma(r_0))^{1/2}$$

D'où mode instable localisé:

$$U_1(\eta) = \exp(-(-\sigma''(r_0)/\sigma(r_0))^{1/2} \eta) \exp((\sigma(r_0) - s_1/k)t)$$

On vient de voir comment créer un mode ..

### Application à Couette Taylor

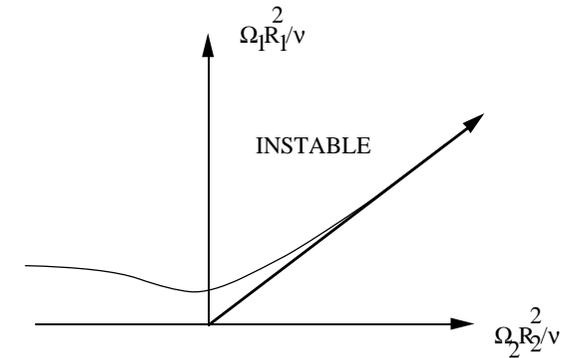
$$\Gamma^2 = (A r_2 + B)^2$$

si  $\Omega_1 > 0$   $\Omega_2 > \Omega_1 > 0$  le module de  $\Gamma$  croît => stable

si le cylindre extérieur est contrarotatif Instable

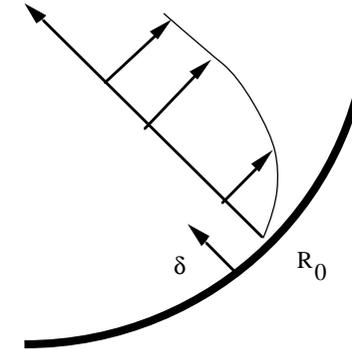
si corotatif il faut discuter de la circulation si  $\Gamma(R_1) < \Gamma(R_2)$  stable ...

Tracer  $\text{abs}(\Gamma)$  en fonction de  $r$  et discuter. les cas tjrs instable/ stable et le cas instable d'un certain côté.



### Cas Görtler

couche limite avec effet centrifuge déstabilisation par la force centrifuge



Discriminant de Rayleigh

$$r = R_0 + x \delta$$

avec un grand rayon de courbure par rapport à l'épaisseur de couche limite

on trouve:

$$\phi(x) = \frac{1}{R_0 \delta} \frac{du^2}{dx} + \dots$$

Dans la couche limite  $u'' < 0$  instabilité de Görtler

tourbillons longitudinaux (cf film de ESPCI)

ÉQUATIONS DE NAVIER STOKES EN CYLINDRIQUES:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{Du_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu (\nabla^2 u_z)$$

avec

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Écoulement de base:  $u_r = u_z = 0$   $u_\theta = U_\theta(r)$   $p = P(r)$

$$0 = 0$$

$$-\frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$$

$$0 = \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} U_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_\theta - \frac{U_\theta}{r^2} \right)$$

$$0 = 0$$

$v = 0$   $U_\theta(r)$  quelconque

sinon  $U_\theta(r) = Ar + B/r$  (Couette Taylor)

$$A = (\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) / (R_2^2 - R_1^2) \quad B = -(\Omega_2 - \Omega_1) R_2^2 R_1^2 / (R_2^2 - R_1^2)$$

Perturbations:  $(u'_r, U_\theta + u'_\theta, u'_z)$   $P + p'$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial t} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - 2 \frac{U_\theta}{r} u'_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u'_r - \frac{u'_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial u'_\theta}{\partial t} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \left( \frac{dU_\theta}{dr} + \frac{U_\theta}{r} \right) u'_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \nu \left( \nabla^2 u'_\theta - \frac{u'_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial u'_z}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu (\nabla^2 u'_z)$$

perturbations axisymétriques:  $(u'_r, u'_\theta) = (u, v) e^{st + ikz}$

$$\left( \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) - k^2 \right) - s \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) - k^2 u = 2k^2 \frac{U_\theta}{r} v$$

$$\left( \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) - k^2 \right) - s v = \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \right) u$$