

Chapitre 4

Cours de DEA de Mécanique Filière 2, UPMC.

Introduction à la Stabilité Hydrodynamique.

P.-Y. Lagrée & M. Rossi.

Instabilité Convective - Absolue: le cas de l'équation de Ginzburg-Landau.

Jusqu'à présent nous avons étudié les problèmes de stabilité sous la forme "temporelle": on cherche des modes propres en $e^{ikx-i\omega t}$, avec k réel et on étudie le signe de la partie imaginaire de ω . Une autre approche possible, dite approche spatiale, consiste à se donner ω réel et à étudier la partie imaginaire de k : les structures dans ce cas correspondent à une onde périodique en temps mais se développant en espace. Comment choisir entre l'aspect temporel et l'aspect spatial? Tel est le sujet de ce chapitre. Pour simplifier, nous examinons une équation modèle: l'équation de Ginzburg-Landau:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} = a \psi + b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - c |\psi|^2 \psi,$$

où les constantes a , b et c sont en général complexes.

1 Origine des termes de cette équation

1.1 Terme non linéaire

L'équation non linéaire de Landau

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a \psi - c |\psi|^2 \psi,$$

est obtenue au voisinage du seuil d'instabilité dans le cas d'un spectre discret. C'est l'équation que satisfait le mode critique. Les autres modes dits "esclaves" sont atténués linéairement mais forcés par le mode critique. La dynamique de l'ensemble dépend en dernière analyse uniquement de ce mode et s'écrit comme une équation en dimension 1. La valeur de la constante c devant le terme non linéaire fait intervenir les interactions mode critique/ mode esclave.

1.2 Termes linéaires.

Toute relation de dispersion $F(\omega, k, \mu_c) = 0$ peut se développer au voisinage de ω_0, k_0 :

$$\omega = \omega_0 + \alpha (k - k_0) + \beta (k - k_0)^2 + \dots \text{ ou encore}$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha k_0 + \beta k_0^2 + (\alpha - 2\beta k_0) k + \beta k^2$$

Heuristiquement, si on remplace:

$$\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad k \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}$$

On obtient alors une équation linéaire:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + (\alpha - 2\beta k_0) \frac{\partial}{\partial x} \varphi = (-i(\omega_0 - \alpha k_0 + \beta k_0^2)) \varphi + i \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi$$

qui est bien équivalente à la partie linéaire

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} = a \psi + b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

de l'équation proposée appelée équation de Ginzburg-Landau (GL par commodité).

Rappels: Quelques équations bien connues

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = \varphi; \quad \text{équation de Schrödinger}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi; \quad \text{équation de la chaleur}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi \quad \text{équation des ondes}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + \frac{\partial}{\partial x} \varphi = 0; \quad \text{équation de transport}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + \varphi \frac{\partial}{\partial x} \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi; \quad \text{équation de Burgers}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + \varphi \frac{\partial}{\partial x} \varphi = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \varphi \quad \text{équation de KDV}$$

2 Observations numériques de la stabilité linéaire

2.1 Stabilité linéaire

La solution $\psi = 0$ est solution de base. Linéarisons autour de cette solution: et prenons pour simplifier a et b réels > 0

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} = a \psi + b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

La recherche de modes propres conduit à la relation de dispersion:

$$-i\omega + ikv = a - bk^2, \text{ soit } \omega = kv + ia - bk^2$$

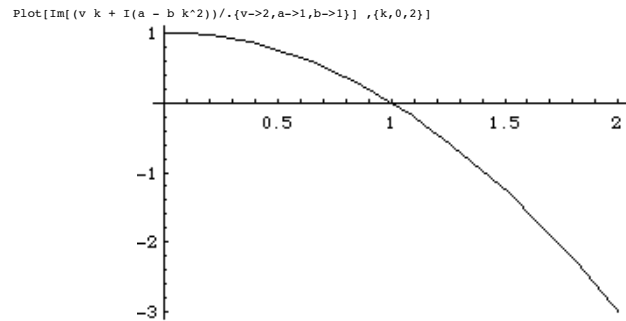
*) Approche temporelle.

On se donne k réel, on cherche ω complexe:

$$\omega = \omega_r + i\sigma$$

$$\sigma = (a - b k^2)$$

Si $a > 0$ l'écoulement est instable.



si $k < \sqrt{a/b}$ alors $\sigma > 0$, nombre d'onde amplifié
 si $k > \sqrt{a/b}$ alors $\sigma < 0$, nombre d'onde atténué

Les grandes longueurs d'ondes sont amplifiées.

Le nombre d'onde de taux de croissance maximum ($\partial\sigma/\partial k = 0$) est $k=0$.

*) Approche spatiale

on se donne ω réel on cherche k complexe :

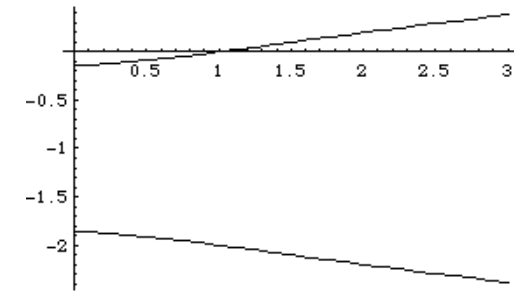
$$k = (-i v \pm \sqrt{-v^2 + 4 b (a + i \omega)}) / (2b)$$

Si on résout cette équation, on observe, suivant la valeur de v , deux cas typiques.

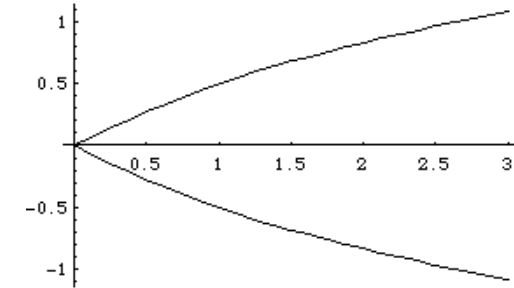
On pose $k = k_r + i\kappa$. Traçons κ en fonction de ω . On met en évidence deux branches.

cas (1): on se place à v assez grand

```
solk=Solve[w - (v k + I(a - b k^2))==0,k]
Plot[
{
Im[(k/.solk[[2]])/.{v->2,a->.25,b->1}],
Im[(k/.solk[[1]])/.{v->2,a->.25,b->1}],{w,-0,3}]
```



$\kappa(\omega)$; Partie imaginaire de k en fonction de ω cas $ab > v^2/4$ (I.C.)



Partie réelle de k en fonction de ω cas $ab > v^2/4$ (I.C.)

on peut démontrer que:

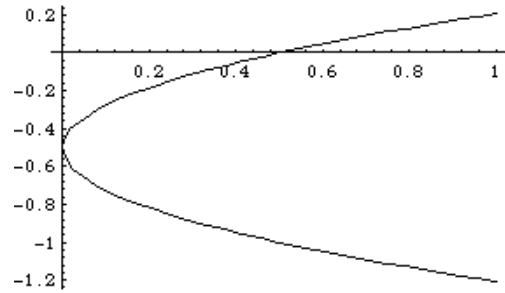
pour $\omega > 1$ la branche du dessus ($\kappa(\omega)$) correspond à des ondes amplifiées spatialement en $x > 0$

pour $\omega < 1$ la branche du dessus ($\kappa(\omega)$) correspond à des ondes atténuées spatialement en $x > 0$.

la branche inférieure correspond à des ondes atténuées pour $x < 0$.

Il existe une valeur de v critique pour laquelle les deux branches ($\kappa(\omega)$) s'intersectent:

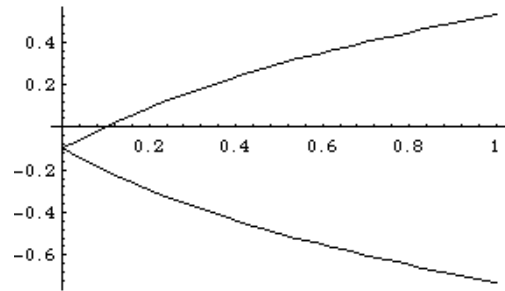
```
solk=Solve[w - (v k + I(a - b k^2))==0,k]
Plot[
{
Im[(k/.solk[[2]])/.(v->1,a->.25,b->1)],
Im[(k/.solk[[1]])/.(v->1,a->.25,b->1)] ,{w,0,1}}
```



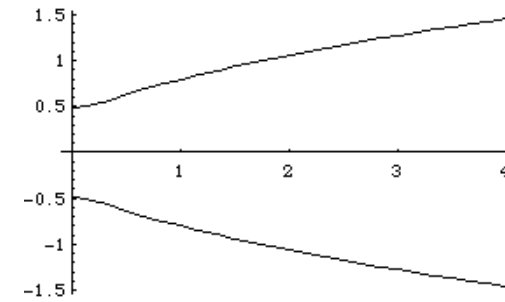
cas $ab=v^2/4$

Si on (cas (2)) diminue encore v , on observe une nouvelle configuration dont on montre qu'elle n'a pas de sens physique.

```
solk=Solve[w - (v k + I(a - b k^2))==0,k]
Plot[
{
Im[(k/.solk[[2]])/.(v->.1,a->.25,b->1)],
Im[(k/.solk[[1]])/.(v->.1,a->.25,b->1)] ,{w,-1,1}}
```

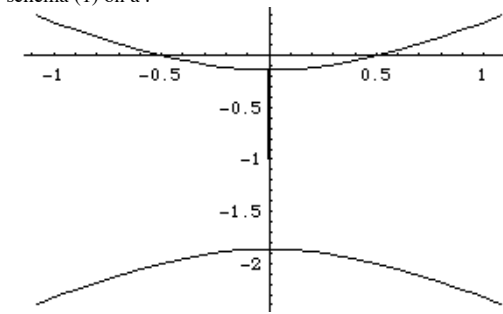


($\kappa(\omega)$) Partie Imaginaire de k en fonction de ω cas $ab < v^2/4$ (I.A.)



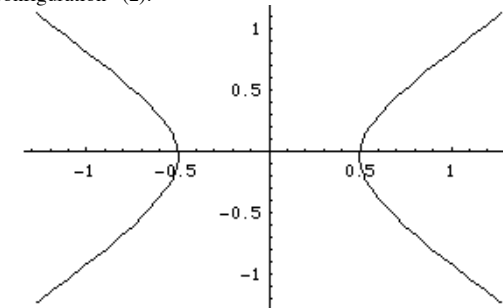
Partie réelle de k en fonction de ω cas $ab < v^2/4$ (I.A.)

Une autre présentation dans le plan k_r - k_i montre clairement la différence entre les deux cas. Pour le schéma (1) on a :



Partie imaginaire de k en fonction de la partie réelle de k , ($k_i(k_r)$) paramétré par ω cas $ab > v^2/4$ (I.C.)

et pour la configuration (2):



Partie imaginaire de k en fonction de la partie réelle de k , paramétré par ω cas $ab < v^2/4$ (I.A.)

Le point de vue temporel est donc toujours vrai, mais le point de vue spatial est plus délicat. Comment déterminer la pertinence physique de cette dernière approche. C'est la question! La réponse à ce problème est lié à la causalité: une perturbation ne peut pas induire des effets antérieurs à leur naissance.

2.2 observations numériques

2.2.1. mise en œuvre: codage de GL

L'équation est résolue sous la forme:

$$\partial u / \partial t = f(u),$$

et la discrétisation en temps fait intervenir un pas de temps intermédiaire (Runge Kutta 2)

$$u^* = u^n + f(u^n) \Delta t$$

$$u^{n+1} = (u^n + u^*) / 2 + f(u^*) \Delta t / 2$$

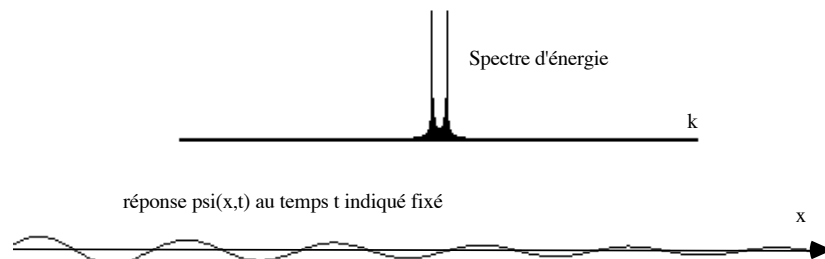
(cette écriture est identique à:

$$u^{n+1} = u^n + (f(u^n) + f(u^*)) \Delta t / 2)$$

Les dérivées d'espace sont du second ordre et centrées en x. L'entrée est imposée, à la

sortie on ne garde que: $\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$.

Le pas de temps est $\Delta t = 0.1$ et $\Delta x = 0.3$, on observe des réponses comme celle ci:



2.2.2. Réponse à une sinusoïde en x en t=0

On se donne des conditions de bords périodiques et une condition initiale

$$\psi(x, t=0) = \sin(kx).$$

avec $a=1$, $b=1$ $v=2$

On observe que pour $k=1$ la sinusoïde ne change pas d'amplitude. En revanche si $k=9$ elle est amplifiée, et si $k=1.1$ elle est atténuée.

2.2.3. Réponse à une sinusoïde en temps en x=0

On se donne une condition à l'entrée

$$\psi(x=0, t) = \sin(\omega t),$$

et une condition initiale $\psi(x, t=0) = 0$.

Si la fréquence est $\omega=3$:

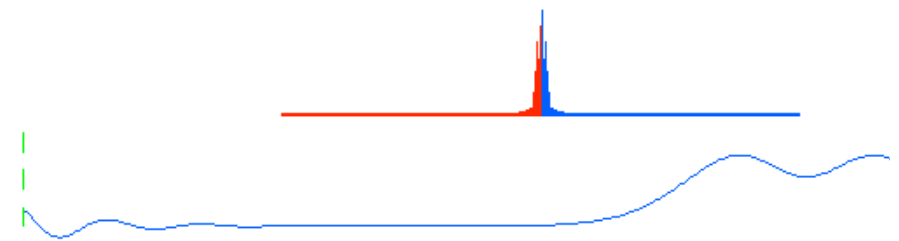
$$a = .25$$

$$b = 1$$

$$c = 0.001$$

$$v = 3$$

N.B. On a introduit un terme de saturation pour éviter d'avoir des amplitudes trop grandes qui feraient exploser le code.

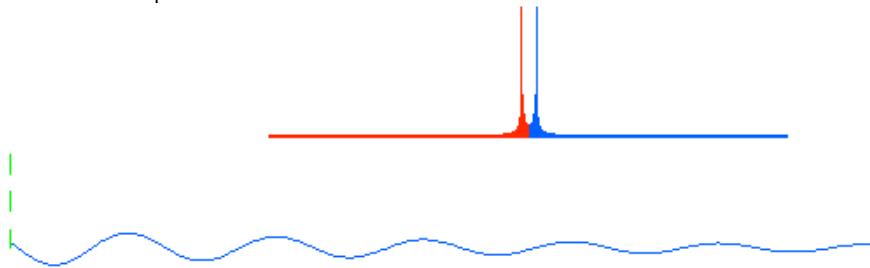


On observe dans le graphe ci-dessus la réponse en x au temps $t=20$. (La courbe du haut représente le spectre d'énergie en fonction du nombre d'onde k à l'instant considéré).

Le transitoire consiste en un paquet d'ondes d'amplitude croissante qui s'éloigne en $x > 0$, il quitte le domaine d'observation au bout d'un temps fini (cf paquet de droite: les deux bosses).

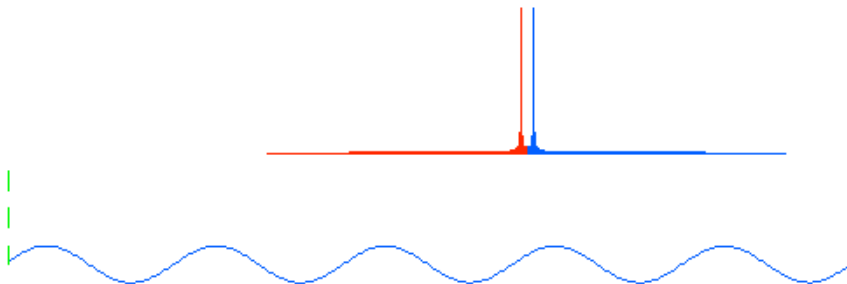
Le régime asymptotique (régime forcé) apparaît sous la forme d'une onde évanescente suivant les $x > 0$.

Diminuons la fréquence à 1.75.



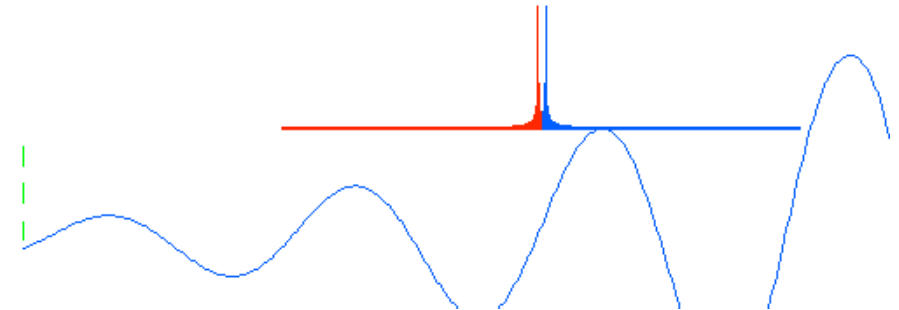
Le transitoire consiste en un paquet d'ondes d'amplitude croissante qui s'éloigne en $x > 0$ (à une vitesse plus faible que précédemment). Au temps $t=40$, il a déjà quitté le domaine. Le régime asymptotique (régime forcé) apparaît sous la forme d'une onde évanescente suivant les $x > 0$, mais de décroissance spatiale plus lente.

Diminuons encore la fréquence à 1.5:



C'est la fréquence neutre... Remarquer le superbe spectre très piqué.

Diminuons une fois de plus la fréquence: $\omega=1$.



Après le transitoire, on observe une onde dont l'amplitude est exponentiellement croissante en x .

Il est possible de vérifier que les valeurs obtenues pour la théorie spatiale pour la branche supérieure correspondent à cette expérimentation numérique.

En $x < 0$ on observe la branche inférieure qui pour les valeurs considérées des paramètres est toujours une exponentielle fortement amortie: sur le schéma, elle est réduite au "presque rien" situé à droite.

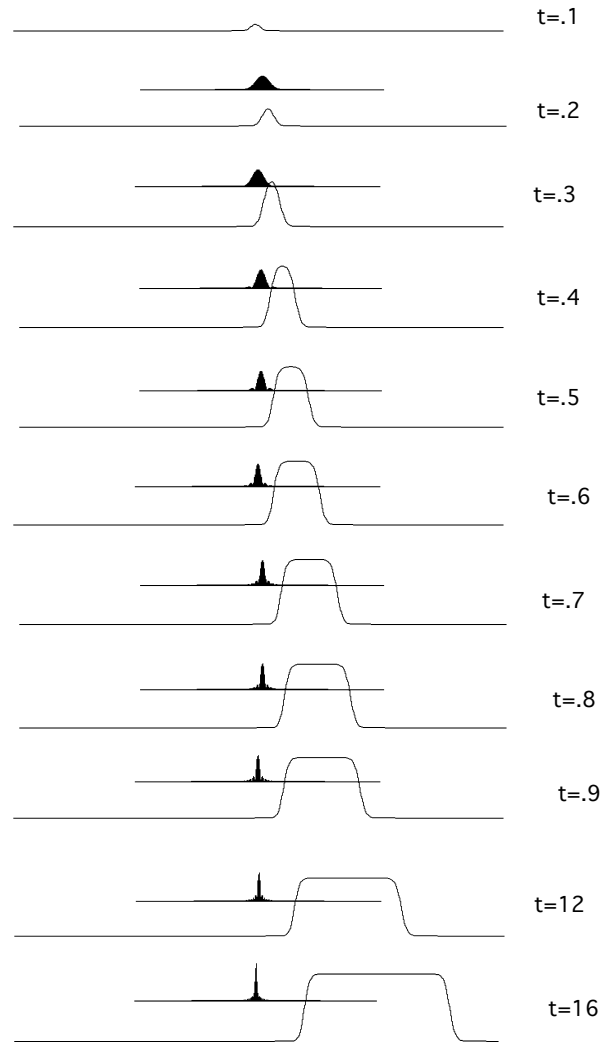


Nous avons ici examiné des cas correspondant au schéma (1) ($ab < v^2/4$).

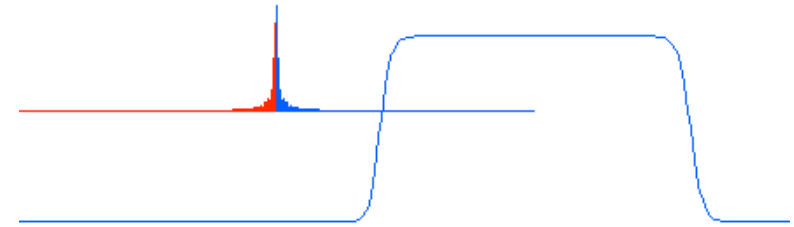
Dans le cas du schéma (2) ($ab > v^2/4$), les comportements sont très différents, le transitoire ne s'évacue plus.

2.2.4. réponse à un pulse au temps t=0

Soit une Gaussienne centrée en $x=5$ à $t=0$. On se place dans des conditions correspondant au schéma 1. ($a=1$ $b=.1$ $cr=0.01$ $v=1$)



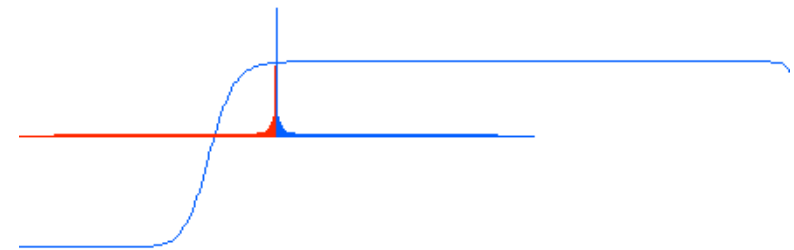
On observe le déplacement du paquet et sa diffusion. Par ailleurs, il croît en amplitude jusqu'à saturer pour des temps suffisamment longs.



Fixons maintenant les paramètres à des valeurs différentes correspondant au schéma 2

($ab > v^2/4$) (on change uniquement ici le terme de diffusion):

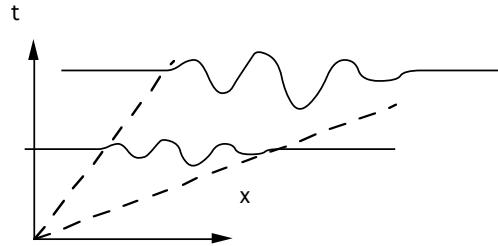
$a=1$
 $b=.5$
 $c=0.01$
 $v=1$



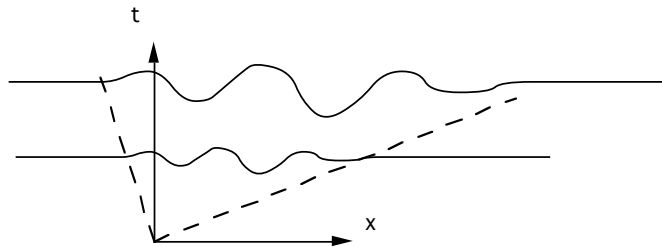
A l'opposé du cas précédent dans lequel la perturbation se déplace vers la droite, et ψ revient graduellement à 0, un front arrière contamine la partie en "amont" de la source.

2.2.5. résumé graphique

Dans le cas instable, il faut faire un distinguo:
soit la perturbation est convectée tout en croissant:



soit, elle croît et envahit tout l'espace.



Cette phénoménologie nous conduit à reconsidérer la formulation des critères de stabilité.

Pour ce faire, on pose le problème de la réponse d'une EDP à un "grand coup de pied".
En langage plus raffiné, on cherche la réponse impulsionnelle ou la fonction de Green.

2.3 Le concept d'instabilité locale

2.3.1. Fonction de Green

2.3.1.1. introduction

A l'équation différentielle (ou intégrodifférentielle):

$$D\left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i \frac{\partial}{\partial x}, \mu_p\right) = 0$$

on a associé des solutions en modes propres telles que

$$D\left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i \frac{\partial}{\partial x}, \mu_p\right) e^{-i(\omega t - kx)} = 0.$$

et

$$D(\omega, k, a, b, v) = 0$$

Ces solutions sont obtenues sans se poser la question des conditions initiales (elles n'ont ni début ni fin). Il est donc souhaitable de vérifier le caractère causal de ces solutions.

A cette fin, on introduit la réponse impulsionnelle (notée classiquement G, fonction de Green) qui correspond à la réponse de l'écoulement de base à une perturbation localisée en $x=0, t=0$.

$$D\left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i \frac{\partial}{\partial x}, \mu_p\right) G(x, t) = \delta(t) \delta(x).$$

Une vision heuristique de la fonction de Green: on "tappe" un grand coup dans l'écoulement puis on observe l'évolution. Cette perturbation initiale (le grand coup) contient toutes les fréquences et permet d'explorer tous les k et tous les ω .

Plus généralement, on peut considérer un terme -- la source des perturbations extérieures -- $P(x, t)$ quelconque

$$D\left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i \frac{\partial}{\partial x}, \mu_p\right) S(x, t) = P(x, t).$$

La notion de stabilité est liée à la réponse $S(x, t)$ du système à ces perturbations. Plus précisément on cherche la solution $S(x, t)$ causale i.e. telle que $S(x, t) = 0$ pour $t < 0$

N.B.

Le terme $P(x, t)$ peut être décomposé par un double produit de convolution avec des distributions de "Dirac":

$$P(x, t) = \int \int P(x - \xi, t - \tau) \delta(\tau) \delta(\xi) d\tau d\xi.$$

Le forçage est donc décomposé en distributions de Dirac en chaque point. La réponse finale est ensuite reconstruite par sommation de réponses impulsionnelles.

2.3.1.2. Un exemple pour fixer les idées:

Soit l'équation différentielle associée à l'oscillateur harmonique forcé:

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = f(t)$$

Si nous écrivons :

$$f(t) = \int f(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = f * \delta.$$

$$y(t) = \int y(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = y * \delta.$$

$$y'(t) = \int y'(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = - \int -y(t-\tau) \delta'(\tau) d\tau = y * \delta'.$$

alors l'équation différentielle devient

$$(\delta'' + \omega^2 \delta) * y = f$$

Soit G la réponse impulsionnelle elle vérifie

$$(\delta'' + \omega^2 \delta) * G = \delta$$

On en déduit :

$$G * (\delta'' + \omega^2 \delta) * y = f * G$$

$$\delta * y = f * G$$

$$y = f * G \text{ ou de manière explicite}$$

$$y(t) = \int f(t-\tau) G(\tau) d\tau$$

La solution y(t) s'écrit donc comme un produit de convolution du terme de forçage et de la fonction de Green d'où l'intérêt de cette fonction.

2.4 Fonction de Green de GL

2.4.1. Rappel dans le cas de l'oscillateur

Réolvons

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \omega_0^2 G = \delta(t)$$

On passe dans l'espace de Fourier:

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)G = 1$$

($G = \int G e^{i\omega t} dt$ et $\int G' e^{i\omega t} dt = -i\omega G$, ne pas oublier le $1/2\pi$ dans la TF inverse...)

En revenant dans l'espace physique, il vient :

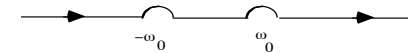
$$G = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{e^{-i\omega t}}{(-\omega^2 + \omega_0^2)} d\omega$$

Que l'on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{2\pi} \int_L (2\omega_0)^{-1} e^{-i\omega t} \left(\frac{-1}{(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{(\omega + \omega_0)} \right) d\omega$$

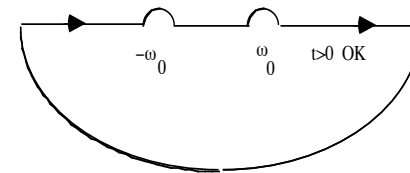
Dans le plan $\omega_r \omega_i$, le contour L est sur l'axe réel mais il contourne les pôles

$$\omega = \pm i\omega_0$$



de manière à assurer la causalité. En effet pour $t < 0$, on vérifie que l'on peut refermer ce contour par un demi-cercle de centre 0 et de rayon R tendant vers l'infini situé dans le plan supérieur: en effet, la contribution de ce demi cercle tend vers 0 avec R puisque $e^{-i\omega t}$ tend vers zéro pour ω complexe situé sur ce chemin pour $t < 0$. Par le théorème des résidus on obtient directement $G(x,t)=0$.

Pour $t > 0$ on referme ce contour par un demi-cercle de centre 0 et de rayon R tendant vers l'infini situé dans le plan inférieur: de la même manière, la contribution de ce demi cercle tend vers 0 avec R puisque $e^{-i\omega t}$ tend vers zéro pour ω complexe situé sur ce chemin pour $t > 0$.



Par le théorème des résidus on obtient directement $G(x,t)$. Les résidus sont en ω_0 pour la première et en $-\omega_0$ pour la seconde, on trouve:

$$\int_L \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_0} d\omega = -2 i \pi \text{Res}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_0}\right) = -2 i \pi (e^{-i\omega_0 t}).$$

donc:

$$\int_L \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_0} d\omega = -2 i \pi (H(t) e^{-i\omega_0 t}) \text{ et } \int_L \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + \omega_0} d\omega = -2 i \pi (H(t) e^{+i\omega_0 t})$$

donc:

$$G(t) = 1/2 \omega_0^{-1} (i e^{-i\omega_0 t} - i e^{+i\omega_0 t}) H(t) = \omega_0^{-1} \sin(\omega_0 t) H(t)$$

On a ainsi trouvé la réponse impulsionnelle de l'oscillateur harmonique.

2.4.2. Cas de GL

La réponse linéaire de l'équation de GL à une perturbation localisée en espace et en temps:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + v \frac{\partial G}{\partial x} - a \psi - b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t)$$

s'obtient de la même manière par un aller et retour dans l'espace spectral (en espace et en temps). On effectue donc une double transformée de Fourier. Dans cet espace GL s'écrit:

$$(-i\omega + ikv - a + bk^2) G = 1.$$

En posant $v = (-2b/k_0)$ et $a = (-i\omega_0 - bk_0^2)$, cette relation s'écrit plus simplement de manière équivalente:

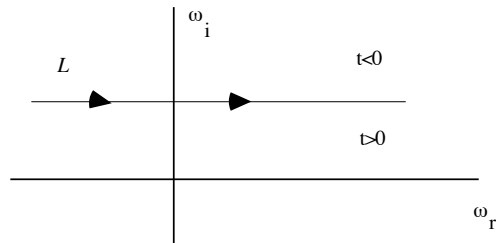
$$(-i\omega + i\omega_0 + b(k-k_0)^2) G = 1.$$

On inverse une première fois en temps:

$$G(k,t) = \frac{i}{2\pi} \int_L \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_0 + i b (k-k_0)^2} d\omega$$

$$G = -2i\pi \text{Res} \left[\frac{i}{2\pi} (-i\omega + i\omega_0 + b(k-k_0)^2) \exp(-i\omega t) \right]$$

Or $t > 0$. Le bon contour est donc vers le bas



par intégration par les résidus:

$$G(k,t) = \exp(-i(\omega_0 - i b (k - k_0)^2)t).$$

On continue l'inversion, cette fois en espace:

$$G = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i[kx - (\omega_0 - i b (k - k_0)^2)t]) dk$$

par changement de variables: $K = k - k_0$

$$G(x,t) = \exp(i(k_0 x - \omega_0 t)) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-K^2 t + iKx) dK$$

On réécrit l'exposant:

$$G(x,t) = \exp(i(k_0 x - \omega_0 t)) \int_{-\infty}^{\infty} \exp((iK^2 + x/2t)^2 - x^2/4t) dK$$

$$G(x,t) = \exp(i(k_0 x - \omega_0 t - x^2/(4bt))) \int_{-\infty}^{\infty} \exp((iK^2 + x/2t)^2) dK$$

On fait alors apparaître $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi$ et on trouve alors le résultat final:

$$G(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{|\pi b t|}} \exp(i(k_0 x - \omega_0 t) - x^2/(4bt)).$$

La fonction de Green de l'équation de GL (b réel):

$$\frac{\partial G}{\partial t} + v \frac{\partial G}{\partial x} - a \psi - b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t)$$

est donc:

$$G = \frac{e^{at}}{2\sqrt{|\pi b t|}} \exp\left(-\frac{(x-vt)^2}{4bt}\right)$$

2.5 discussion: observation suivant un rayon

Sur un rayon $x/t=V$ fixé, la réponse impulsionnelle croît avec un taux d'amplification :

$$\sigma(V) = a - \frac{(V-v)^2}{4b}$$

Le rayon $x/t=0$ est très particulier: on reste à une position fixée $x=x_0$ et on s'intéresse à l'évolution asymptotique $t \rightarrow \infty$.

σ est maximum pour $V=v$ et $\sigma_{\max}=a$

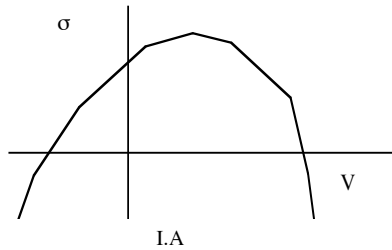
$$\sigma = a - \frac{v^2}{4b} \text{ en } V=0$$

et $\sigma = 0$ en $V = v \pm 2\sqrt{ab}$

Traçons σ pour deux cas typiques:

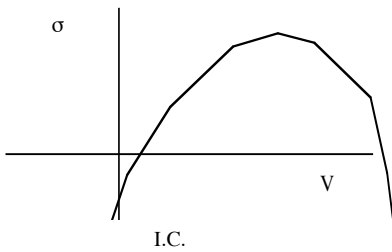
*) si $ab > v^2/4$

Le rayon $V=0$ a un taux de croissance positif.



*) si $ab < v^2/4$

Le rayon $V=0$ a cette fois un taux de croissance négatif.



2.5.1. Définitions

Si on associe à un écoulement quelconque sa fonction de Green, on peut généraliser les observations effectuées sur GL de la manière suivante:

** On dira alors que l'écoulement est linéairement *stable* si:

$G(x,t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$ le long de *tous* les rayons $x/t = \text{constante}$

** On dira alors que l'écoulement est linéairement *instable* si:

$G(x,t) \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow \infty$ le long d'*au moins un* rayon $x/t = \text{constante}$

Parmi les écoulements linéairement instables on distinguera entre deux types de réponse impulsionnelle:

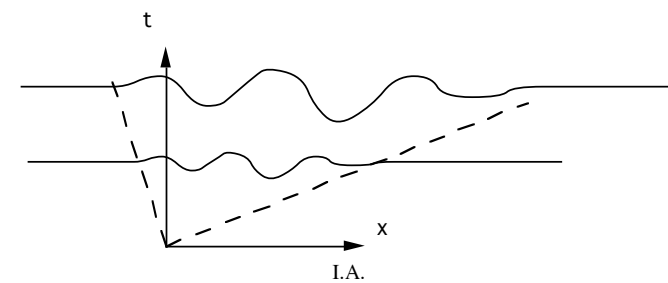
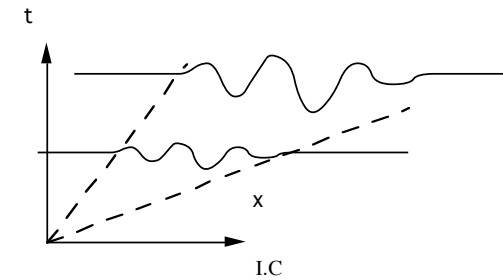
** L'écoulement sera *convectivement instable* si:

$G(x,t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$ le long du rayon $x/t = 0$. (ou pour tout x fixé)

** L'écoulement sera *absolument instable* si:

$G(x,t) \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow \infty$ le long du rayon $x/t = 0$. (ou pour tout x fixé)

De manière graphique:



Notons que les fronts (en pointillés) correspondent à des rayons V pour lesquels σ_r est nul.

2.6 Méthode générale

2.6.1. procédure

On détermine la relation de dispersion. On examine $\omega_i(k)$ avec k réel, on cherche le maximum de $\omega_i(k)$: soit k_m tel que $\partial\omega_i/\partial k=0$

si $\omega_i(k_m)<0$, l'écoulement est linéairement stable
si $\omega_i(k_m)>0$, l'écoulement est linéairement instable

Ensuite on passe à la caractérisation de l'instabilité (IA ou IC). La méthode générale est très lourde. On se contentera ici de donner le résultat final.

Le long du rayon $x/t=V$ on calcule le nombre d'onde k^* de vitesse de groupe généralisée V , *i.e.* tel que $d\omega(k^*)/dk=V$ (notons que la notion de vitesse de groupe habituelle n'a de sens physique que lorsqu'elle est réelle). On démontre que le taux d'accroissement suivant ce rayon est donné par:

$$\sigma = \omega_i^* - k_i^* x/t = \omega_i^* - k_i^* d\omega(k^*)/dk$$

Soit une branche $\omega(k)$ donnée, si on est dans un repère fixe, $x/t = 0$ à x fixé et $t \rightarrow \infty$. On observe donc le nombre d'onde k_0 tel que $d\omega(k_0)/dk=0$, le taux de croissance est alors:

$$\sigma(k_0) = \omega_i(k_0)$$

On en déduit un critère d'instabilité convective/ absolue:

- si $\omega_i(k_0)>0$ pour au moins une branche: Instable Absolu
- si $\omega_i(k_0)<0$ Instable Convectif.

2.6.2. Application à GL:

$$\omega = k v - i a + i b k^2$$

donc $d\omega(k_0)/dk = 0$, pour $k_0 = -i v/2/b$, on substitue dans ω :

$$\omega = i (a - v^2/4/b).$$

$$\sigma = (a - v^2/4/b)$$

On retrouve:

*) si $ab > v^2/4$ I.A.

*) si $ab < v^2/4$ I.C.

On peut réinterpréter les expériences numériques et voir que les coefficients traversent cette frontière.

La théorie spatiale n'est applicable que pour les écoulements instables convectifs. Dans ce cas, la partie transitoire est advectée vers l'aval et on observe le signal périodique forcé. Si l'écoulement est instable absolu, la réponse forcée (à la pulsation ω) est noyée dans la réponse transitoire.

3 Exemples d'écoulements instables convectifs et absolus.

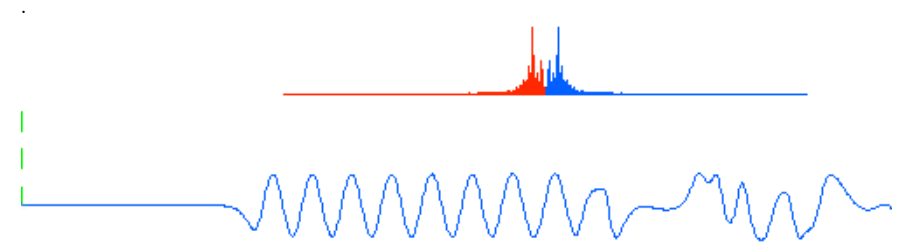
3.1 I.C.

Les écoulements instables convectifs ont la particularité d'être des amplificateurs de bruit, en effet si on cesse de perturber cet écoulement il retourne à son état de base.

Leur dynamique dépend donc du forçage: c'est comportement de type extrinsèque.

- dans le cas où l'entrée est forcée à la fréquence ω , si l'expérimentateur varie cette fréquence la longueur d'onde spatiale est modifiée.

Dans le cas d'une entrée forcée de manière stochastique avec un niveau de bruit très petit de 10^{-7} , on observe pour GL l'apparition de structures:



- les couches limites sont en règle générale IC

- la couche de mélange de type:

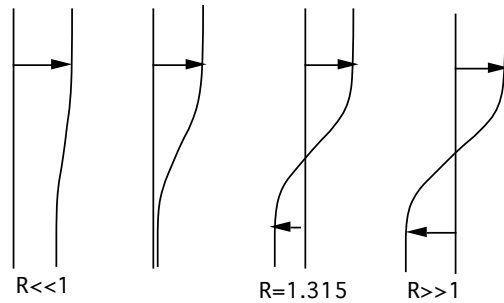
$$U=1+R \operatorname{th}(y)$$

avec

$$R=(U_1-U_2)/(U_1+U_2)$$

est IC pour $R < 1.315$

Elle devient IA pour $R > 1.315$



3.2 I.A.

De manière un peu schématique, on se contentera de dire que les écoulements Instables Absolus ont une dynamique intrinsèque indépendante de l'excitation. Souvent ils sont associés à la notion d'oscillateur hydrodynamique. L'exemple le plus célèbre est l'avenue de Bénard (ou allée de Von Kà rmà n).

4 biblio

P. Huerre, P. A. Monkewitz 1990 "Local & global instabilities in spatially developing flows" Annu. Rev. Fluid Mech. 22 pp 473- 537.

R.J. Deissler 1985 Noise- Sustained Structure, Intermittency, and the Ginzburg- Landau Equation. J. of Statistical Physics Vol 40, No 3/4

Cartan H. théorie élémentaire des fonctions analytique d'une ou plusieurs variables complexes Hermann 78.

Roddir F. Distributions & transformation de Fourier, Mc Graw Hill 78.

Bender Orzag