

Houle et Vagues.

”MU4MEF04 - Ondes et Écoulements en milieu naturel”, M1 SU

P.-Y. Lagrée
CNRS & S U, UMR 7190,
Institut Jean Le Rond d'Alembert, Boîte 162, F-75005 Paris, France
pierre-yves.lagree@upmc.fr ; www.lmm.jussieu.fr/~lagree

28 mars 2024

Résumé

Dans ce chapitre nous regardons la propagation de la Houle linéaire dite ”Houle de Airy” : c'est une perturbation non visqueuse infinitésimale de la surface de l'eau, à profondeur H quelconque. Nous établirons la relation de dispersion $\omega(k)^2 = gk \tanh(kH)$ pour des ondes de forme sinusoïdale de faible hauteur du type $\cos(\omega t - kx)$, nous parlerons de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe (vitesse de propagation de l'énergie). En faible profondeur h , nous établirons que la vitesse est \sqrt{gh} .

planning du cours MU4MEF04 2022-2023 : 56-66.111 08 :30

http://master.spi.sorbonne-universite.fr/fr/mecanique-des-fluides/m1-mf2a/test_planning.html

cours, notes... <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/index.html>

1 Contexte

1.1 Importance pratique

La compréhension des écoulements en milieu naturel est un enjeu important : enjeu scientifique (compréhension du monde qui nous entoure), industriel (navigation, construction navale, énergie) et enfin humain car la majeure partie des humains vivent le long des fleuves ou des côtes. (70 % des côtes sont en érosion, 80 % de la population mondiale habite à basse altitude et plus de 20 % à proximité d'un océan ou d'un estuaire. (source Wiki /Côte.(géographie))). En France, 10% de la population réside dans les communes près des côtes, représentant une densité de 2.5 par rapport à la moyenne métropolitaine. La longueur des côtes en France est d'environ 6000km dont le tiers est sableux.

En Côte d'Ivoire la densité de la population sur la zone lagunaire est de 273 h/km² alors que la densité globale du pays est de 50 h/km².

L'objet de ces notes de cours (le sujet est über-classique depuis Airy et Stokes et il existe des téraoctets de cours similaires sur le Ouaipe : ce cours est sur <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEhoule.pdf>, sans oublier les kilomètres de rayonnages de livres à consulter dans toutes les bibliothèques) est de poser et de résoudre les équations régissant la propagation de perturbations de l'élévation de la surface d'un fluide dans un champ de pesanteur. C'est à dire les vagues! En faisant différentes hypothèses on simplifiera par l'analyse asymptotique les équations de Navier Stokes pour aboutir à des systèmes d'équations aux dérivées partielles plus simples. On rappellera l'”équation d'onde”, puis, après avoir fait apparaître les effets de propagation qui transportent la vague sans la déformer, on fera apparaître ceux de dispersion, qui la cassent en vaguelettes, enfin les effets des non linéarités qui la font déferler. Lorsque ces deux derniers effets se compensent des ondes qui se propagent sans changer de forme peuvent exister, ce sont les solitons. Les équations de Saint Venant sont ensuite retrouvées dans le chapitre suivant dans une optique plus appliquée aux écoulements dans les fleuves et les lagunes. c.f. <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf>.

1.2 Modélisation

Attention, on va faire dans ce cours des simplifications importantes et poser des hypothèses simplificatrices, c'est ce que l'on appelle la "modélisation". Ces simplifications ne sont pas abusives, au contraire elles permettent d'extraire la quintessence du problème en s'affranchissant des épiphénomènes inutiles. Il faut trouver des équations modèles et des conditions aux limites avec un niveau raisonnable de simplification... C'est toute la subtilité de la Mécanique et des sciences de l'ingénieur.

Nous partons du principe que nous avons déjà vu la mer et des vagues à sa surface. Le site <https://www.google.fr>, avec le mot clef "houle" renvoie plusieurs images qui nous guideront pour la modélisation...

L'amplitude de houle est manifestement en mer plus petite que la profondeur d'eau (approche "petite perturbation"), la forme de la houle semble périodique et proche d'un sinus (solution sous forme de sinus), la houle a l'air de se propager dans une direction et rester invariante dans l'autre direction (approximation 1D), la forme ne varie pas beaucoup (les effets de dissipation sont faibles).

Nous insérerons ici plusieurs représentations de "vagues", des motifs grecs, des vagues de peintres hollandais, la vague de Courbet, la sculpture la vague de Camille Claudel, la grande vague de Kanagawa...

1.3 Plan du cours

Une première introduction rapide §2 rappelle l'équation des vagues longues et de hauteur faible : l'équation de d'Alembert (niveau L1-L2).

Ensuite dans une première partie "Equation de la Houle" §3 nous présentons les équations générales et les simplifications pour aboutir au problème dit "de Airy". Les développements sont très classiques et à connaître (par cœur!), au niveaux L3-M1.

Puis nous parlons des effets de dispersion dans "Effets de Dispersion" §4, vitesse de groupe (niveau L2-L3-M1), et forme du paquet d'onde au loin (niveau M1-M2).

Dans une première partie "point de vue simple des ondes linéaires" nous présentons le modèle le plus simple des ondes de surfaces linéaires. Il ne s'agit que de d'Alembert dans la forme la plus simple. Cette partie est du niveau L2-L3

Puis l'effet de la viscosité est examiné dans "5. viscosité" (niveau L3-M1), enfin "6. vagues près des côtes" montre qualitativement le déferlement (niveau CP).



2 Introduction point de vue simple des ondes linéaires

Nous allons établir les équations de propagation de la houle et des vagues. Nous commençons par une présentation simple 1D. Nous présentons ensuite les équations complètes. Dans un premier temps, il nous faut définir ce qu'est une vague. La définition n'est pas claire, tout comme la définition d'un son et d'un bruit n'est pas claire en acoustique (c'est le cas pour plein d'autres phénomènes de notre entourage).

Onde : perturbation qui se propage. ex : onde sonore (perturbation de la pression de l'air), onde sur la corde vibrante (déformation d'une corde tendue), ondes électromagnétiques (perturbation des champs électrique et magnétique).

Vague : Perturbation de la surface de l'eau qui se propage.

Houle : Vague en profondeur infinie (loin de la côte et de la source).

Vitesse du fluide, vitesse de phase, vitesse de groupe : Il faut bien différencier la vitesse de la particule de la vitesse de l'onde. Cette première est bien la vitesse associée au déplacement d'un petit volume d'eau, tandis que la seconde est la vitesse à laquelle on a l'"impression" que la vague avance. La troisième est la vitesse de déplacement du paquet d'ondes et de l'énergie

Déferlante : C'est une vague dont la crête se déplace plus vite que le pied : elle se casse ...

Mascaret : C'est en fait un simple "ressaut" hydrodynamique comme on en voit dans les éviers, mais il se déplace...

Soliton : Une vague non linéaire et dispersive qui se propage sans changer de forme...

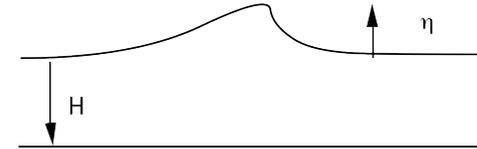


FIGURE 1 – Une vague : une perturbation de la hauteur d'eau qui se déplace.

2.1 modèle simple en onde longue, ondes linéaires simples :

Nous commençons par un cas particulier qui permet de poser les concepts. Dans cette première partie nous passons rapidement sur les problèmes pour aboutir à l'équation d'ondes qui est la base de ce cours. Notre démarche ici sera très élémentaire, fondée sur une modélisation 1D, dans les parties suivantes nous précisons les hypothèses faites. En fait, la présentation suivante est peu rigoureuse (et même fautive), mais nous écrirons ensuite toutes les équations de manière rigoureuse. La manière la plus simple est de considérer une étendue d'eau initialement au repos et d'épaisseur constante h_0 . Supposons que nous perturbions cette surface, la hauteur devient η :

Cette élévation d'une masse d'eau $\rho\eta(x)\Delta x$ (par unité transverse au plan) produit une variation de pression égale à $g\rho\eta$ par nivellement barométrique.

La somme des forces agissant transversalement est égale à l'accélération de la masse d'eau comprise dans le volume $S\Delta x$, d'où, puisque le fluide est poussé de droite à gauche avec la force $\rho g\eta S$ en x et de droite à gauche en $x + \Delta x$

$$\rho g\eta(x)S(x) - \rho g\eta(x + \Delta x)S(x + \Delta x) = \rho\Delta x S \partial u / \partial t.$$

On a supposé que la vitesse u est constante sur toute la section. En faisant tendre Δx vers 0, la conservation de la quantité de mouvement est de manière simplifiée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1)$$

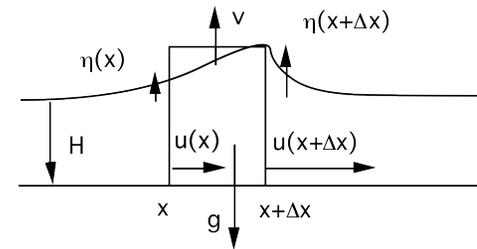


FIGURE 2 – Le volume de contrôle pour établir l'équation de d'Alembert à partir d'un modèle simple (vitesse constante dans la section).

En fait, nous avons oublié ici les termes de flux de quantité de mouvement qui entrent et sortent du volume de contrôle ce qui donnera la dérivée totale pour le membre de gauche $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$, et nous avons trop sommairement introduit la variation de pression, plus de détails sur <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf>. Comme nous supposons la vitesse faible, cette erreur se répare d'elle même car $u \frac{\partial u}{\partial x}$ est négligeable.

La conservation de la masse totale d'eau, appliquée au précédent petit volume donne par unité de longueur transverse, en introduisant la vitesse transverse $v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ (faible) s'écrit :

$$-u(x + \Delta x)(h_0 + \eta(x + \Delta x)) + u(x)(h_0 + \eta(x)) - v\Delta x = 0,$$

donc en faisant tendre Δx vers 0 :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial(u(h_0 + \eta))}{\partial x}, \quad (2)$$

puisque l'amplitude est petite : $\frac{\partial(u(h_0 + \eta))}{\partial x} \simeq \frac{\partial(uh_0)}{\partial x}$, et comme la hauteur est constante (on verra plus loin que l'on peut se donner un fond lentement variable $h_0(x)$ et que cette équation est toujours bonne).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} h_0.$$

L'élimination de u donne la fameuse équation d'onde (ou équation de d'Alembert 1747) :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \text{ avec } c_0^2 = gh_0. \text{ Que l'on note parfois à l'aide de l'opérateur appelé d'Alembertien : } \square \eta = 0, \text{ avec } \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Pour écrire ces relations nous sommes allés un peu vite en besogne dans notre décompositions en tranches. Il est en effet plus correct de bien voir que le volume que l'on a choisi varie avec l'écoulement : il se déforme. Il faudra aussi tenir compte des termes d'inertie non linéaires. On pourra ainsi montrer que le raisonnement plus haut permet de trouver les équations Shallow Water correctes telles que nous les établirons plus loin (dans le chapitre suivant).

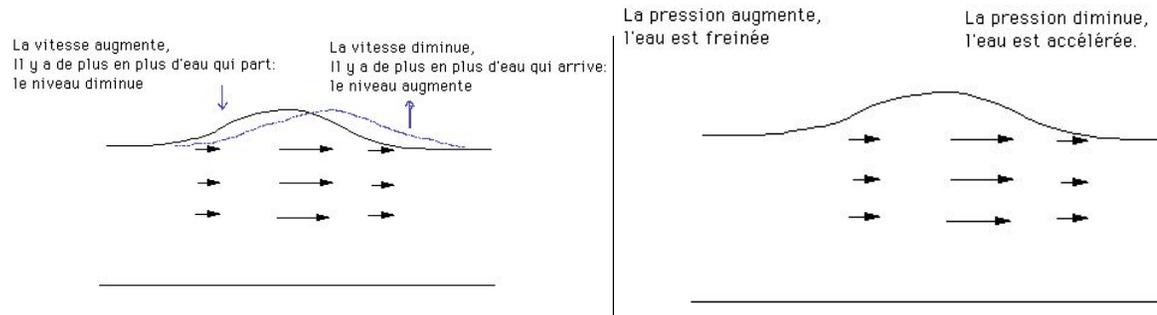


FIGURE 3 – Mécanisme simple de la propagation d'une vague. **Gauche** : examinons une vague à un instant t , par conservation du débit, là où la vitesse augmente la vague est étirée : elle s'amincit. En revanche là où la vitesse diminue, il y a augmentation du niveau. La bosse se déplace sur la droite. **Droite** : Ensuite, la bosse s'étant déplacée, la pression est maximale à son sommet et décroît en descendant à droite. La pression décroît, donc la vitesse augmente. En revanche dans la partie gauche, la pression croît de gauche à droite (jusqu'au sommet) : le gradient de pression ralentit le fluide...

2.1.1 équation d'onde

Revenons à l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \text{ avec } c_0^2 = gh_0.$$

En posant $\xi = x - c_0 t$, et $\zeta = x + c_0 t$, on voit que comme

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \zeta} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = c_0 \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)$$

l'équation devient alors par ce changement de variables $4c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta \partial \xi} = 0$.

Remarque, on peut ainsi écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Les solutions de $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta \partial \xi} = 0$ sont par intégration en ξ : $\frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = cst$, cette constante est constante par rapport à ξ mais elle dépend de ζ , appelons la $g(\zeta)$ puis $\eta = g(\zeta) + cst$, mais cette constante est une fonction de ξ , appelons la $f(\xi)$. Donc les solutions sont de la forme : $f(\xi) + g(\zeta)$:

$$\eta = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \dots$$

La perturbation de forme f se déplace vers la droite sans changer de forme à la vitesse c_0 (g se déplace vers la gauche).

Remarquons que l'on peut chercher des solutions de $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ directement sous la forme d'ondes planes $e^{i(kx - \omega t)}$, en substituant on a $\omega^2 = c_0^2 k^2$, on appelle cette relation "équation de dispersion", elle nous donne la dépendance de ω en fonction de k le nombre d'onde. Cela donne ici $\omega(k) = \pm c_0 k$, la solution est linéaire en k , et $\omega(k)/k = \pm c_0$, la vitesse des ondes est constante. On dit que le milieu n'est pas dispersif. Des expressions comme $\exp(ik(x \pm c_0 t))$ sont donc solutions de l'équation des ondes. On retrouve la structure en $f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$: en sommant sur l'ensemble des k , on peut reconstituer un signal quelconque. C'est en fait la transformation de Fourier du signal.

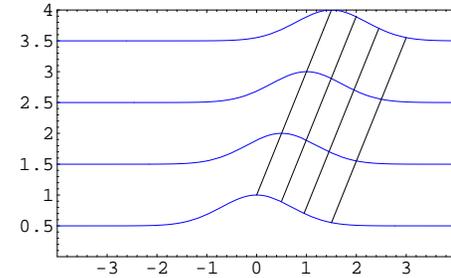


FIGURE 4 – Advection à célérité c_0 d'une perturbation à 4 temps différents . La vague se déplace sans changer de forme, ici la solution $f(x - c_0 t)$ est tracée ainsi que quelques droites "caractéristiques" $t = x/c_0 + cst$.

2.2 Ondes planes

Comme suggéré plus haut, il est d'usage de décomposer le signal en somme d'exponentielles :

$$\exp(ik(x \pm c_0 t)) = \exp(ikx \pm i\omega t).$$

C'est en fait la transformation de Fourier du signal. ω est la pulsation (en Hz, 1/s) k , la fréquence spatiale (en 1/m), $c_0 = \omega/k$ est la vitesse de phase, elle est constante dans le cas simple évoqué plus haut.

Par la suite on va voir ce qui se passe lorsque la vitesse de propagation du signal dépend de la pulsation : $c(k)$, nous intuitons que, puisque tout signal s'écrit sous forme de série de Fourier, si chaque mode se déplace à sa vitesse $c(k)$, alors le signal se décompose. il se décompose en diverses sinusoïdes, en diverses ondes. On dit que le milieu est "dispersif".

Ce qui peut aussi se passer c'est que c dépende de la profondeur h , les équations sont alors non linéaires. On verra que le haut de la vague va plus vite que le bas. Le signal se raidit, le haut de la vague dépasse le pied d'icelle et la vague déferle (dans la région du déferlement, nos équations ne sont plus valides, personne ne sait de toutes façons résoudre les ENS dans ce cas excessivement sévère).

Enfin, les frottements visqueux atténuent la vitesse, et donc la hauteur...

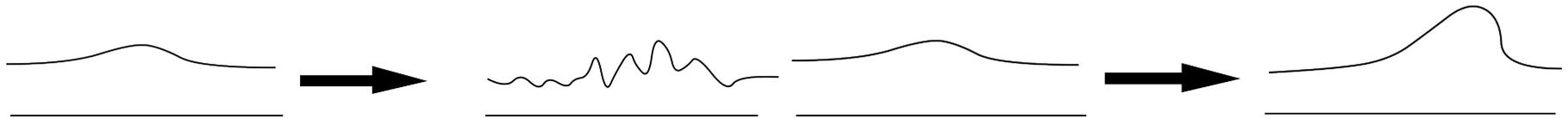


FIGURE 5 – Deux déformations possibles du paquet d'onde. A gauche la dispersion, ce que nous allons voir ici. A droite, le raidissement non linéaire que nous verrons plus loin.

Nous allons étudier tous ces phénomènes qui cassent l'équation des ondes. Pour cela, nous repartons des équations initiales pour établir la relation de dispersion dans le cas général du type des vagues sur la mer.

3 Equation de la Houle

3.1 Equation générales complètes : Navier Stokes complet

Reprenons le problème à zéro, on a deux fluides l'un au dessus de l'autre (air et eau), dans un champ de gravité. Les équations à résoudre sont *a priori* pour le problème de l'écoulement des fluides sont pour chaque phase : l'incompressibilité :

$$\nabla \cdot u = 0,$$

la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho(\partial u / \partial t + (u \cdot \nabla)u) = \nabla p - \rho_{\infty} g e_y + \mu \nabla^2 u.$$

Ces systèmes d'équations sont à résoudre dans les deux milieux que sont l'air et l'eau. La vitesse est nulle au fond (supposé plat) par adhérence.

Remarque à ce propos l'équation de conservation de la masse s'écrit bien :

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \iff \nabla \cdot u = -((\partial \rho / \partial t + (u \cdot \nabla)\rho)).$$

La densité est conservée le long des lignes de courant : l'eau reste de l'eau, et l'air reste de l'air. À la surface : c'est délicat ! En toute rigueur, il faut exprimer la continuité des contraintes normales et tangentielles ainsi que des vitesses des deux fluides. On écrit la continuité de la contrainte normale : soit n la normale extérieure à la surface libre :

$$(p_e - p_a - \sigma K)n_i = \tau_{ij}n_j - \tau_{aij}n_j$$

avec pour l'air $\tau_{aij} = 2\mu_a D_{ij}$, et pour l'eau $\tau_{ij} = 2\mu D_{ij}$, où σ tension superficielle et K courbure de la surface. Comme la viscosité dynamique du gaz est faible par rapport au liquide, on néglige le mouvement de l'air reste :

$$(p - p_0 - \sigma K)n_i = \tau_{ij}n_j$$

avec p_0 pression atmosphérique. Cette expression est à projeter sur la normale et la tangente. Nous n'écrivons pas pour l'instant ces équations développées. Nous simplifions tout de suite au cas non visqueux. Le but du cours est de passer d'équations 2D à des équations 1D plus simples (le cas général 3D donne des systèmes 2D, la généralisation va de soi).

3.2 Equation générales simplifiées : équations d'Euler :

En pratique la viscosité est négligeable. Les équations à résoudre sont :

i) l'incompressibilité

$$\nabla \cdot u = 0$$

sous forme développée :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

ii) la conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) = -\nabla p - \rho g e_y$$

sous forme développée :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et} \quad \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g.$$

iii) accessoirement irrotationnel (pas de création de vorticité)

$$\nabla \times u = 0, \text{ sous forme développée : } -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

et ce avec les conditions aux limites *ad hoc* : la pression est égale à la pression atmosphérique, au saut de pression près dû à la tension de surface. condition dynamique : le saut de pression est tel que :

$$p_1(x, \eta(x, t), t) - p_2(x, \eta(x, t), t) = \sigma \nabla \cdot n_{12},$$

la normale à la surface est (sa divergence est la courbure K) :

$$n_{12} = \frac{(-\partial\eta/\partial x, 1)}{\sqrt{1 + (\partial\eta/\partial x)^2}}.$$

condition cinématique :

Les deux fluides ne "décollent" pas de la surface qui les sépare et ne s'interpénètrent pas : intuitivement, les vitesses normales sont donc continues à la traversée de l'interface :

$$u_1 \cdot n_{12} = u_2 \cdot n_{12} \text{ en } y - \eta(x, t) = 0.$$

On retrouve cette même relation à partir de $\nabla \cdot u = 0$ intégrée sur une petite épaisseur (cf. électromagnétisme. Voir la condition sur la composante normale du champ magnétique B à une interface!).

Une autre manière de voir les choses est de considérer l'interface entre l'eau et l'air. L'eau reste eau et l'air reste air, ce que nous dit la conservation de la masse (voir plus haut)

$$\nabla \cdot u = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\rho\right).$$

dans chacun des deux fluides, l'écoulement est incompressible donc $\nabla \cdot u = 0$, et il reste que $\frac{d\rho}{dt} = 0$; la densité est transportée dans l'écoulement, sa dérivée totale est nulle. Nous allons exploiter cette idée en appelant $F(x, y, t) = 0$ la fonction qui est nulle à l'interface entre les deux fluides. $F(x, y, t) = 0$ est la forme implicite de l'équation de l'interface écrite sous forme explicite $y = \eta(x, t)$. On a donc

$$F(x, y, t) = y - \eta(x, t) = 0$$

c'est l'équation de l'interface, on remarque également que l'interface étant matérielle, F est transporté le long des lignes de courant : $\frac{dF}{dt} = 0$; (dérivée totale) Par définition de la dérivée lagrangienne $\frac{dy}{dt} = v(x, \eta, t)$ et $\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u \frac{\partial\eta}{\partial x}$, donc $dF/dt = 0$ s'écrit :

$$v(x, \eta, t) = \frac{\partial\eta}{\partial t}(x, \eta, t) + u \frac{\partial\eta}{\partial x}(x, \eta, t)$$

Remarque

qu'on peut réécrire en faisant apparaître les vitesses normales

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \underline{u} \cdot \underline{n} (1 + (\partial\eta/\partial x)^2)^{1/2}$$

Pour la vitesse sur le fond on a (en $y = -h_0$) : on a le glissement : $u \cdot n = 0$. $v = u \partial\xi/\partial x$.

En résumé :

$$\nabla \cdot u = 0, \rho(\partial u/\partial t + (u \cdot \nabla)u) = \nabla p - \rho e_y. \text{ et } \nabla \times u = 0$$

$$\text{à la surface : } p = p_0 + \sigma \nabla \cdot n; v(\eta) = \partial\eta/\partial t + u \partial\eta/\partial x$$

$$\text{sur le fond on a } v = u \partial\xi/\partial x.$$

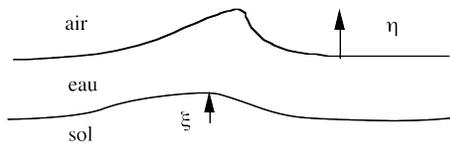


FIGURE 6 – la surface libre η , et un fond ξ .

Nous commençons par examiner quelques exemples simples de solutions de ces équations.

3.3 ordres de grandeur pour l'Equation de la Houle

3.3.1 Premières hypothèses :

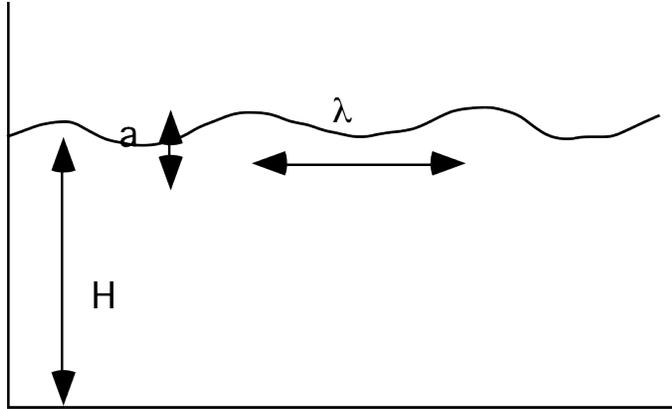


FIGURE 7 – la surface libre η , et un fond plat, des vagues de longueur d'onde λ . a amplitude des déplacements. H est la hauteur d'eau au repos.

de la mer, ou le bouchon de la ligne de canne à pêche, on constate qu'il n'avance pas avec les vagues mais revient à la même place. La vitesse est a/τ . Soit λ la longueur d'onde, le terme non linéaire $u\partial/\partial x$ a pour ordre de grandeur par rapport au terme instationnaire $\partial/\partial t$:

$$\frac{(u\partial/\partial x)}{(\partial/\partial t)} \sim \frac{((a/\tau)/\lambda)}{1/(\tau)} = a/\lambda,$$

donc on peut linéariser si $a/\lambda \ll 1$. On a aussi a/H petit : on s'intéresse à de petites perturbations, mais H/λ quelconque.

On a donc $a/\lambda \ll 1$ et $a/H \ll 1$ mais H/λ quelconque (plus tard on posera $\varepsilon = a/\lambda$ et $\delta = H/\lambda$, ici ε est petit δ est quelconque).

3.3.2 relation de pression :

La pression d'équilibre est la pression hydrostatique :

$$p = p_0 + \rho g(H - y).$$

On pose $p_0 + \rho g(H - y)$ la valeur "hydrostatique" (de repos), on étudie les variations P autour de cette valeur. La pression par la suite est donc écrite sous la forme :

$$p(x, y, t) = (p_0 + \rho g(H - y)) + P(x, y, t).$$

à l'interface elle s'écrit exactement :

$$p(x, y = H + \eta(x, t), t) = p_0, \quad \text{donc} \quad p(x, y = H + \eta(x, t), t) = p_0 = p_0 + \rho g(H - H - \eta(x, t)) + P(x, y = H + \eta(x, t), t).$$

On en déduit que, de manière exacte la correction P de la pression hydrostatique vaut à la surface :

$$P(x, y = H + \eta(x, t), t) = \rho g\eta(x, t).$$

La Houle (*swell* en anglais) est ce train de vagues que l'on observe en mer. Le modèle que nous présentons est dû vraisemblablement à Airy 1845. Il a été aussi présenté par Stokes qui a poussé le calcul aux ordres suivants.

Reprenons les hypothèses précédentes et examinons les (voir Landau Lifshitz §12, voir Lamb Chapt IX, voir Billingham & King etc). Premièrement, nous oublions la viscosité en supposant que le nombre de Reynolds est grand. La surface d'équilibre est plane. L'état de base est donc un fluide immobile. Il ne reste que la stratification de pression : $u = v = 0$ et $0 = -\partial p/\partial y - \rho g$. Le fond du récipient est en $y = 0$, la surface libre en $y = H$ où il règne la pression atmosphérique, donc :

$$p = p_0 + \rho g(H - y).$$

(La pression double chaque fois que l'on s'enfonce de 10m). La perturbation est légère, soit a son amplitude, et soit τ la période des oscillations. En effet si on observe un fêtu de paille à la surface

L'ordre de grandeur de P est donc bien $\rho g a$, et $P(x, y = H + \eta, t) = \rho g \eta$. La partie "active" de la pression est bien reliée aux variations de l'interface :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

On remarque que puisque $a \ll H$ on va linéariser cette relation de la correction P de la pression hydrostatique à la surface en

$$P(x, y = H, t) = \rho g \eta(x, t)$$

On parlera "d'aplatissement" des conditions aux limites puisque la condition est appliquée non pas sur la surface qui bouge mais sur le plan horizontal de la surface libre initialement immobile.

3.3.3 Relation à l'interface

La vitesse de déplacement de l'interface est (avec $\frac{(u\partial/\partial x)}{(\partial/\partial t)} \sim a/\lambda$) :

$$v(x, \eta, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, \eta, t) + u(x, \eta, t) \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t), \text{ comme } a/\lambda \ll 1, \text{ elle linéarisée en } v(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t)$$

on a a amplitude de η et τ la période des oscillations donc (a/τ) est bien la jauge de v . En ordre de grandeur l'incompressibilité : $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$, donne v et u de même jauge, à condition de mesurer toutes les directions avec la même longueur (ce qui est assez naturel).

3.3.4 Équations du mouvement

Si l'état de repos est perturbé, pour la vitesse transverse v il ne reste que P , en effet l'équation complète :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g,$$

devient par définition de P :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y}$$

et par linéarisation, avec $\frac{(u\partial/\partial x)}{(\partial/\partial t)} \sim \frac{(v\partial/\partial y)}{(\partial/\partial t)} \sim a/\lambda$, si $a/\lambda \ll 1$, cela donne :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Comparons en ordre de grandeur $\rho(\partial v/\partial t)$ à $-\partial P/\partial y$, cela donne respectivement $\rho a/\tau^2$ et $\rho g a/\lambda$. Cela donne $1/\tau^2 = g/\lambda$. On remarque que l'accélération transverse (a/τ^2) est négligeable en ordre de grandeur par rapport à l'accélération de la pesanteur (g), en effet : $a/\tau^2 \ll g$ car on vient de voir que $1/\tau^2 = g/\lambda$, donc l'accélération transverse $a/\tau^2 = ga/\lambda$ mais $(a/\lambda) \ll 1$, donc l'accélération transverse est bien négligeable par rapport à la pesanteur.

Pour la vitesse longitudinale u , on a :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

par linéarisation, avec $\frac{(u\partial/\partial x)}{(\partial/\partial t)} \sim \frac{(v\partial/\partial y)}{(\partial/\partial t)} \sim a/\lambda$, si $a/\lambda \ll 1$,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

mais on a vu que $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$ il ne reste que P ,

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Par définition de $\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$, l'ordre de grandeur de la variation de pression P étant estimé à $\rho g a$ et cette équation est en ordre de grandeur : $1/\tau^2 = g/\lambda$. Remplaçons τ par sa valeur $(\lambda/g)^{1/2}$ dans a/τ :

$$a/\tau \sim \sqrt{(a/\lambda)(a/H)} c_0 \text{ où } c_0^2 = gH$$

or a/H petit et $a/\lambda \ll 1$. La vitesse est plus petite que $c_0 = \sqrt{gH}$ qui est la vitesse "naturelle" (par analyse dimensionnelle) associée à un fluide au repos de profondeur H . H aurait d'ailleurs pu être considéré comme une longueur naturelle. Ici on a choisi λ et le temps associé obtenu "pendulaire" $(\lambda/g)^{1/2}$, ce qui semble raisonnable.

3.3.5 Résumons nous

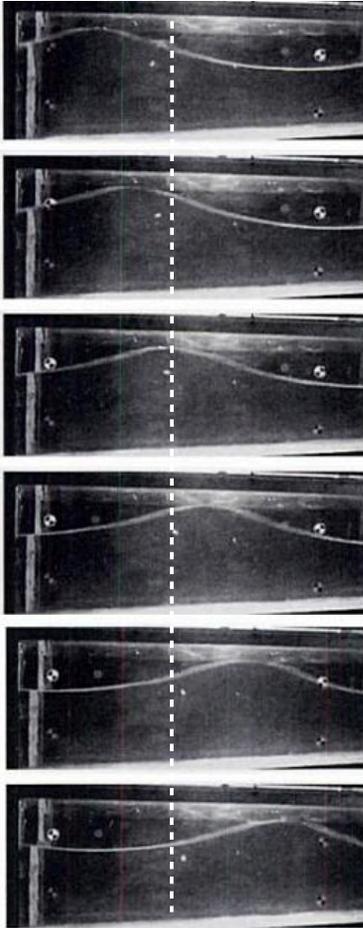


FIGURE 8 – l'objet flotte entre deux eaux et tourne en rond. Photo issue de Billingham & King

Echelles :

η mesuré par a

v mesuré par a/τ

u mesuré par a/τ

x mesuré par λ

y mesuré par λ

t mesuré par τ et $\tau = \sqrt{\lambda H}/c_0 = \sqrt{\lambda/g}$

P mesuré par $\rho g a$ et $\rho g a = \rho g H(a/H) = \rho c_0^2(a/H)$

$p = p_0 + \rho g(H - y) + P = p_0 + \rho c_0^2(1 - \bar{y}\lambda/H + (a/H)P)$

ou encore, p mesuré avec $\rho g H$: $p = p_0/(\rho g H) + 1 - \bar{y}\lambda/H + (a/H)\bar{P}$.

Par substitution directe et linéarisation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

$v = 0$ au fond, et en $y = H$: $v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ en haut et $P = \rho g \eta$ en haut. Ce qui donne par élimination de la vitesse par incompressibilité :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

$$\text{En } y = H : \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \text{ et aussi } P = \rho g \eta. \text{ En } y = 0 : \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

C'est ce problème que nous devons résoudre. Notons que le domaine est plat par la linéarisation, "c'est un exemple d'aplatissement des conditions aux limites".

3.3.6 Résolution en modes normaux

On cherche des solutions en $F(y)e^{i(kx-\omega t)}$ (car les équadiffs sont invariantes en t et x), les conditions aux limites portent sur y . La solution de

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \text{ est donc celle de } -k^2 + \frac{d^2 F}{dy^2} = 0$$

et la solution est donc en $P = e^{\pm ky} e^{i(kx-\omega t)}$. Substituons :

$$P = P_+ e^{ky} e^{i(kx-\omega t)} + P_- e^{-ky} e^{i(kx-\omega t)}$$

que l'on dérive en y : $\frac{\partial P}{\partial y}$ dans $\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y}$ et comme $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = k(P_+ e^{ky} e^{i(kx-\omega t)} - P_- e^{-ky} e^{i(kx-\omega t)}) \text{ et la vitesse } v = \frac{k}{i\rho\omega} (P_+ e^{ky} e^{i(kx-\omega t)} - P_- e^{-ky} e^{i(kx-\omega t)})$$

soit au fond $v(x,0) = 0$ ce qui nous donne $P_+ = P_-$ donc

$$v = \frac{kP_+}{i\rho\omega} (e^{ky} - e^{-ky}) e^{i(kx-\omega t)} = -i \frac{2kP_+}{\rho\omega} (\sinh(ky)) e^{i(kx-\omega t)}$$

par l'incompressibilité on obtient u :

$$u = \frac{2kP_+}{\rho\omega} (\cosh(ky)) e^{i(kx-\omega t)} \text{ associée à } v = i \frac{2kP_+}{\rho\omega} (\sinh(ky)) e^{i(kx-\omega t)}.$$

On remarque que l'écoulement est irrotationnel (c'est une conséquence du problème linéaire). En général, pour une houle linéaire sans courant, il ne peut y avoir de rotationnel puisqu'il n'y a pas de transport (on rappelle que ω est conservé le long des lignes de courant)...

On a pour la pression, $P = 2P_+ (\cosh(ky)) e^{i(kx-\omega t)}$, or, en haut, en $y = H$, on a par la condition aux limites $P_+ = \rho g \eta$, et en écrivant $\eta = \eta_0 e^{i(kx-\omega t)}$ donc

$$\eta = (2P_+ / \rho g) \cosh(kH) e^{i(kx-\omega t)} = \eta_0 e^{i(kx-\omega t)}.$$

On obtient ainsi u , v et P en fonction de la perturbation η de la surface :

$$u = \frac{kg}{\omega} \eta \cosh(ky) / \cosh(kH), \quad v = -i \frac{kg}{\omega} \eta \sinh(ky) / \cosh(kH), \quad P = \rho g \eta \cosh(ky) / \cosh(kH), \quad \eta = \eta_0 e^{i(kx-\omega t)}.$$

à la surface : $v = \partial \eta / \partial t$ donc on a : $-i(kg/\omega) \sinh(kH) / \cosh(kH) = -i\omega$ qui donne $\omega^2 = gk \tanh(kH)$.

On obtient finalement la fameuse relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk \tanh(kH)$$

Retenons donc la relation de dispersion des ondes linéaires de profondeur quelconque. En ordre de grandeur : $1/\tau^2 \sim c_0^2/\lambda/H$ est vérifié comme nous l'avions suggéré.

On définit la vitesse de phase $c = \omega/k$ et donc

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kH) \quad c = \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kH)} \text{ en terme de longueur d'onde } c = \pm \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh(2\pi \frac{H}{\lambda})}$$

Sur le tableau ci dessous on donne la vitesse en fonction de la longueur d'onde (on bonne approximation pratique est dans [5]) $\lambda = \frac{3}{2}T^2$ (mètres et secondes) et $V = 3T$ (en noeuds $\sim 0.5m/s$ et en secondes).

λ (m)	0.1	1	10	100	1000
c (m/s)	0.4	1.25	4	12.5	40
T (s)	0.25	0.8	2.5	8	25

Les premiers signes d'une dépression forte sur l'atlantique sont l'arrivée sur les côtes de l'Ouest de l'Europe d'une houle de longueur d'onde très longue et de hauteur faible. Leur période est typiquement de 30s et leur vitesse de 47m/s. Elle parcourt environ 4000km/jour et donc elle arrive bien avant la tempête qui va mettre plusieurs jours à se déplacer. Plus elle avance, plus la longueur d'onde diminue car les vagues se sont déplacées plus lentement.

3.3.7 Deux cas limites : si le fond est très profond

Si le fond devient de plus en plus profond :

$$\omega^2 = gk \tanh(kH) \sim gk \quad c = \pm \sqrt{\frac{g}{k}} \text{ en terme de longueur d'onde } c = \pm \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

H n'a plus de raison d'intervenir, et effectivement, il disparaît : $1/\tau^2 c_0^2/\lambda/H$ est en réalité $1/\tau^2 g/\lambda$. La vitesse c_0 est un artifice de calcul. Sur le graphe 9 on trace λ en fonction de H à ω fixé. Si on se donne exemple une houle océanique de période 10s, on voit qu'elle est de plus en plus courte près de la côte. La vitesse $2\pi\omega\lambda$ décroît aussi. Ceci permet d'expliquer pourquoi les vagues sont toujours parallèles à la plage! (la courbe suivante 9 montre la longueur d'onde fonction de H lorsque l'on se donne ω , cette courbe serait à modifier près de λ nul : la tension de surface modifie alors la relation de dispersion : ce sont les ondes capillaires de longueur d'onde environ égale à 1.7cm, vitesse 23cm/s).

3.3.8 Deux cas limites : si le fond est peu profond

- à partir de la relation de dispersion

Si maintenant le fond est peu profond H/λ petit

$$\omega^2 = gk \tanh(kH) \sim gk^2 H \quad c = \omega/k = \pm \sqrt{gH} \text{ ne dépend pas de la longueur d'onde}$$

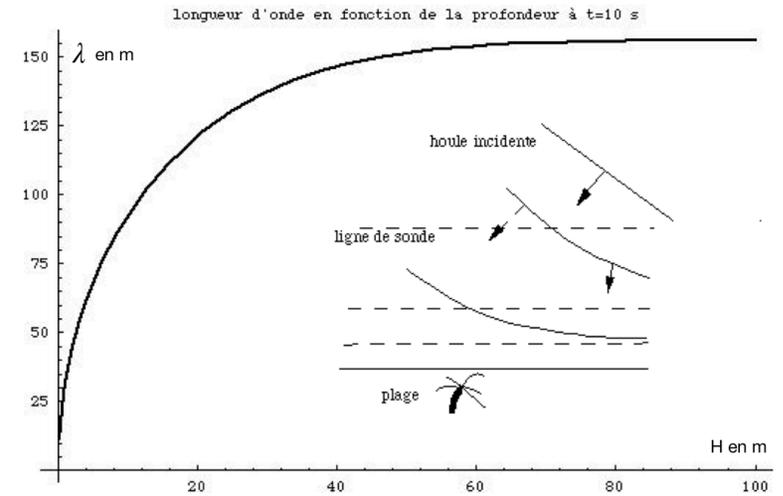


FIGURE 9 – Lorsque le fond diminue, la vitesse diminue. Sur ce graphe on trace λ en fonction de H la profondeur à ω fixé. la vitesse est alors $c = \omega\lambda/(2\pi)$. On se donne pour tracer cette courbe une houle océanique de période 10s ($T = 2\pi/\omega=10s$). On trace la courbe implicite $\lambda = (g/(2\pi\omega^2) \tanh(2\pi H/\lambda))$. Au loin, $\lambda = (g/(2\pi\omega^2))$, on voit qu'elle est de plus en plus courte près de la côte car $\lambda = \sqrt{(g/\omega^2)H}$. La vitesse décroît aussi. Ceci permet d'expliquer pourquoi les vagues sont toujours parallèles à la plage!

avec H/λ petit, à k fixé ω devient de plus en plus petit. Le milieu n'est plus dispersif. On pose $c_0 = \sqrt{gH}$. Les vitesses et pression sont

$$u = \frac{kg}{\omega} \eta \cosh(ky) / \cosh(kH) \sim \frac{g}{c_0} \eta \quad \text{et} \quad v = -i \frac{kg}{\omega} \eta \sinh(ky) / \cosh(kH) \sim -kH(y/H) \frac{g}{\omega} \eta \quad \text{et} \quad P = \rho g \eta \cosh(ky) / \cosh(kH) \sim \rho g \eta$$

La vitesse u et la pression ne dépendent plus de la profondeur, examinons maintenant la vitesse transverse. On constate que la vitesse transversale devient plus faible que la vitesse longitudinale, le rapport de ces deux vitesses (v/u) est d'ordre $(H/\lambda) \ll 1$. Le milieu n'est plus dispersif..

La ligne précédente permet d'écrire aussi que en $y = H$ on a $\frac{\partial \eta}{\partial t} = v(H)$ avec $v(H) \sim -kH \frac{g}{\omega} \eta$

$$\omega u \sim kg \eta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -kH \frac{g}{\omega} \eta = kuH$$

Si dans $\omega u \sim kg \eta$ et $\omega \eta \sim Hk \eta$ on remplace $-i\omega$ par $\frac{\partial}{\partial t}$ et ik par $\frac{\partial}{\partial x}$ on retrouve le modèle de la section 1 où la vitesse ne varie pas sur l'épaisseur, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta = -\frac{\partial}{\partial x} (Hu) \quad \text{et} \quad \rho \frac{\partial}{\partial t} u = -\rho g \frac{\partial}{\partial x} \eta.$$

On verra ou on a vu que c'est Saint-Venant linéarisé.

• Par substitution directe et linéarisation :

Une autre manière de faire la même chose et de partir du système complet qui est le point départ de la houle d'Airy : Euler en profondeur quelconque et avec une très faible perturbation de la surface libre

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

La dernière qui est l'irrotationnalité est soit une hypothèse, soit une conséquence de la linéarisation et de la deuxième dérivée par rapport à y plus la troisième dérivée par rapport à x

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

$v = 0$ au fond, et en $y = H$: $v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ en haut et $P = \rho g \eta$ en haut. Par élimination de la vitesse par incompressibilité on avait trouvé : $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$. Conditions en $y = H$: $\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ et aussi $P = \rho g \eta$. En $y = 0$: $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

Si on se place ne couche mince $y = \varepsilon \tilde{y}$, on a $\varepsilon^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{y}^2} = 0$. donc $\frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{y}^2} = 0$, qui s'intègre deux fois en utilisant les conditions pour donner $P(x, t) = \rho g \eta(x, t)$. l'incompressibilité fait écrire $v = \varepsilon \tilde{v}$, et donc $\frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = 0$ donc $\frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} = 0$ la vitesse ne varie pas dans l'épaisseur, l'incompressibilité $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$, et la condition à la surface $v(H) = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ donne la vitesse $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x}$ on obtient encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta = -\frac{\partial}{\partial x} (Hu) \quad \text{et} \quad \rho \frac{\partial}{\partial t} u = -\rho g \frac{\partial}{\partial x} \eta.$$

On verra ou on a vu que c'est Saint-Venant linéarisé.

• Ce qui nous permet de dire que, si on part d'une description en couche mince, on obtient des équations non linéaires : les équations de Saint-Venant. Ensuite on considère des petites perturbations, de cette surface fine, alors on obtient l'équation d'onde.

Si on prend le chemin des équations d'Euler générales et que l'on fait une faible perturbation de la surface libre, on obtient le problème menant à la houle d'Airy. Si on considère une profondeur de plus en plus faible dans cette solution, on retrouve l'équation d'onde.

3.3.9 Trajectoires

Revenons à une profondeur quelconque

Pour tracer les trajectoires, :

$$x = X_0 + X_1(t) \quad y = Y_0 + Y_1(t)$$

où X_1 et Y_1 sont de petits déplacements autour de X_0 et Y_0 , au premier ordre on peut confondre la vitesse Eulerienne et Lagrangienne donc

$$X_1' = u = \frac{kg}{\omega} \eta_0 \cosh(kY_0) / \cosh(kH) \cos(kX_0 - \omega t)$$

$$Y_1' = v = \frac{kg}{\omega} \eta_0 \sinh(kY_0) / \cosh(kH) \sin(kX_0 - \omega t)$$

avec par exemple $X_1(0) = Y_1(0) = 0$,

$$X_1 = \frac{kg}{\omega^2} \eta_0 \cosh(kY_0) / \cosh(kH) \sin(kX_0 - \omega t)$$

$$Y_1 = \frac{kg}{\omega^2} \eta_0 \sinh(kY_0) / \cosh(kH) \cos(kX_0 - \omega t)$$

par élimination du temps :

$$\begin{aligned} & (X_1 / [\cosh(kY_0)] - \eta_0 \frac{g}{kc^2 \cosh(kH)} \sin(kX_0))^2 + \\ & + (Y_1 / [\sinh(kY_0)] - \eta_0 \frac{g}{kc^2 \cosh(kH)} \cos(kX_0))^2 = \left(\eta_0 \frac{g}{kc^2 \cosh(kH)} \right)^2 \end{aligned}$$

Les "particules" de fluide tournent dans le sens des aiguilles d'une montre le long d'une petite ellipse avec la période de l'onde. Au fur et à mesure que l'on s'approche du fond, la trajectoire devient de plus en plus plate.

Attention, on mesure la position à partir du fond, donc si le fond est profond, il est plus judicieux d'utiliser la distance à la surface $H - z$, donc $Y_0 + z = H$

$$X_1 = \frac{kg}{\omega^2} \eta_0 \cosh(k(H - z)) / \cosh(kH) \sin(kX_0 - \omega t) \quad \text{et} \quad Y_1 = \frac{kg}{\omega^2} \eta_0 \sinh(k(H - z)) / \cosh(kH) \cos(kX_0 - \omega t)$$

on voit mieux que si kH est grand, $\cosh kH \simeq \sinh kH \simeq e^{kH}$ donc le rayon est $\frac{kg}{\omega^2} \eta_0 e^{-kz}$

On trace ici le dessin des trajectoires... Que l'on peut voir en animation sur : <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SIEF/SIEF97/HouleA.mov>

En eau très profonde les trajectoires sont des cercles de rayon décroissant rapidement. En eau moins profonde, ce sont des ellipses, le petit axe diminue jusqu'à zéro, le grand axe reste à peu près constant.

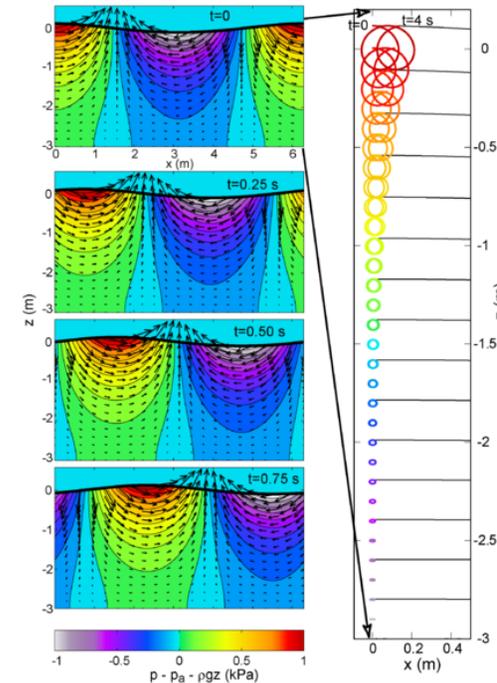


FIGURE 10 — source: http://fr.wikimedia.org/wiki/Fichier:2sec_3mdepth_puv_drift.png

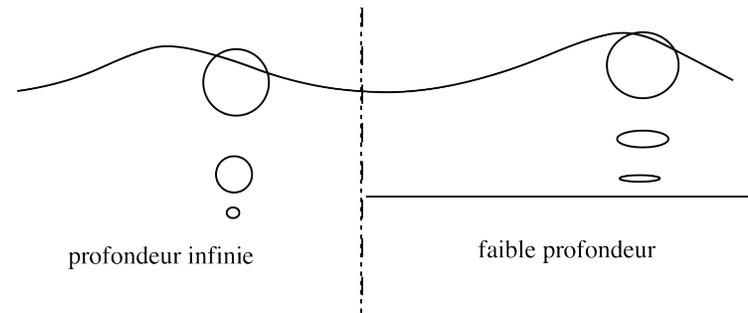


FIGURE 11 – En eau très profonde les trajectoires sont des cercles de rayon décroissant rapidement. En eau moins profonde, ce sont des ellipses, le petit axe diminue jusqu'à zéro, le grand axe reste à peu près constant. <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SIEF/SIEF97/HouleA.mov>

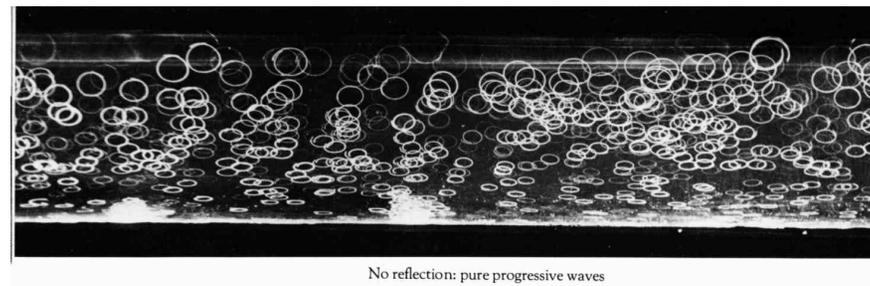


FIGURE 12 – Sous la houle, visualisation de trajectoires de bulles en pose longue, les trajectoires des ellipses, le petit axe diminue jusqu'à zéro, le grand axe reste à peu près constant. photo issue du Livre de Van Dyke "an album of fluid motion" Parabolic Press, Stanford, Ca . (1982)

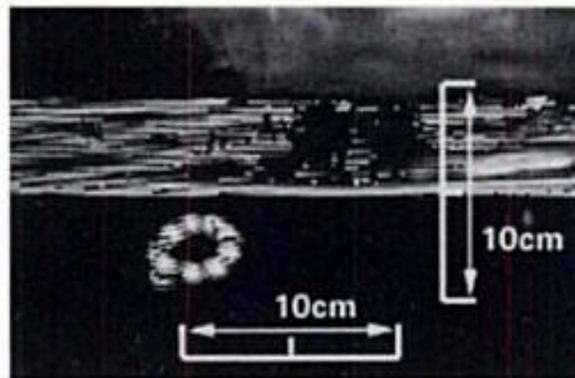


FIGURE 13 – A gauche, l'objet flotte entre deux eaux et tourne en rond. Photo issue de Billingham & King. A droite Trajectoire circulaire à la surface de l'eau [click to launch the movie, Adobe Reader required], le film est aussi sur <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SIEF/SIEF97/HouleA.mov>

3.4 Ecriture en potentiel

Le fait que la houle soit irrotationnelle (par hypothèse) fait que l'on écrit souvent les équations en fonction potentiel ϕ (notons que l'on avait pas besoin de cette hypothèse dans le cas linéarisé précédent). On a pour la vitesse qui dérive du potentiel par définition : $u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$. L'incompressibilité donne $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$. La condition de surface libre s'écrit alors à l'aide de l'équation de Bernoulli

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}^2 + \frac{\partial\phi}{\partial y}^2\right) + g\eta = 0$$

Notre présentation précédente avec Euler, linéarisait tout de suite les équations. En fait la démarche en potentiel est plus intéressante, car la non linéarité est rejetée sur la surface, le Laplacien (sous l'eau) reste linéaire.

L'équation à la surface se linéarise en $y = H$ à la surface libre aplatie :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0$$

La condition dynamique à la surface libre s'écrit $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x}$. Elle se linéarise en $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial t}$. Ces conditions linéarisées à la surface aplatie : $\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0$ et $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial t}$ se combinent, en $y = H$:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$$

et on a toujours en $y = 0$ le glissement $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$.

Le système à résoudre est donc

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{en } y = H \text{ on a : } \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \quad \text{et en } y = 0 \text{ on a } \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0.$$

Solution on voit que le Laplacien suggère une solution en $e^{ikx - |k|y}$, et en se donnant une perturbation de surface en $e^{i(kx - \omega t)}$, on trouve

$$\eta = \eta_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad \text{avec } \omega^2 = gk \tanh(kh)$$

$$\phi = -\eta_0 \frac{ig}{\omega} \frac{\cosh(ky)}{\cosh(kH)} = -\eta_0 \frac{i\omega}{k} \frac{\cosh(ky)}{\sinh(kH)}.$$

On remarque la double écriture de ϕ car $\omega/k = (g\omega) \tanh(kh)$, en redérivant on réobtient les champs précédents u, v, P .

3.5 Non linéarités : houle de Stokes

3.5.1 de la houle d'Airy à la houle de Stokes

Nous venons de voir la théorie linéarisée d'Airy. Mais, si on observe avec attention les vagues en mer, on constate qu'elles ne sont quasi-jamais sinusoïdales : les crêtes sont plus pointues, les creux plus plats. Il faut pousser le développement aux ordres suivants : c'est la théorie de Stokes.

3.5.2 Cas de l'oscillateur simple

Avant de commencer une petite exploration de cette houle non linéaire, prenons un oscillateur harmonique simple ($\partial_t^2\phi + \omega_0^2\phi$) avec un terme non linéaire (ϕ^2) :

$$\partial_t^2\phi + \omega_0^2\phi + \phi^2 = 0.$$

Sa solution de repos est $\phi = 0$. Cette équation simplifiée va servir de modèle pour comprendre l'influence des termes quadratiques petits dans un développement en série perturbative autour de la solution de repos.

On s'intéresse à une perturbation d'ordre ε petite de la position de repos qui est solution du problème ; donc on pose $\phi = 0 + \varepsilon\phi_0 + \varepsilon^2\phi_1 + \dots$, par substitution et identification des puissances à l'ordre 0 on a le problème linéarisé

$$\partial_t^2 \phi_0 + \omega_0^2 \phi_0 = 0$$

de solution $\phi_0 = A_0 \cos \omega_0 t$, l'ordre suivant satisfait :

$$\partial_t^2 \phi_1 + \omega_0^2 \phi_1 + \phi_0^2 = 0$$

or $\cos^2 \omega_0 t = (1 + \cos 2\omega_0 t)/2$, donc il y a une solution particulière $-A_0^2/(2\omega_0^2)$ et une solution forcée solution de

$$\partial_t^2 \phi_1 + \omega_0^2 \phi_1 + A_0^2 \cos(2\omega_0 t)/2 = 0$$

d'où la solution forcée $((A_0^2/6/\omega_0^2) \cos 2\omega_0 t)$, le développement de la solution finale est donc

$$\phi = \varepsilon A_0 \cos \omega_0 t + \varepsilon^2 \left(-\frac{A_0}{2\omega_0^2} + \frac{A_0}{6\omega_0^2} \cos(2\omega_0 t) \right) + \dots$$

On voit que les termes non linéaires de l'équation provoquent un déplacement du niveau 0 et une réponse en doublement de fréquence $\omega_0 \rightarrow 2\omega_0$.

De même on peut montrer avec plus de difficultés qu'une houle de Airy en $\cos(kx - \omega t)$, va générer des termes en $\cos(2(kx - \omega t))$.

3.5.3 Cas de la houle

Avec la présentation avec le potentiel ϕ , on a un avantage, c'est que le problème s'écrit en volume toujours comme un Laplacien :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \text{ et à la surface la relation exacte est : } \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x} + \frac{\partial \phi^2}{\partial y} \right) + g\eta = 0.$$

Notre présentation précédente, linéarisait tout de suite les équations, puis on obtenait un laplacien pour la pression. En fait la démarche en potentiel est plus intéressante, car la non linéarité est rejetée sur la surface.

Ensuite, on a dit que cette équation se linéarise en

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0$$

dont la solution sera en $\cos(kx - \omega t)$, mais dans les termes négligés, il y a des carrés

$\frac{\partial \phi^2}{\partial x}$, donc des termes en $\cos^2(kx - \omega t)$, qui seront en terme source (petits). Ce terme source du second ordre en $\cos^2(kx - \omega t)$ s'écrit aussi en $\cos(2(kx - \omega t))$, car $2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$. La non linéarité dans la surface libre va faire ainsi apparaître un terme source de phase double qui s'écrit après calcul :

$$\eta = \eta_0 (\cos(kx - \omega t)) + \frac{\pi \eta_0}{2\lambda} \frac{3 - \tanh^2 kH}{\tanh^3 kH} \cos(2(kx - \omega t) + \dots)$$

l'effet est d'aplatir le fond et de rendre la crête plus fine. Le nombre $\frac{\pi \eta_0}{2\lambda} \frac{3 - \tanh^2 kH}{4 \tanh^3 kH}$ est sans dimension.

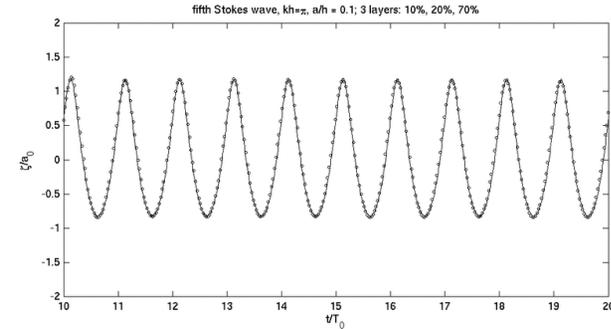


FIGURE 14 – comparaison Code SWASH <http://swash.sourceforge.net/> et solution de la houle de Stokes

3.6 Retour sur les limites

Si on estime le terme relatif non linéaire :

$$\frac{u\partial_x u}{\partial_t u} \sim \frac{uk}{\omega} \sim u/c = k\eta_0 / \tanh(kH)$$

en onde peu profonde, c'est η_0/H

Le terme non linéaire de Stokes (note $(\cosh(2k) + 2) \coth(k) \operatorname{csch}^2(k) = (3 - \tanh^2(k)) \coth^3(k)$) $\frac{\pi\eta_0}{2\lambda} \frac{3 - \tanh^2(k)kH}{\tanh^3(k)H}$ avec $kH = 2\pi H/\lambda$ faible, $\frac{\eta_0}{4} \frac{3}{k^2 H^3} \sim \frac{\eta_0 \lambda^2}{H^3}$ il est proportionnel à

$$Ur = \frac{\eta_0 \lambda^2}{H^3}$$

appelé le nombre d'Ursell.

Le nombre d'Ursell ne doit pas être trop grand, s'il est trop grand on pousse à l'ordre suivant.

par exemple on peut considérer que si $\frac{\eta_0 \lambda^2}{H^3} < 10$ la théorie linéaire est applicable.

Résolution des équations de Navier Stokes pour calculer la houle qui se propage :

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/houle.c>

Résolution du Laplacien :

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/airywave.c>

3.6.1 Dérive de Stokes

Le déplacement des particules est $\frac{dx}{dt} = u$

La vitesse de dérive de Stokes est en $\omega k \eta_0^2 e^{-2kz}$, c'est le terme constant associé à la non linéarité.

3.6.2 Houle de Gerstner

C'est une sorte d'approximation qui suppose la forme de Airy toujours vraie mais avec un écoulement rotationnel.

3.6.3 Houle de Cnoïdale

Lorsque $H/\lambda > 1/8$ la théorie de de Stokes est applicable, Si la couche devient plus mince, les effets dispersifs sont plus faibles, la solution s'exprime alors avec les "cn cosinus de Jacobi" ("cnoïdale"). La pression est hydrostatique en première approximation et $\eta = \eta_0 cn_m^2\left(\left(\frac{3}{2m}\right)^2 \frac{x}{H} \sqrt{\frac{\eta_0}{H}}\right)$ avec le cosinus de Jacobi d'ordre m .

3.7 Génération de la Houle

3.7.1 Génération de la Houle en mer

Comment naît la houle ? Elle est générée par le vent. Un mécanisme communément invoqué est celui de Kelvin-Helmholtz, nous verrons en cours de stabilité cette théorie et ses limites. En effet le modèle KH n'est pas suffisant et la compréhension de la génération des vagues par le vent est encore un sujet d'études en 2020.

3.7.2 Génération de la Houle par un batteur

Voir Billingham & King [1]

4 Effets de Dispersion

4.1 Capillarité

Lorsque l'on prend en compte les effets de tension de surface, il apparaît un terme en $\sigma K n_i$ avec σ te,sio,n de surface et K courbure de l'interface. La linéarisation autour d'une interface plate de la courbure K donne la dérivée seconde de l'interface, et donc il va y avoir un terme supplémentaire de dérivée seconde dans la pression : $-\sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta$ qui est a une action de rappel et aplatit l'interface.

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta = -\frac{\partial}{\partial x} (Hu) \text{ et } \rho \frac{\partial}{\partial t} u = -\rho g \frac{\partial}{\partial x} \eta + \sigma \frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta$$

On montre alors que

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \left(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}\right)$$

la vitesse $c = \omega/k$ présente un minimum, en $\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ (la courbe suivante montre la longueur d'onde fonction de h lorsque l'on se donne λ cette courbe serait à modifier près de λ nul : la tension de surface modifie alors la relation de dispersion : ce sont les ondes capillaires de longueur d'onde environ égale à 2.7mm,). ($\sigma = 70.10^{-3} N.m^{-1}$ eau pure à 20°C).

- pour $\lambda \gg \lambda_c$, on a $\frac{\sigma k^2}{\rho g} \ll 1$ ce terme est négligeable et on retrouve $c = \sqrt{(g/k) \tanh(kh)}$.
- pour $\lambda \ll \lambda_c$, on a $\frac{\sigma k^2}{\rho g} \gg 1$, la vitesse devient $c \sim \sqrt{\frac{\sigma \tanh(kh)k}{\rho}}$ et comme en général h est plus profond que λ_c on a donc pour la vitesse des ondes capillaires :

$$c_{cap} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}}$$

Les petites longueurs d'ondes ($k\lambda_c$ petit) vont plus vite que les grandes longueurs d'ondes ($k\lambda_c$ grand), il ne faut tenir compte de ce phénomène que pour les ondes de taille du centimètre au millimètre.

Nous allons maintenant examiner un autre cas.

4.2 Effet faible de la profondeur

Nous venons de voir par l'étude de la houle que $\omega = \sqrt{gk \tanh(kH)}$. Nous voulons voir de combien on s'éloigne de la propagation linéarisée à $\omega = \sqrt{gk^2 H}$ de la houle en eau peu profonde.

Un développement limité de la relation de dispersion est $\omega = \sqrt{gk^2 H - \frac{1}{3}gk^4 H^3 + \dots}$ pour les ondes longues, et ainsi $\omega = \sqrt{gH}k(1 - \frac{1}{6}k^2 H^2 + \dots)$

Pour une onde $e^{i\omega t - ikx}$, on identifie ω avec $-i \frac{\partial}{\partial t}$ et k avec $i \frac{\partial}{\partial x}$ donc l'équation de dispersion précédente $\omega = c_0 k(1 - \frac{1}{6}k^2 H^2 + \dots)$ s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} = -c_0(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{6}H^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3}) + \dots$ ou encore $\frac{\partial}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{6}H^2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \dots$

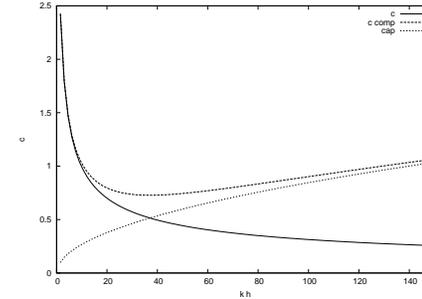


FIGURE 15 – tracé de la vitesse $c = \sqrt{(g/k) \tanh(kh)}$ comparé à la vitesse en prenant en compte les ondes capillaires $c_{comp} = \sqrt{(g/k) \tanh(kh)(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g})}$ et $c_{cap} = \sqrt{(\frac{\sigma k}{\rho})}$ en fonction de kh pour $h = 1m$.

Rappelons les équations linéarisée en ondes longues (*shallow water* / Saint-Venant) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) = 0, \text{ et } \rho \frac{\partial}{\partial t}u = -\rho g \frac{\partial}{\partial x}\eta$$

on va écrire avec un terme correctif en $H^2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial t}u - \frac{1}{3}H^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t}u = -g \frac{\partial}{\partial x}\eta$$

ce système simplifié a pour relation de dispersion $\omega^2 = \frac{gk^2 H}{1 + \frac{1}{3}k^2 H^2}$, qui a le bon goût de redonner la relation de dispersion $\omega^2 = gk^2 H(1 - \frac{1}{3}k^2 H^2 + \dots)$. C'est donc une bonne approximation.

De même la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta - \frac{1}{3}H^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t}\eta + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) = 0 \text{ et } \rho \frac{\partial}{\partial t}u = -\rho g \frac{\partial}{\partial x}\eta$$

présente encore la même relation de dispersion pour kH petit : $\omega^2 = gk^2 H(1 - \frac{1}{3}k^2 H^2 + \dots)$.

L'écriture n'est pas unique. Ces différents jeux d'équations tous équivalents à petit kH au premier ordre sont les équations de Boussinesq. Ces équations conduisent à la propagation du soliton et du mascaret de faible hauteur (*cf* plus loin... dans <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf>)

Pour une résolution numérique en C simple voir <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/boussinesqc.c>

et

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/ressaut_mascaret.c

Ces équations vont aussi nous servir pour trouver la forme au loin d'une perturbation d'eau.

5 Houle linéaire en faible profondeur (équation d'onde) en 1D

Revenons au cas linéaire simple qui donne l'équation d'onde linéarisée en eau peu profonde, de profondeur $H = h_0$, les équations sont :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h_0 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

5.1 Energie en 1D

Avant de compliquer on va écrire la conservation de l'énergie à partir de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h_0 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

ce que l'on écrit

$$uh_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -gh_0u \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ et } g\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = -gh_0\eta \frac{\partial u}{\partial x}$$

on fait la somme des deux et on reconnaît la dérivée de $\frac{1}{2}(h_0u^2 + g\eta^2)$ qui est la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle. En effet l'énergie potentielle d'un élément de masse dy à la hauteur y est $\rho gydy$, l'énergie du niveau initial à la surface η , est $\int_0^\eta \rho gydy = \frac{1}{2}g\eta^2$. On a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}(h_0u^2 + g\eta^2) \right) = -c_0^2 \frac{\partial}{\partial x} (u\eta)$$

on a mis les équations sous forme conservative : variation d'énergie=flux. Pour une onde allant de gauche à droite, $\eta(x, t) = f(x - c_0t)$, donc $u(x, t) = gf/c_0$ donc $h_0u^2 + g\eta^2 = 2gf^2$ et $u\eta = (g/c_0)f^2$, en substituant et en simplifiant par g la gravité, il ne reste que :

$$\frac{\partial}{\partial t} (f^2) = -c_0 \frac{\partial}{\partial x} (f^2) \text{ ou encore } \frac{\partial}{\partial t} (f^2) + c_0 \frac{\partial}{\partial x} (f^2) = 0.$$

Classiquement pour l'équation des ondes non dispersives, on voit donc que l'énergie se déplace à la vitesse c_0 , en effet on a une équation d'advection. Nous verrons plus loin que l'énergie ne se propage pas forcément à la même vitesse que le signal, l'une est la vitesse de groupe, l'autre de phase.

5.2 Premier exemple le Tsunami

Le calcul ci contre est fait avec les équations de Saint-Venant (voir chapitre suivant), il a été effectué par le CEA (Hélène Hébert) et était une des premières simulation du tsunami en Indonésie du 26/12/2004.

En première approximation, on peut oublier les termes non linéaires de Saint-Venant et considérer qu'il s'agit de l'onde linéarisée simple, la perturbation se déplace sur de très grandes distances en eau très profonde mais la longueur de la vague est supérieure à la profondeur, l'équation précédente devient l'équation des ondes (le d'Alembertien) :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad \text{avec } c = \sqrt{gh_0}$$

Le premier problème est de déterminer la source : c'est en fait le fond qui bouge très vite et qui déplace la masse d'eau. En première approximation, cet effet est instantané.

On voit que sur l'image le tsunami a parcouru 32 degrés en 5 heures. 32 degrés correspondent à $32/90 * \pi/2 * 6378 = 3500\text{km}$ divisé par 5 heures, on trouve l'ordre de grandeur : $c = 720 \text{ km/h}$, soit 200m/s , or $c^2/g = (712/3.6)^2/9.81 = 4000\text{m}$ C'est bien la profondeur de l'océan indien en moyenne.

Remarque, un Mile est une minute d'angle (60 minutes = 1 degrés, le tour de la terre est 360 degrés, et la circonférence de la terre est $2\pi R_{terre}$) : la longueur du Mille marin est $6378000 * 2 * \pi / (360 * 60) = 1852\text{m}$ la distance mesurée au bout de 5 heures est de 32 degrés, donc $32*60=1920$ Miles, soit en 5 heures : $1920/5= 384$ noeuds, 1 noeud = 0.5m/s , on retrouve bien les 200m/s .

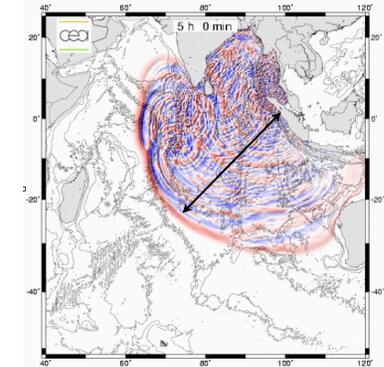


FIGURE 16 – Gauche, calcul Saint Venant (voir chapitre suivant) effectué par le CEA (Hélène Hébert) de simulation du tsunami du 26/12/04 [click to launch the movie, Adobe Reader required]. Droite, sachant que la profondeur moyenne est de 4km, la vitesse moyenne est de 200m/s (en effet le Tsunami parcourt 32 degrés en 5h).

5.3 Pour mémoire équation d'onde en axi

Dans le cas axi symétrique (source ponctuelle sur un plan d'eau), l'équation de conservation de quantité de mouvement : $\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial r}$ et celle de la masse change un peu car la masse se conserve circulairement $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{h \partial(ru)}{r \partial r}$, attention aux termes en $1/r$ et r , on a donc

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial}{r \partial r} \left[r \frac{\partial \eta}{\partial r} \right], \text{ ou l'équation des ondes } \frac{\partial^2}{\partial r^2} \eta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \eta - \frac{\partial^2 \eta}{c_0^2 \partial t^2} \eta = 0$$

- pour une onde sinusoidale en temps, pour un mode $i\omega t$:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \eta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \eta + \frac{\omega^2}{c_0^2} \eta = 0$$

or la fonction de Bessel vérifie $J_0''(x) + J_0'(x)/x + J_0(x) = 0$. Pour les x petits, $J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$ pour les x grands $J_0(x) = 1 \sqrt{2/(\pi x)} \cos(x - \pi/4) + \dots$

L'équation de Bessel d'ordre n est $x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0$.

- Pour une source q sinusoidale ponctuelle $q = \delta e^{-i\omega t}$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \eta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \eta + \frac{\omega^2}{c_0^2} \eta = q$$

on trouve que la solution est écrite avec la fonction de Hankel (c.f. Whitham page 220)

$$\eta = \frac{1}{4i} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{rc_0} \right) e^{-i\omega t}$$

- Pour une source quelconque loin de la source $(c_0 t - r)/r \ll 1$ avec $\tau = t - r/c_0$ (c.f. Whitham page 221)

$$\eta = -\sqrt{\frac{c_0}{2r}} Q(t - r/c_0), \text{ avec } Q(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau \frac{q(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\tau - \zeta}}$$

on voit que la solution de l'équation d'onde en 2D plan (onde cylindrique) est bien différente par rapport au 1D $\eta = f(t - x/c_0)$ ou en 3D $\eta = \frac{1}{r} f(t - r/c_0)$. Elle s'écrit avec la "dérivée fractionnaire" de la source (Lighthill [6] page 21, Whitham [13] page 219-221).

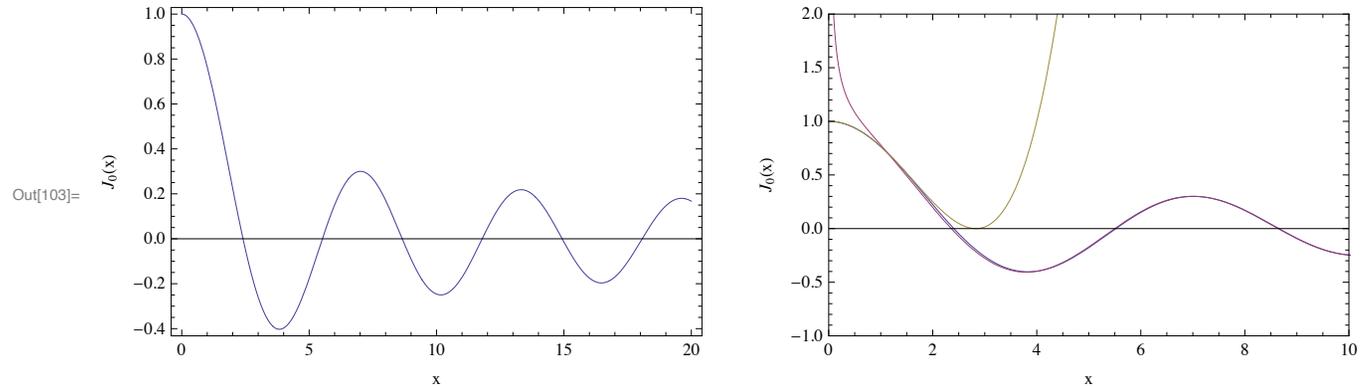


FIGURE 17 – fonction de bessel J_0 et ses approximations $1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}$ et $\sqrt{2/(\pi x)} \cos(x - \pi/4) \dots$

5.4 Reflexion sur un changement de fond

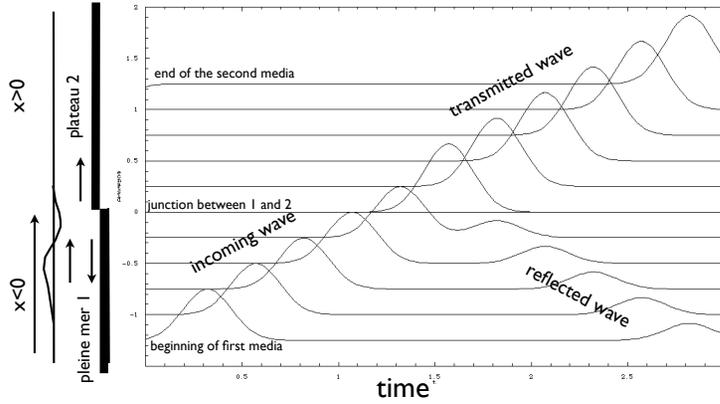


FIGURE 18 – La discontinuité de la pleine mer à un plateau, les vagues transmises sont amplifiées.

Ces équations de propagation des ondes suffisent à expliquer en première approximation le déplacement du Tsunami. Nous allons voir quelle sont les modifications près des côtes. Ce qui suit est une première approximation.

Etudions la réflexion d'un signal sur un changement de fond lorsque la vague passe de l'océan au plateau continental en $x = 0$. On se concentre sur ce point particulier et on ignore tout ce qui se passe au loin ailleurs (ce qui est bien sûr une approximation). Dans la mer, à gauche, h_1 est la profondeur, sur le plateau à droite, la nouvelle profondeur est h_2 , comme h_2 est plus petit, la vitesse des ondes $c_2 = \sqrt{gh_2}$ est plus petite que la vitesse des ondes en pleine mer $c_1 = \sqrt{gh_1}$. Une vague d'amplitude a va être à la fois réfléchi et transmise au niveau du changement de profondeur. Ecrivons les relations de transfert/réflexion.

On va écrire que l'onde réfléchi (d'amplitude $R a$) se superpose à l'onde incidente en mer et que pour $x > 0$ il n'y a que l'onde transmise d'amplitude $T a$

$$\eta(x < 0, t) = a \exp(i(k_1 x - k_1 c_1 t)) + R a \exp(i(-k'_1 x - k'_1 c_1 t)) \text{ et } \eta(x > 0, t) = T a \exp(i(k_2 x - k_2 c_2 t)).$$

On écrit que l'amplitude de la vague est continue en $x = 0$ soit :

$$\exp(i(-k_1 c_1 t)) + R \exp(i(-k'_1 c_1 t)) = T \exp(i(-k_2 c_2 t))$$

pour que ce soit toujours vrai, on voit que la fréquence doit rester la même $\omega = k_1 c_1 = k'_1 c_1 = k_2 c_2$, ce qui veut dire que $k'_1 = k_1$, et $k_1 c_1 = k_2 c_2$, donc $\lambda_2/\lambda_1 = c_2/c_1$, or comme la vitesse est plus faible quand la hauteur est plus petite $c_2 < c_1$. La longueur d'onde diminue.

On en déduit

$$1 + R = T.$$

L'expression de la vitesse, puisque $k'_1 = k_1$, la vitesse est obtenue par $\partial_t u = -g \partial_x \eta$

$$u(x < 0, t) = \frac{ga}{c_1} \exp(i(k_1 x - k_1 c_1 t)) + \frac{gR a}{c_1} \exp(i(-k_1 x - k_1 c_1 t)) \text{ et } u(x > 0, t) = \frac{T a}{c_2} \exp(i(k_2 x - k_2 c_2 t)).$$

puis en ce même point $x = 0$ on écrit que le flux total d'eau est conservé, soit la hauteur multipliée par la vitesse donc

$$\frac{1 - R}{c_1} h_1 = \frac{T}{c_2} h_2$$

On en déduit les coefficients de réflexion de de transmission d'une vague au travers du changement de section

$$R = \frac{1 - \sqrt{h_2/h_1}}{1 + \sqrt{h_2/h_1}} = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \text{ et } T = \frac{2}{1 + \sqrt{h_2/h_1}} = \frac{2c_1}{c_1 + c_2}$$

On voit donc qu'une vague est amplifiée lorsqu'elle franchit une remontée du fond. En effet $2 > T > 1$ et $1 > R > 0$ pour $h_2/h_1 < 1$ et en revanche pour $h_2/h_1 > 1$ (passage à un fond plus profond) on a $1 > T > 0$ et $0 > R > -1$. Cet effet est indépendant de la pulsation ou de la longueur d'onde.

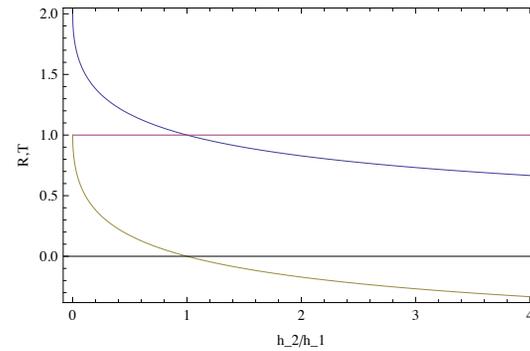


FIGURE 19 – Coefficients de réflexion et de transmission R courbe du haut et T courbe du bas en fonction de h_2/h_1 . Pour $h_2/h_1 < 1$ on a $2 > T > 1$ et $1 > R > 0$ et en revanche pour $h_2/h_1 > 1$ (passage à un fond plus profond) on a $1 > T > 0$ et $0 > R > -1$.

5.5 Cas d'un paquet d'ondes

Considérons un paquet d'ondes constitué d'une somme de vagues sinusoïdales, par exemple

$$e^{-16(t-\pi/2)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin((2k-1)t) =$$

$$= 0.197919 \sin(t) - 0.185926 \sin(3.t) + 0.16407 \sin(5.t) - 0.135996 \sin(7.t) + 0.105873 \sin(9.t) + \dots$$

cela nous permet de décomposer le signal et de tracer la réflexion/ transmission de la figure suivante.

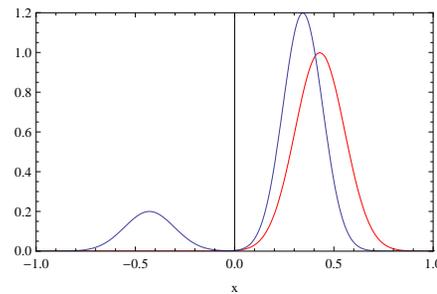


FIGURE 20 – Une vague unique arrive à une discontinuité de fond (le fond remonte brusquement), elle est transmise et amplifiée, réfléchiée et atténuée. A gauche, l'onde a passé la discontinuité, on voit l'onde transmise/ réfléchiée en noir, en rouge l'onde initiale telle qu'elle serait s'il n'y avait pas eu de discontinuité. A droite, la même chose en film [click to launch the movie, Adobe Reader required]

5.6 Un cas plus compliqué : remontée douce d'un fond

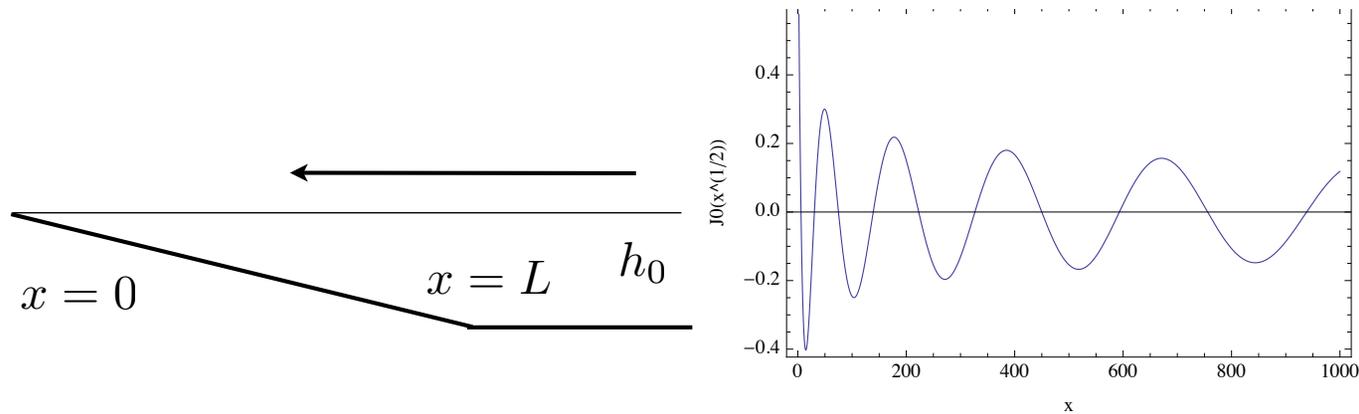


FIGURE 21 – Elevation de l'eau à l'arrivée d'une plage, l'onde vient de droite à gauche. L'amplitude augmente graduellement et la longueur d'onde diminue.

Si le fond remonte doucement (inspiré de Billing & King p115), on peut en première approximation dire que $h_m(x)$ la hauteur d'eau moyenne (ou l'opposé de la profondeur) est lentement variable par rapport à la longueur d'onde et que les équations sont (remontée lente du fond, donc hauteur variable lente en x)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(h_m(x)u).$$

la deuxième est 2 non simplifiée. en éliminant u des deux équations, $(\partial_t h_m(x) = 0)$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} [h_m(x) \frac{\partial \eta}{\partial x}].$$

Si l'onde vient de la droite et rencontre une plage, on se donne une forme de fond linéaire puis plate

$$h_m(x) = h_0 \frac{x}{L} \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } h_m(x) = h_0 \text{ pour } L < x. \text{ Avec } \beta = \frac{h_0}{L} \ll 1.$$

et donc l'équation dans la partie de la plage qui descend :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g\beta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + g\beta \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

on se donne la perturbation initiale au départ de la plage de la forme

$$\eta(L, t) = a \cos(\omega t + \phi)$$

et cherchons des solutions de la forme $\eta = H(x) \cos(\omega t + \phi)$ en substituant, on voit que l'amplitude vérifie :

$$x\beta x \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{dH}{dx} + \frac{\omega^2}{g\beta} H = 0.$$

posons $x = 2s^2$, $dH/dx = (1/(4s))dH/ds$ et $d^2 H/dx^2 = 1/(16s^2)d^2 H/ds^2 - 1/(16s^3)dH/ds$

$$\frac{d^2 H}{ds^2} + \frac{dH}{s ds} + \frac{8\omega^2}{g\beta} H = 0.$$

Or on sait que les équations de la forme $y'' + y'/x + (1 - n^2/x^2)y = 0$ sont les solutions des équations de Bessel (https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Bessel). Abramowitz and Stegun. Handbook of Mathematical Functions. http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_358.htm. Elle est de la forme $J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$ pour la fonction de Bessel de première espèce. Elle est de la forme $Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos \alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin \alpha\pi}$ pour la fonction de Bessel de seconde espèce avec. pour α entier, $Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x)$. On en déduit la hauteur d'eau avec la condition $\eta = 0$ en 0 :

$$\eta(x, t) = a \frac{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}} x^{1/2}\right)}{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}} L^{1/2}\right)}$$

on constate donc que l'amplitude de la vague augmente, que la longueur d'onde diminue, tandis que la vitesse de l'onde diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche de la côte (et ce de manière continue, mais identiquement au cas abrupte pour ce qui est des conclusions). Bien entendu, ce modèle n'est plus valide près de la côte car les vagues finissent par déferler : nous verrons plus loin pourquoi. Néanmoins, ce raccourcissement des longueurs d'ondes et cette amplification semblent être observés en particulier pour les tsunamis.

Cet exercice est résolu avec une hauteur nulle en 0 qui mène à une onde stationnaire, on a un développement plus complet dans : http://wikhydro.developpement-durable.gouv.fr/index.php/ANSWER_-_Propagation_d%27une_onda_dans_un_estuaire_%C3%A0_pente_du_fond_inclin%C3%A9 On ne se donne pas la valeur en 0, et on s'autorise une réflexion.

Notons que ce qui se passe à la transition sec/mouillé n'est pas expliqué ici, nous verrons bien plus loin que c'est lié au problème du déferlement.



FIGURE 22 – Elevation de l'eau à l'arrivée d'une plage dans le canal à Houle de l'ENSTA (photo PYL), l'onde vient de la droite. On voit que l'amplitude augmente légèrement vers la plage et que la longueur d'onde diminue aussi à cet endroit. On constate que le modèle de la figure précédente tombe en défaut lorsque la profondeur est trop faible...

6 Vitesse de groupe, Energie de la Houle de Airy

6.1 Rappels sur Modulation du paquet d'onde...

On présente deux premières approches simples de propagation d'un signal qui est la superposition de plusieurs ondes...

- la première consiste à faire la somme de deux ondes sinusoïdales de fréquence k_0 et $k_0 + \Delta k_0/2$. On fait la somme et on développe grâce aux identités trigonométriques :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos(p+q)/2 \cos(p-q)/2 \dots$$

et comme on peut simplifier en développant puisque l'on suppose que l'écart de fréquences est petit :

$$k_0 + \Delta k_0/2 \sim k_0 \text{ et } \omega(k_0 + \Delta k_0) \sim \omega(k_0) + \Delta k_0 \partial\omega/\partial k + \dots$$

donc la somme de deux ondes de fréquences légèrement différentes donne :

$$\cos(k_0 x - \omega(k_0)t) + \cos((k_0 + \Delta k_0)x - \omega(k_0 + \Delta k_0)t) \sim 2 \cos(k_0 x - \omega(k_0)t) \cos(\Delta k_0(x - t \partial\omega/\partial k)/2).$$

L'amplitude de l'onde somme $2 \cos(k_0 x - \omega(k_0)t)$ est modulée par $\cos(\Delta k_0(x - t \partial\omega/\partial k)/2)$ l'enveloppe se déplace à la vitesse $\partial\omega/\partial k$. On observe le "battement". C'est ce que l'on observe sur le dessin suivant :

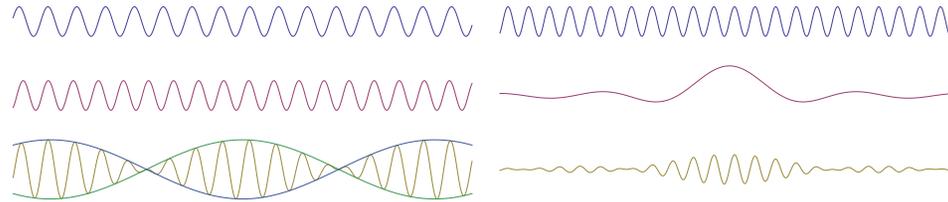


FIGURE 23 – Gauche Battement de deux ondes présentant un léger décalage. Droite paquet d'onde dans une porte de fréquence donnant un signal modulé par sinus cardinal

- La seconde étape classique lorsque l'on introduit la notion de vitesse de groupe consiste à faire la somme d'un paquet d'ondes de fréquences piquées : une courbe en cloche (en pratique, une porte) autour de k_0 de largeur Δk_0 . Une onde est considérée comme la somme de toutes ses fréquences spatiales et alors on peut écrire pour l'évolution d'une onde dont la forme au temps $t = 0$ a été décomposée en modes $F(k)$:

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-i(kx - \omega t)} dk$$

On privilégie pour commencer un cas simple : $F(k)$ présente un pic en k_0 et comme on peut développer :

$$k = k_0 + (k - k_0) \text{ et } \omega = \omega_0 + \partial\omega/\partial k (k - k_0) + (1/2)\omega''_0 (k - k_0)^2/2 + \dots$$

Posons $\kappa = (k - k_0)$ et $v_g = \partial\omega/\partial k$ et développons le déplacement η au voisinage de cette fréquence :

$$\eta = e^{-i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{-i\kappa(x - v_g t)} d\kappa$$

exemple : si F est réduite à la fonction porte $F(k) = 1$ pour $k_0 - \Delta k_0/2 < k < k_0 + \Delta k_0/2$, et 0 sinon :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{-i\kappa(x-v_g t)} d\kappa = \Delta k_0 \text{sinc}((x - v_g t)\Delta k_0/2)$$

la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ est une fonction "piquée" en 0. L'enveloppe se déplace à la vitesse de groupe v_g , les petites ondes se déplacent plus vite à la vitesse de phase c_0 .

6.2 Energie de la houle de Airy

Energie de la Houle dans le cas profondeur infinie

$$\eta = A e^{i(kx - \omega t)}, \quad \phi = B e^{ky} e^{i(kx - \omega t)}, \quad B = -iAg/\omega \quad \omega^2 = gk$$

en repassant en réels

$$\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t) e^{ky} \quad \eta = \eta_0 \sin(kx - \omega t) \quad \eta_0 = -(k/\omega)\phi_0.$$

et évaluons les moyennes, dans un premier temps la moyenne spatiale (sur une longueur d'onde) :

$$\langle \sin^2 kx \rangle = \langle \cos^2 kx \rangle = \lambda^{-1} \int_0^{\lambda} \sin^2(2\pi x/\lambda) dx = 1/2$$

La moyenne d'un cos au carré est 1/2. En revanche on définit la moyenne sur la profondeur par

$$\langle e^{2ky} \rangle = \int_{-\infty}^0 e^{2ky} dy = 1/(2k)$$

Ayant fait ces remarques évaluons l'énergie totale d'une tranche de longueur λ de fluide :

* énergie potentielle,
elle s'obtient en remarquant que son accroissement est proportionnel à la variation de hauteur dy d'une masse (ρy), d'où :

$$E_p = \langle \rho g \eta^2 / 2 \rangle$$

En moyenne sur une longueur d'onde : $\rho g \eta_0^2 / 4$.

* énergie cinétique :

$$E_c = \langle \rho(u^2 + v^2) \rangle / 2 = (1/4)\rho k \phi_0^2 = (1/4)\rho k ((\omega/k)\eta_0)^2 = \rho g \eta_0^2 / 4$$

Remarque : cas du clapotis, c'est une onde stationnaire il faut diviser par 2. Il y a donc équipartition de l'énergie.

$$\mathcal{E} = E_c + E_p = \frac{1}{2} \rho g \eta_0^2.$$

Pour une amplitude de 1m, et une longueur d'onde de 100m (période de 8s), le flux d'énergie par mètre linéique est de $3.2 \cdot 10^4 \text{W/m}$, ce qui donne pour environ 1000km de côtes (de Brest à la Bidassoa) soit 32 GW. La puissance totale est bien supérieure. (c.f. Paterson p298, Billingham & King p 84).

Maintenant que nous avons défini l'énergie, on veut savoir à quelle vitesse elle se déplace. On va voir que la vitesse de propagation de la houle est la moitié de la vitesse de propagation des crêtes.

6.3 Profondeur faible

Nous avons déjà vu plus haut, dans le cas $kH \ll 1$ que l'énergie et les crêtes se propagent à la vitesse $c_0 = \sqrt{gH}$.

6.4 Profondeur infinie

Cas de la houle de Stokes-Airy, observons ce qui se passe maintenant dans ce cas dispersif, les équations d'évolution, après multiplication par u pour la première et par v pour la seconde et par intégration par parties deviennent :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial Pu}{\partial x} + P \frac{\partial u}{\partial x} \quad \& \quad \rho v \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial Pv}{\partial y} + P \frac{\partial v}{\partial y}$$

On additionne les deux et on ajoute $\frac{\partial}{\partial t} \rho \eta^2 / 2$ de chaque côté en remarquant que la condition de surface libre peut s'y retrouver $\frac{\partial}{\partial t} \rho \eta^2 / 2 = \frac{\partial \eta}{\partial t} \rho \eta = v(x, 0)P(x, 0)$. La somme des trois équations membre à membre fait se dévoiler l'énergie totale ainsi que la divergence de la vitesse qui est nulle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2 + v^2 + g\eta^2}{2} \right) = -\frac{\partial Pu}{\partial x} - \frac{\partial Pv}{\partial y} + v(x, 0)P,$$

puis par intégration en y de la surface au fond (à l'infini en bas), il ne reste que

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial x} \Phi, \quad \text{où } \mathcal{E} = \int_{-\infty}^0 u \left(\frac{u^2 + v^2 + g\eta^2}{2} \right) dy \text{ est l'énergie totale et } \Phi = \int_{-\infty}^0 P u dy \text{ est le flux d'impulsion.}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer en y (facteur $1/2k$) puis à moyenner sur la longueur d'onde (facteur $1/2$) pour obtenir

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho g \eta_0^2,$$

puis de même pour Pu , on trouve alors la moyenne $\langle \Phi \rangle = \omega \rho g \eta_0^2 / (2k) / 2$, que l'on réécrit $\frac{\rho g \eta_0^2}{2} \left(\frac{\omega}{2k} \right)$ et on constate que $\langle \Phi \rangle = \left(\frac{\omega}{2k} \right) \mathcal{E}$. Comme $\omega^2 = gk$ en profondeur infinie, posons $v_g = \partial \omega / \partial k = \left(\frac{\omega}{2k} \right)$. On constate que :

$$\langle \Phi \rangle = v_g \mathcal{E}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial x} \Phi, \text{ s'écrit donc aussi } \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{E} = 0$$

L'énergie de tout une tranche moyennée en espace de la houle dispersive en eau infiniment profonde est transportée à la vitesse $v_g = \partial \omega / \partial k$ vitesse de groupe.

6.4.1 Profondeur quelconque

On peut faire le même calcul dans le cas d'une profondeur quelconque, mais c'est plus pénible; l'énergie totale est toujours

$$\mathcal{E} = 1/2 \rho g \eta_0^2,$$

le flux d'impulsion $\Phi = \int_{-H}^0 P u dy$ moyen en temps est $\frac{\rho \eta_0^2 k^2 c^3}{4 \sinh^2(kH)} \left(H + \frac{\sinh 2kH}{2k} \right)$ avec $k^2 c^2 = gk \tanh kH$, le résultat est le même : le rapport du flux d'impulsion moyen $\langle \Phi \rangle$ à l'énergie \mathcal{E} montre que l'énergie est transportée à la vitesse $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH} \right)$.

6.5 Vitesse de groupe et vitesse de phase

L'élévation de la surface de l'eau est de la forme :

$$\eta = A(x, t) \exp(i(kx - \omega t))$$

où $\varphi = (kx - \omega t)$ est la phase, A est l'amplitude que nous avons jusqu'à présent pris constante, mais qui peut varier lentement avec t et x . On a donc pour φ :

$$k = \partial\varphi/\partial x, \text{ et } \omega = -\partial\varphi/\partial t.$$

On remarque que l'on a donc aussi : $\partial k/\partial t + \partial\omega/\partial x = 0$ On peut faire apparaître une "équation de continuité de la phase", l'équation précédente peut aussi s'écrire en effet :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(kc)}{\partial x} = 0$$

Dans un milieu dispersif, $\omega(k) = kc(k)$, on a donc : $\frac{\partial(kc)}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x}$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_g \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \text{ avec } v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$$

Ce qui signifie que k est constant le long des courbes x, t vérifiant $dx/dt = v_g$, à k fixé, ce sont des droites.

6.6 Equations de pente douce

Une application est lorsque le fond varie peu comparé à la longueur d'onde. On cherche le champ des vagues perturbées par ce fond variable $H(x)$. On peut alors équation obtenir la "Mild-slope equation" ou équation de Berkhoff (1972) <https://icce-ojs-tamu.tdl.org/icce/index.php/icce/article/view/2767/2431>

$$\nabla \cdot (cv_g \nabla \eta) + k^2 cv_g \eta = 0$$

un peu compliquée à établir, mais si $kH \ll 1$ elle s'écrit (en éliminant la vitesse cf début du chapitre quand nous avons établi les vagues sur une remontée de fond en faisant apparaître les fonctions de Bessel) :

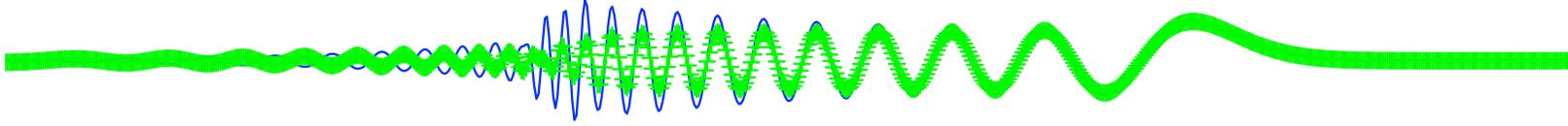
$$\nabla \cdot (H(x) \nabla \eta) + \frac{\omega^2}{g} \eta = 0$$

ces équations sont analogues à l'optique géométrique.

Ces équations décrivent la diffraction et la réfraction des ondes comme en optique géométrique.

La réfraction est la variation de la vitesse avec la profondeur, déjà évoquée sur la figure 9 qui montrait que les vagues étaient toujours parallèles à la côte!

La diffraction est la déformation d'un front d'onde derrière une digue par exemple



6.7 Effet faible de la profondeur : solution lointaine

6.7.1 A partir de l'équation de dispersion tronquée (KdV linéarisé)

On a trouvé des solutions en ondes telles que $\omega^2 = gk \tanh(kh_0)$ si on développe dans le cas peu dispersif de l'eau peu profonde, à grande longueur d'onde $kh_0 \rightarrow 0$, on fait un développement limité en kh_0 de la tangente puis de la racine, (et $c_0^2 = gh_0$) :

$$\omega^2 = gk(kh_0 - \frac{(kh_0)^3}{3} + \dots) = (gh_0)k^2(1 - \frac{(kh_0)^2}{3} + \dots), \quad \text{dont les racines sont } \omega = \pm c_0 k(1 - \frac{(kh)^2}{6} + \dots).$$

On en déduit en prenant la valeur + des ondes qui se déplacent vers la droite. On la forme d'onde $\eta = \eta_0 \exp(i(\omega t - kx))$, avec $i\omega = (ik)c_0(1 + \frac{(h_0)^2}{6}(ik)^2 + \dots)$ ce qui veut dire que puisque $\partial_t \eta = i\omega \eta$ et que $\partial_x \eta = -ik\eta$ l'équation de dispersion linéarisée est celle correspondant au problème suivant (elle s'appelle équation de KdV linéarisée) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h_0^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0.$$

Cette équation s'obtient aussi à partir du système de Boussinesq obtenu en corrigeant Saint-Venant et en considérant une onde qui va vers la droite. Nous allons résoudre cette équation en supposant que la surface déplacée $\int_{-\infty}^{\infty} \eta dx$ est une donnée. La première idée est de se déplacer avec la vitesse c_0 et de poser $\xi = x - c_0 t$ et $\alpha = c_0 h_0^2$, l'équation devient :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\alpha}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3}.$$

Cette équation, se résout par la technique des solutions semblables. Par invariances par dilatations on cherche des solutions semblables... Consulter

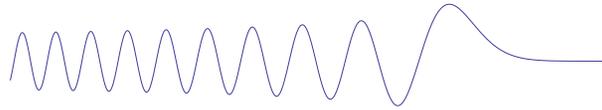
$$\text{le changement d'échelle } \begin{cases} t = T\hat{t} \\ \xi = X\hat{\xi} \\ \eta = H\hat{\eta} \end{cases} \quad (3)$$

La conservation de la masse totale $\int_{-\infty}^{\infty} \eta d\xi$ devient $HX \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta} d\hat{\xi}$ mais comme on veut l'invariance $\int_{-\infty}^{\infty} \eta d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta} d\hat{\xi}$, donc $HX = 1$ préserve la conservation de la surface déplacée $\int_{-\infty}^{\infty} \eta dx = 1$. De même pour l'équation, si $T = X^3$ cela préserve l'invariance de l'équation qui s'écrit identiquement $\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} = -\frac{\alpha}{6} \frac{\partial^3 \hat{\eta}}{\partial \hat{\xi}^3}$. La variable de similitude est $\zeta = \frac{\xi}{t^{1/3}}$ et la surface est de la forme : $\eta = t^{-1/3} f(\frac{\xi}{t^{1/3}})$. Par substitution et dérivation la fonction $f(\zeta)$ vérifie $-\alpha/6 f''' = -\zeta f'/3 - f/3$. En intégrant, et comme f est nulle à l'infini, on a : $\alpha f'' = 2\zeta f$. Introduisons une nouvelle fonction qui est la fonction d'Airy (et qui n'a pas de rapport en soit avec la Houle de Airy)

La solution de $y''(x) = xy(x)$ avec $y(\infty) = 0$ et avec $\int_{-\infty}^{\infty} Ai(x) dx = 1$ est $y = Ai(x)$ la fonction d'Airy.

Nous allons montrer dans le paragraphe suivant par la méthode de la "phase stationnaire" ou de "plus grande descente" t Hinch page 34, Erdély page 41 (et voir plus loin) que

$$\text{pour } z < 0 \quad Ai(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \pi/4\right), \quad \text{et pour } z > 0 \quad \text{on a } Ai(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}$$

FIGURE 24 – Onde dispersive à t fixé, fonction de x (fonction de Airy).

Le développement de Taylor : $Ai(x) = \frac{1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^{(2 \cdot 3)}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^{3 \cdot 3}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots + \frac{x^{k-1}}{(3k-1)3k} x^{3k} + \dots}{3^{2/3} \Gamma(\frac{2}{3})} - \frac{x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^{10}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \dots + \frac{x^{k-1}}{3k(3k+1)} x^{3k+1} + \dots}{\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{1}{3})}$

On a donc la solution pour $f = (2/\alpha)^{1/3} Ai((2/\alpha)^{1/3} \zeta)$, puisque $\xi = x - c_0 t$ la solution est au final :

$$\eta(x, t) = \left(\frac{2}{c_0 h_0^2 t}\right)^{1/3} Ai\left[\left(\frac{2}{c_0 h_0^2}\right)^{1/3} \frac{(x - c_0 t)}{t^{1/3}}\right]. \quad (4)$$

Nous allons retrouver ce résultat autrement dans la suite.

Pour mémoire quelques lignes Mathematica sur raspberry

```
DSolve[y''[x] - x y[x] == 0, y[x], x]
y[x_, t_] := F[(2^(1/3)) x/t^(1/3)] t^(-1/3)
FullSimplify[D[y[x, t], t] + 1/6 D[y[x, t], x, x, x]]
intF = Integrate[%, x];
intFe = Simplify[% /. x -> eta t^(1/3) (2^(-1/3))]
DSolve[{% == 0, F[Infinity] == 0}, F[eta], eta]
Integrate[(2^(1/3)) AiryAi[(2^(1/3)) x], {x, -Infinity, Infinity}]
```

```
Series[AiryAi[x], {x, 0, 4}]
```

```
Series[AiryAi[x], {x, -\[Infinity], 0}] // Normal
```

Cette manière est la plus simple de trouver la forme au loin des ondes dispersives. Nous allons voir deux autres méthodes classiques mais plus compliquées.

6.7.2 Plus compliqué : paquet au loin par la méthode de la phase stationnaire, méthode générale

On a vu le déplacement d'un paquet d'ondes sous la forme $\eta = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$ dans les cas simplifiés de deux ondes puis d'une porte (plus avant en §6.1). Cela nous a permis d'introduire la vitesse de groupe. Dans le cas où F est réduite à la fonction porte $F(k) = 1$ pour $k_0 - \Delta k_0/2 < k < k_0 + \Delta k_0/2$, et 0 sinon :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{-i\kappa(x - v_g t)} d\kappa = \Delta k_0 \text{sinc}((x - v_g t) \Delta k_0/2)$$

la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ est une fonction "piquée" en 0. Ce calcul était un peu simpliste, reprenons le. On part de la perturbation de surface libre décomposée suivant tous les modes spatiaux de Fourier :

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{i(kx-\omega t)} dk$$

Cette intégrale est en fait difficile à calculer car on l'a vu il y a beaucoup d'oscillations qui se compensent mutuellement (d'où les simplifications : deux ondes puis une porte en §6.1). On va appliquer l'idée de la phase stationnaire ("méthode du col", ou "méthode de la phase stationnaire", ou encore *steepest descent* cf Hinch "Perturbation methods" page 30, cf Erdélyi 1956), pour cela on commence par privilégier un rayon $x = Vt$, ce qui permet d'éliminer la dépendance en x . L'onde η se développe alors en :

$$\eta = \int F(k)\exp(i\varphi)dk \quad \text{où la phase } \varphi = Vk - \omega(k) = Vk - kc(k).$$

La contribution principale de l'intégrale est donc lorsque la phase φ varie peu avec k , c'est à dire lorsque $\partial\varphi/\partial k = 0$. La dérivée s'annule justement pour un certain k_0 tel que :

$$V = v_g = \partial\omega/\partial k.$$

On retrouve donc la vitesse de groupe. On développe en série au voisinage de ce k_0 la relation de dispersion $\omega(k)$, on note $\omega_0'' = \partial^2\omega/\partial k^2$:

$$\omega = \omega_0 + v_g(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega_0''(k - k_0)^2 + \dots :$$

et on injecte dans l'intégrant,

$$\eta = \int \exp(i(kv_g - \omega_0)t)F(k)\exp(-\omega_0''((k - k_0)/(\sqrt{(-2i)})^2 + \dots))dk$$

(astuce $i = -1/i$ et $(\sqrt{2})^2 = 2$). Or, seule la fréquence k_0 est sélectionnée, en effet $F(k) = F(k_0) + (k - k_0)\partial F/\partial k + \dots$, les termes autres que $F(k_0)$ ont une contribution négligeable, il vient :

$$\eta \sim \exp(i(k_0v_g - \omega_0)t)F(k_0) \int \exp(-\omega_0''((k - k_0)/(\sqrt{(-2i)})^2))dk$$

L'intégrale de $\exp(-\omega_0''((k - k_0)/(\sqrt{(-2i)})^2))dk$ est réécrite comme l'intégrale de $(-2i/(\omega_0''t))^{1/2}\exp(-s^2)ds$ par changement de variable en définitive puisque $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2)ds = \sqrt{\pi}$, on obtient l'estimation de la perturbation de surface libre

$$\eta \sim i\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0''t}}e^{i\pi/4}(F(k_0)\exp(i(k_0x - \omega_0t))), \quad \text{autour du rayon principal } x/t = v_g.$$

Si $\omega_0'' < 0$ alors on le remplace par $-\omega_0''$ dans l'expression et on change le signe $e^{-i\pi/4}$. L'amplitude de la perturbation décroît au loin en $t^{-1/2}$, et ce le long du rayon v_g , en dehors de ce rayon, les ondes sont inexistantes. Le paquet d'onde se déplace bien à la vitesse v_g , l'amplitude décroît en $1/\sqrt{t}$.

6.7.3 Plus compliqué : paquet au loin par la méthode de la phase stationnaire, cas des vagues

Le calcul précédent est général, il est utilisé dans d'autres branches de la mécanique des fluides (en stabilité par exemple). Malheureusement, si on part directement de $\omega = k\sqrt{gh_0}(1 - \frac{1}{6}k^2h_0^2 + \dots)$, on a alors $v_g = c_0 - \frac{h_0^2c_0}{2}k^2$ donc $\omega_0'' = -h_0^2c_0k$. Il n'y a pas de terme ω_0'' à première vue quand $k = 0$.

Pour rattraper le coup, en fait, il y en a un si on suppose k petit et fini, et $\omega_0'' = -h_0^2c_0k$ est donc petit mais pas nul. D'où $k = \pm\sqrt{(c_0t - x)/(h_0^2c_0t)}$, en mettant dans l'équation de la phase stationnaire vue à l'instant $\eta \sim i\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0''t}}e^{i\pi/4}(F(k_0)\exp(i(k_0x - \omega_0t)))$, ces deux racines on fait apparaître le sinus, le terme $(k_0x - \omega_0t)$ fait apparaître $(x - c_0t)$ en puissance 3/2 dans le sinus et ω_0'' qui est en k est donc en $\sqrt{c_0t - x}$. On obtient après calcul la forme de l'onde

$$\eta \sim 2\sqrt{\pi}F(0) \left(\frac{2}{(h_0^2c_0t)(c_0t - x)} \right)^{1/4} \sin \left(\frac{2}{3} \frac{(c_0t - x)^{3/2}}{(h_0^2c_0t/2)^{1/2}} + \frac{\pi}{4} \right)$$

6.7.4 Toujours aussi compliqué : paquet au loin sans la méthode de la phase stationnaire

Sinon, si on ne veut pas faire ce calcul, on peut partir directement de la composition des ondes

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{i(kx-\omega t)} dk$$

et en effectuant le développement au voisinage de $k = 0$ dans l'exponentielle

$$\eta = F(0) \int \exp(ik(x - c_0t) + \frac{ic_0h_0^3k^3t}{6} + \dots) dk$$

Ensuite, on pose (cf Mei p 30) $z^3 = \frac{2[x-c_0t]^3}{c_0h_0^2t}$ et $k[x - c_0t] = z\alpha$ la partie réelle

$$\eta = F(0) \int \cos(ik(x - c_0t) + \frac{ic_0h_0^3k^3t}{6} + \dots) dk$$

devient avec ce changement de variables

$$\eta = F(0) \frac{2^{1/3}}{(c_0h_0^2t)^{1/3}} \int \cos(z\alpha + \frac{\alpha^3}{3}) d\alpha$$

or il est "bien connu" qu'une définition de la fonction de Airy est :

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(sz + \frac{sz^3}{3}) ds$$

en fait on retombe sur la solution d'Airy que l'on a déjà vue avec des solutions semblables (à partir de la relation de dispersion de KdV linéarisé Eq. 4), mais obtenue ici par le passage par la définition intégrale de l'équation d'Airy :

$$\eta \sim \pi F(0) \frac{2^{1/3}}{(h_0^2c_0t)^{1/3}} Ai\left(2^{1/3} \frac{(x - c_0t)}{(h_0^2c_0t)^{1/3}}\right).$$

On se demande quelle est la relation entre cette description avec la fonction de Airy et la méthode de la phase stationnaire , c'est ce que l'on va voir maintenant.

6.7.5 Lien final entre ces différentes approches

La fonction d'Airy a un comportement asymptotique [que l'on obtient justement par la méthode de la phase stationnaire dans Hinch page 34, Erdélyi page 41]

$$Ai(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \pi/4\right) \text{ pour } z < 0 \text{ ou pour } z > 0 \text{ on a } Ai(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}$$

et on fait la substitution dans l'expression précédente du paquet au loin sans la méthode de la phase stationnaire

$$\eta \sim 2\sqrt{\pi}F(0) ((h_0^2c_0t/2)(c_0t - x))^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} \frac{(c_0t - x)^{3/2}}{(h_0^2c_0t/2)^{1/2}} + \frac{\pi}{4}\right)$$

on retrouve bien la même forme obtenue à partir de la phase stationnaire à k petit.

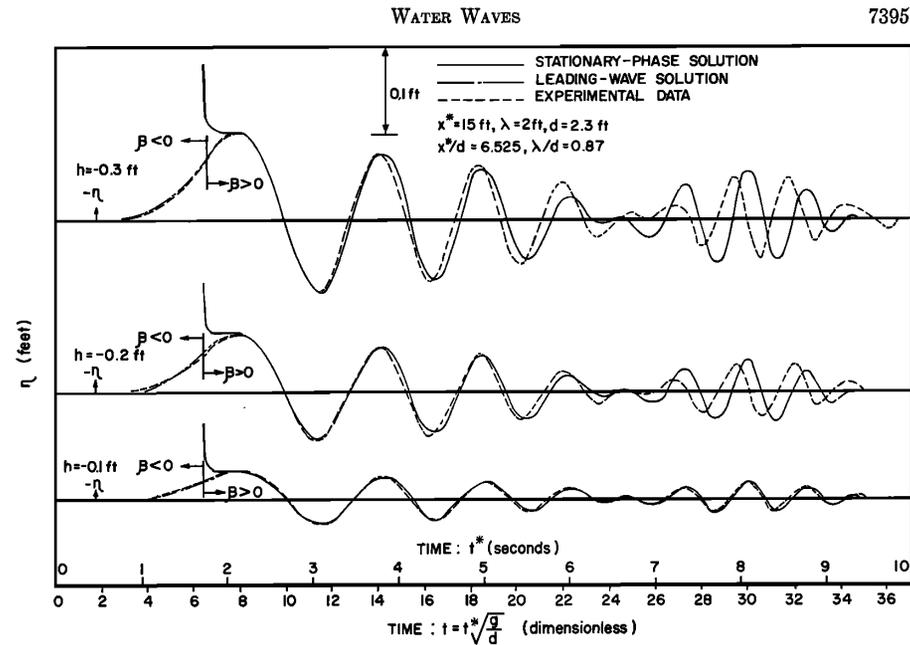


Fig. 6. Experimental and analytical amplitude-time relationships.

FIGURE 25 – Comparaisons issues de Noda [9]. Comparaison des expériences, aux deux approximations proposées, celle de la phase stationnaire $\eta \sim i\sqrt{2\pi}e^{i\pi/4}(\omega_0''t)^{-1/2}F(k_0)\exp(i(k_0x - \omega_0t))$ que l'on va voir plus loin à celle de la solution $\eta = \frac{1}{h_0^2 c_0 t / 2}^{1/3} Ai(2^{1/3} \frac{x - c_0}{(h_0^2 c_0 t)^{1/3}})$ que l'on vient de voir (en fait il y a un $t^{2/3}$ au lieu de $t^{1/3}$, cela est certainement une typo).

Au final, on voit quelle est la forme de la perturbation de surface libre : elle devient exponentiellement petite pour $x > c_0 t$, elle est maximale en $x = c_0 t$ (l'approximation avec $(c_0 t - x)^{-1/4}$ y diverge, il faut garder Airy), ensuite pour $x < c_0 t$ elle a un caractère ondulatoire, l'amplitude décroît lentement en $(c_0 t - x)^{-1/4}$ au fur et à mesure que l'on s'éloigne du front.

Il faut alors retourner aux comparaisons issues de Noda [9] "Water waves generated by a local surface disturbance". Il compare, des expériences, aux deux approximations proposées, Airy complet, la solution en phase stationnaire asymptotique donc avec la puissance $-1/4$ qui fait que l'onde diverge en $x = c_0 t$.

Des exemples de calcul avec Basilisk :

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/boussinesq.c> résolution en C des équations de Boussinesq,

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/airy_watertrainfront.c résolution Multilcouche Euler Lagrange ou Green Naghdi avec Basilisk

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/ressaut_mascaret.c Poor's man dispersive model

6.8 Vagues scélérates

Nonlinear-dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water

Voir l'exposé de Guillaume Michel en vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=agy7LirNxDI>

Le 29 Août 1826 Dumont d'Urville en observe lors de son voyage, il écrit dans son livre de bord "les lames, formant de vraies montagnes, atteignaient au moins quatre-vingt à cent pieds de hauteur".

Arago dit que la meilleure explication est l'imagination...

7 Viscosité

7.1 Amortissement visqueux en volume

7.1.1 Dissipation

Il faut bien faire attention au fait que jusqu'à présent nous n'avons fait que du fluide parfait, et nous avons obtenu des ondes qui se déplacent sur un temps et une distance infinie. Or la viscosité va certainement dissiper ce mouvement perpétuel.

On rappelle le principe des puissances virtuelles (principe de ∂ 'Alembert) :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = P_{ext} + P_{int}.$$

le premier principe

$$\rho \frac{de}{dt} = -P_{int} + \dot{Q}$$

la conservation de l'énergie totale est donc

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) = P_{ext} + \dot{Q}.$$

On rappelle que les formes locales des lois de conservation sont :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{\rho} \right) + \underline{\nabla} \cdot \underline{J}_A - \varphi_A = 0.$$

Les lois classiques de conservation de la masse de la quantité de mouvement et de l'énergie sont alors :

	a	\underline{J}_A	φ_A
masse	ρ	0	0
qtt mvt	$\rho \underline{u}$	$-\underline{\underline{\sigma}}$	\underline{f}
énergie	$\rho(e + \frac{1}{2} u^2)$	$\underline{q} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}$	$\underline{f} \cdot \underline{u} + r$

Les équations sont mises sous "forme conservative". Par exemple l'énerg :e totale (interne + cinétique) est $\rho(e + \frac{1}{2} u^2)$, elle varie dans un volume donné par sa fuite au bord qui est le flux $\underline{J}_A = \underline{q} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}$ et une création volumique $\varphi_A = \underline{f} \cdot \underline{u} + r$ de manière a avoir le bilan suivant :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + \underline{\nabla} \cdot (\underline{q} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) - (\underline{f} \cdot \underline{u} + r) = 0.$$

de même pour la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d}{dt} (\underline{u}) + \underline{\nabla} \cdot (-\underline{\underline{\sigma}}) - (\underline{f}) = 0.$$

en soustrayant la deuxième multipliée par la vitesse à la première on trouve que la variation de l'énergie interne e pour tout un volume de contrôle : est

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma : D - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} + r$$

avec le tenseur des contraintes $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, décomposé en la partie réversible (pression) et la partie irréversible (τ_j visqueuse)

Le théorème de l'énergie cinétique est

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{D} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) + \underline{u} \cdot \underline{f}$$

la somme des deux est bien la forme conservative présentée. La variation d'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la somme des puissances des efforts intérieurs ($P_{int} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$) et extérieurs ($P_{ext} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) + \underline{u} \cdot \underline{f}$) qui s'exercent sur le volume de contrôle.

$$\rho \frac{d}{dt} (e + \frac{1}{2} u^2) = P_{ext} + \dot{Q} \text{ c'est à dire } \rho \frac{d}{dt} (e + \frac{1}{2} u^2) + \underline{\nabla} \cdot (\underline{q} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) - (\underline{f} \cdot \underline{u} + r) = 0.$$

La variation d'énergie interne ne tient compte que la la puissance des efforts intérieurs ($P_{int} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$) plus les échanges de chaleur ($\dot{Q} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{q} + r$).

$$\rho \frac{de}{dt} = -P_{int} + \dot{Q} \text{ ou } \rho \frac{de}{dt} = \sigma : D - \nabla \cdot q + r$$

le tenseur des contraintes qui est pour un fluide visqueux newtonien incompressible $\sigma = -pI + 2\mu D$, donc, en supposant la température constante, le vecteur q densité de flux de chaleur est nul. Comme $\sigma : D = -pI : D + 2\mu D : D$, et $I : D = \nabla \cdot u$, il ne reste que le terme $2\mu D : D$ dans la dissipation de l'énergie

$$\rho \frac{de}{dt} = 2\mu D : D$$

Par définition : $D_{ij} = (1/2)(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ donc la dissipation en 2D :

$$D : D = \mu(\partial_x v + \partial_y u)^2 + 2\mu(\partial_x u)^2 + 2\mu(\partial_y v)^2.$$

7.1.2 Application

En incompressible, l'énergie perdue par la houle (linéaire) n'est due qu'au frottement visqueux. La perte d'énergie totale (cinétique et potentielle) est liée à la dissipation

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - \langle 2\mu D : D \rangle$$

où D est le tenseur des taux de déformation des vitesses.

Posons $\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t)e^{ky}$ $\eta = \eta_0 \sin(kx - \omega t)$ $\phi_0 = -(k/\omega)\eta_0$, on travaille en profondeur infinie pour fixer les idées et simplifier. on va supposer que l'amplitude de la vague qui est η_0 , et l'amplitude la la vitesse qui est u_0 vont lentement varier en temps avec une constante de temps bien supérieure à la période temporelle $2\pi/\omega$. Sur une période l'énergie sera à peu près conservée, ce n'est que sur un temps très long que l'on va observer une décroissance. De manière très simple, on peut estimer l'amortissement des ondes gravitationnelles comme Landau (Landau p130 §25), en moyennant sur une longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ les champs, et en supposant une très lente décroissance en temps. Définissons des moyennes en longueur

$$\langle \sin^2 kx \rangle = \langle \cos^2(kx) \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \sin^2(2\pi x/\lambda) dx = \frac{1}{2} \text{ et en profondeur } \langle e^{2ky} \rangle = \int_{-\infty}^0 e^{2ky} dy = \frac{1}{(2k)}$$

Or, $\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t)e^{ky}$ (surface libre en 0, profondeur en $-\infty$) dans le cas de la houle de Airy-Stokes, $\phi_0 = (k/\omega)\eta_0$ l'amplitude varie lentement sur une période... On calcule $\langle 2\mu D : D \rangle$, avec : $D_{ij} = (1/2)(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ donc la dissipation en dimension 2 :

$$D : D = \mu(\partial_x v + \partial_y u)^2 + 2\mu(\partial_x u)^2 + 2\mu(\partial_y v)^2$$

$$\partial_y v + \partial_x u = -2k^2 \phi_0 \sin(kx - \omega t)e^{ky}$$

donc (si on moyenne sur une période pour x), et comme ϕ_0 varie lentement avec le temps on intègre sur toute la profondeur... Donc la dissipation

$$\langle 2\mu D : D \rangle = [\mu(4)(1/2) + 4\mu(1/2)] \langle \phi_0^2 \rangle k^4 / (2k) = 2\mu\phi_0^2 k^3$$

varie comme le cube de k (cf Lamb §348) or cette dissipation correspond à la diminution d'énergie : $d\mathcal{E}/dt = \langle 2\mu D : D \rangle$ L'énergie mécanique totale \mathcal{E} est la somme de l'énergie cinétique + potentielle, c'est aussi : $(2 * \text{l'énergie cinétique}) = 2 \langle \rho(u^2 + v^2) \rangle / 2$.

Donc la valeur moyenne de l'énergie \mathcal{E} est $2 \langle \rho(u^2) \rangle = 2\rho k^2 \phi_0^2 (1/2) 1/(2k)$ sa variation par rapport au temps est donc telle que

$$\frac{d}{dt}(\phi_0^2)(\rho k/(2)) = -2\mu\phi_0^2 k^3 \quad \text{donc} \quad \frac{d}{dt}(\phi_0^2) = -4\nu k^2 \phi_0^2$$

d'où une décroissance avec un temps caractéristique de $1/(4\nu k^2) = g^2/(4\nu\omega^4)$ or l'amplitude de la vague est η_0 et $\phi_0 = k\eta_0$, donc

$$\frac{d}{dt}(\eta_0) = -2\nu k^2 \eta_0$$

une décroissance avec un temps caractéristique de $1/(2\nu k^2) = g^2/(2\nu\omega^4) = 0.71\lambda^2$ (λ en cm) onde capillaire durée de vie courte (1cm dure 1seconde et parcourt 30 cm) Si $\lambda=100\text{m}$ houle océanique, durée de vie 900 jours et fait 30 fois le tour de la terre),

7.2 Amortissement visqueux au fond

Au fond, la vitesse de glissement est

$$u_e = \frac{kg\eta_0}{\omega \cosh kH} \cos(kx - \omega t) = \omega\eta_0 / \sinh(kH) \cos(kx - \omega t)$$

On peut dans la couche limite dans laquelle la viscosité va jouer, elle est d'épaisseur $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$, trouver la solution :

$$\partial_t u = \partial_t u_e + \nu \partial_y^2 u$$

ce qui donne

$$u = (\omega\eta_0 / \sinh(kH)) \left(\cos(kx - \omega t) - \exp\left(-\frac{y}{\sqrt{2\delta}}\right) \cos\left(kx - \omega t + \frac{y}{\sqrt{2\delta}}\right) \right)$$

pour une valeur de 1%, ça donne une épaisseur de couche limite de $0.28\sqrt{T}$ en cm (période en secondes). Une houle de 10s de période a une épaisseur de couche limite laminaire de 1cm.

Il est ensuite intéressant d'étudier le second ordre de cette équation. On constate que les termes en $\cos(kx - \omega t)^2$ sont présent, ils produisent donc en moyenne un léger courant de dérive. La valeur de ce courant est fondamentale pour la connaissance du transport des particules en suspension.

L'énergie perdue par la houle est due au frottement visqueux. On peut montrer que si on calcule directement la dissipation :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - \langle 2\mu D : D \rangle$$

où D est le tenseur des taux de déformation des vitesses, or l'amplitude de la vague est η_0 , et l'amplitude la la vitesse u_0 ils vont lentement varier en temps avec une constante de temps bien supérieure à la période.

$$\langle 2\mu D : D \rangle = \int (\mu(\partial_x v + \partial_y u)^2 + 2\mu(\partial_x u)^2 + 2\mu(\partial_y v)^2) dV$$

l e terme dominant est

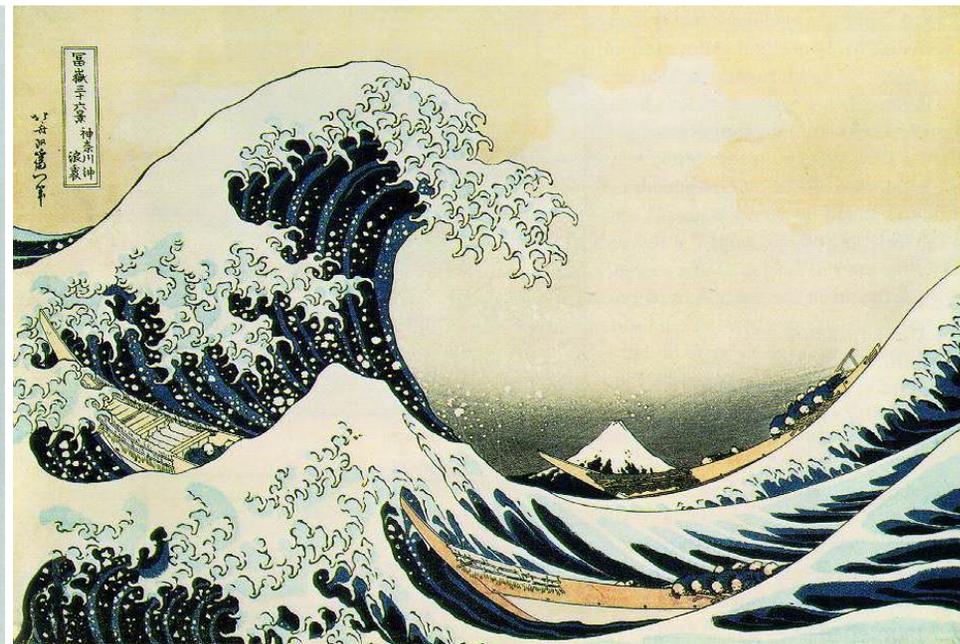
$$\int \mu(\partial_y u)^2 dV = \mu u_0^2 \frac{\beta}{2} \frac{H}{2} \quad \text{car} \quad \int_0^\infty e^{-2\beta y} dy = 1/(2\beta H)$$

d'où la décroissance lente de l'amplitude :

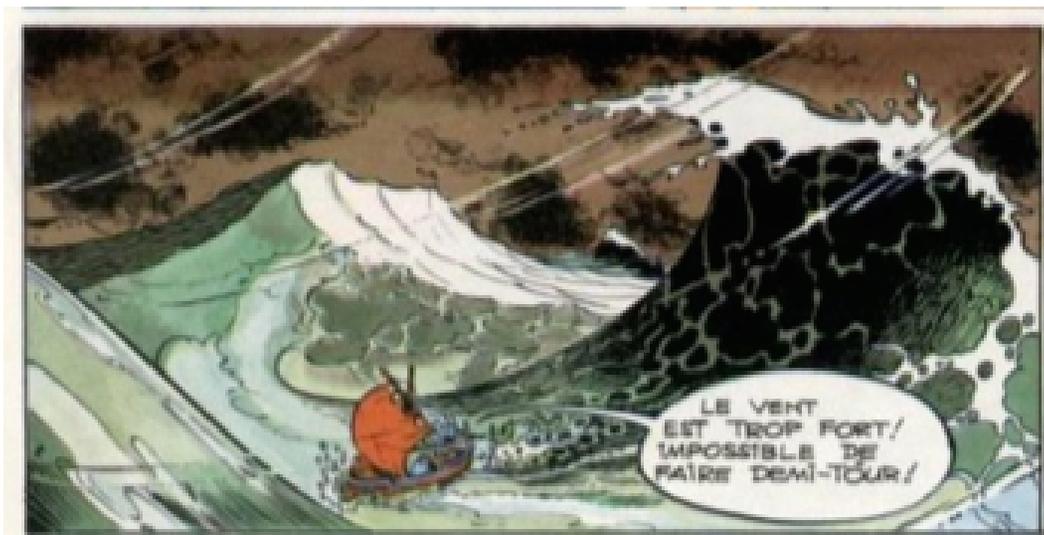
$$\frac{du_0^2}{dt} = -2\gamma u_0^2, \quad \text{avec} \quad \gamma = \sqrt{\frac{\omega\nu}{8H^2}}$$

le temps associé $\tau_f^2 = H^2/(\omega\nu)$ le temps associé au frottement en volume est $\tau_B = 1/(\nu k^2)$, donc est tel que $\tau_f^2 = \tau_B^2 (k^2 H^2)(k^2 \nu)/(\omega)$ et comme $(\nu k^2)/(\omega) \ll 1$ (car $\tau_B \gg 1/\omega$) en prenant kH d'ordre 1, $\tau_B \gg \tau_f \gg 1/\omega$

Le frottement à la paroi est le plus fort comparé au frottement dans le volume.



Gauche Tintin les Cigares du Pharaon, Hergé, droits réservés, droite l'inspiration "la grande vague de Kanagawa" Kanagawa-oki nami-ura de Katsushika Hokusai, noter que l'inversion effectuée par Hergé rend plus dramatique la grande vague que nous voyons à l'envers (sauf les spécialistes du Manga) <http://commons.wikimedia.org>



Astérix, La Grande Traversée, Goscinny, droits réservés... A droite, hérésie! "la grande vague de Kanagawa" inversée.

8 Retour sur les vagues près des côtes

8.1 Zone de levée *shoaling*

Nous avons considéré la houle sans la côte, près du rivage, en première approximations certaines quantités sont conservées. La zone de levée est la région de remontée graduelle du fond avant la zone de déferlement (zone de *surf*).

Considérant que le flux d'énergie reste constant

$$\frac{\rho g \eta_0^2 c}{2} \left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH}\right) = Cst$$

On définit le coefficient de "shoaling" comme le rapport entre la hauteur de la houle à une profondeur H par rapport à la hauteur de houle au large en profondeur infinie.

$$\frac{\eta_H}{\eta_0} = \frac{1}{\sqrt{\tanh(kH) \left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH}\right)}}$$

en supposant que ω varie peu on peut dire que (Whitham p563-564) quand la profondeur H diminue, la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ diminue et l'amplitude η_H augmente.

On avait ceci avec la solution le long d'une plage avec la fonction de Bessel. On le retrouve par des considérations énergétiques. L'augmentation de l'amplitude η_H est limitée par le déferlement...

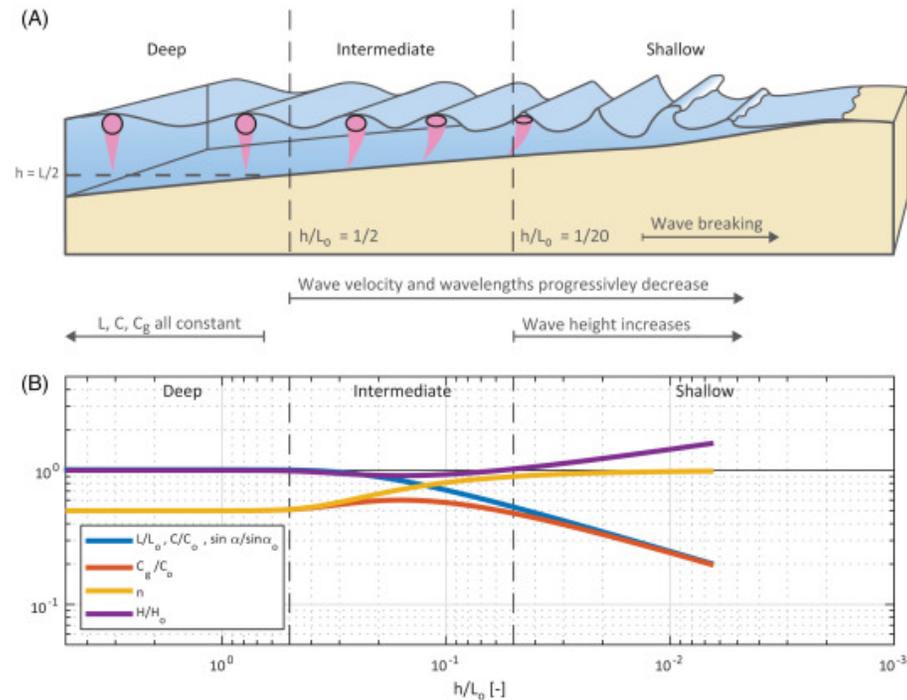


FIGURE 26 – Evolution de la longueur d'onde et de la hauteur dans la zone de shoaling <https://www.sciencedirect.com/topics/earth-and-planetary-sciences/shoaling-wave>

8.2 Différents déferlements

Le déferlement apparaît lorsque l'amplitude de la vague est trop grande et que le sommet dépasse le pied. C'est un phénomène où il faut résoudre les équations de Navier Stokes diphasiques complètes.

En pratique on définit un paramètre appelé "paramètre de similarité de surf" (nombre de Iribarren) :

$$\xi = \tan \beta \sqrt{\lambda/H}$$

avec β la pente de la plage, de petites valeurs de la pente sont associées à un paramètre petit et correspondre à une plage dissipative. Les vagues vont arriver comme sur la figure 5.6 sur une pente douce, grandir en taille et se casser par déferlement. On parle de "spilling breaking wave"

Si ce paramètre est très grand, les vagues sont réfléchies sur la côte, la plage est réfléchive. S'il est un peu moins grand, elle vont déferler. Nous verrons ce problème du déferlement au chapitre suivant avec un autre point de vue.

La langue anglaise distingue 4 types de vagues, *spilling breaking* (déferlement glissant ou progressif), *plunging breaking* (déferlement plongeant très intense), *collapsing breaking* (sans traduction en France) et *surging breaking* (déferlement frontal ou gonflant).

voir figures 8.2 et 8.2 et voir animation à la page wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Iribarren_number.

Pour [7] les noms sont

$\xi < 0.4$ déferlement glissant, $0.4 < \xi < 2$ déferlement plongeant, $2 < \xi < 4$ déferlement frontal, $4 < \xi < 0.4$ pas ou peu de déferlement.

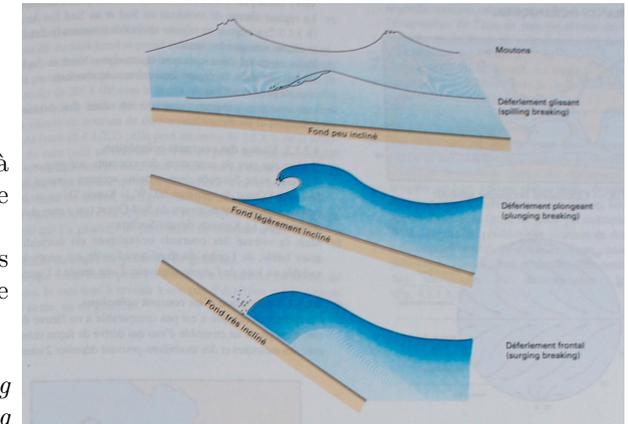


FIGURE 27 – issu du "Guide du Navigateur Editions SHOM Volume 2", vagues déferlant près sur une pente douce

Table 1: Breaking Wave Characteristics and the Surf Similarity Parameter, Following Battjes (1974)

ζ	0.1	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
Type	spilling		plunging		collapsing/surging		no breaking
κ	0.8	1.0	1.1	1.2			
N	6-7	2-3	1-2	0-1	0-1		
r	10^{-3}	10^{-2}	0.1	0.4	0.8		

κ = breaking indexⁱ, N = number of waves in surf zone, r = reflection from beach



a) Spilling breaking wave



b) Plunging breaking wave



c) Surging breaking wave



d) Collapsing breaking wave

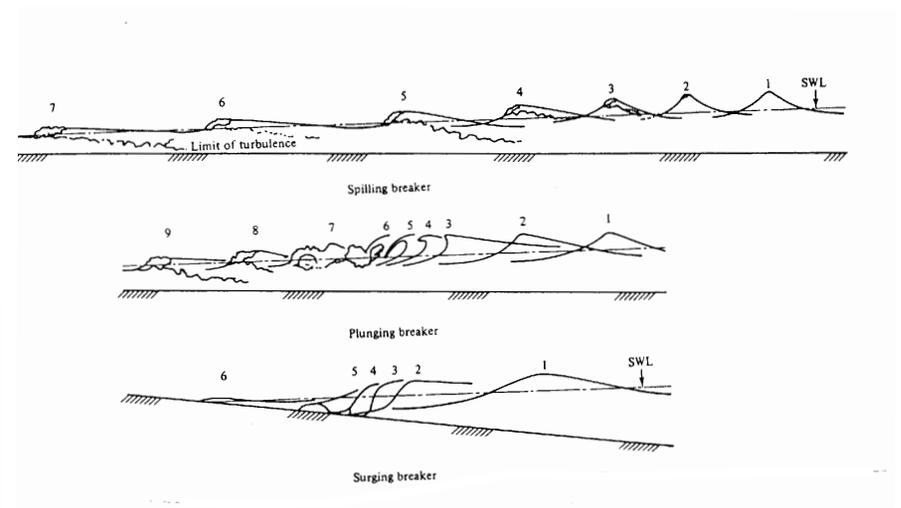


Figure 1: Three types of waves breaking on beaches. Small figures denote different stages of the breaking process. (Adapted from I. A. Svendsen)

FIGURE 28 – d’après Richardson FloSci-TN44.pdf, vagues déferlant près sur une pente douce

9 Conclusion

Au travers de ces pages nous avons présenté la base mécanique des écoulements de vagues linéarisées en profondeur quelconque. Le problème est résolu complètement pour une onde monochromatique. Retenons que le signal est dispersif, un signal quelconque va se déformer et se décomposer en un train d'ondes, les longueurs d'onde grandes se déplacent plus vite que les courtes. L'énergie se déplace à la vitesse de groupe différente de la vitesse de phase lorsque le milieu est dispersif. Lorsque la cambrure augmente, de nouveaux termes vont apparaître et complexifier la résolution (c'est ce qu'a fait Stokes). Près du rivage, une légère augmentation de l'amplitude apparaît à cause de la remontée du fond.



la plage de Tréac'h er Gourèd, Île d'Houat est convexe à son extrémité (à droite, la photo (PYL) de gauche à été prise sur la point de la flèche, carte GoogleMaps), des vagues parallèles aux deux pans de plage se croisent !

10 Annexe 1 Propagation d'une perturbation pas à pas

• Si on se donne une perturbation initiale $\eta = \eta_0(x)$ et $u = 0$. La hauteur augmente pour $x < 0$; $\frac{\partial \eta}{\partial x} > 0$ puis passé $x = 0$, la hauteur diminue $\frac{\partial \eta}{\partial x} < 0$. La fonction $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ présente un minimum en $x < 0$ et un maximum en $x > 0$. La vitesse au bout d'un temps petit Δt se déduit de cette variation de hauteur (de pression en fait) :

$$u(\Delta t) = u(0) - g\Delta t \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

donc, comme $u(0) = 0$, on crée une vitesse négative ($x < 0$) et ensuite positive. Il apparaît deux bosses de vitesses opposées.

On voit que la perturbation de hauteur de la vague initiale va se casser en deux : une qui va à droite, l'autre qui va à gauche. La dérivée de la vitesse créée : $-\frac{\partial u}{\partial x}$ a la forme de deux bosses de part et d'autre de $x = 0$, ces deux bosses sont les corrections de $\eta(0)$ donc la nouvelle hauteur d'eau présente 2 bosses :

$$\eta(\Delta t) = \eta(0) + (-\Delta t)h_0 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Les bosses se séparent de plus en plus

• En revanche, si on part d'une perturbation se déplaçant, la perturbation de niveau et la vitesse forment une bosse en phase, et $-g\Delta t \frac{\partial \eta}{\partial x}$ va corriger la position de la bosse de manière à la faire avancer.

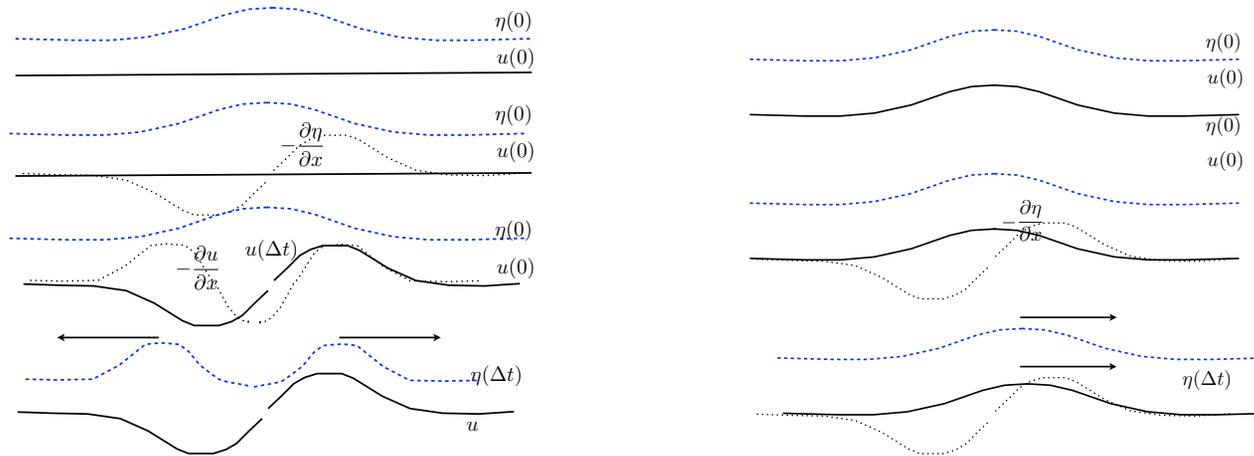


FIGURE 29 – Gauche : une perturbation initiale de vitesse nulle se casse en deux, une vague part à droite, l'autre à gauche. Droite, une perturbation de vitesse et de surface se déplacent.

10.1 Annexe 2 : Résolution Numérique, un schéma "naïf"

Les équations 1 et 2 sont écrites sans dimension, on se choisit une échelle de longueur L , et le temps s'écrit L/c_0

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (5)$$

par Taylor, le plus simple est de faire un schéma explicite :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq (u(t + \Delta t, x) - u(t, x))/\Delta t \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x} \simeq (u(t, x + \Delta t) - u(t, x - \Delta t))/2/\Delta x$$

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n - \Delta t(u_{i+1} - u_{i-1})/2/\Delta x \text{ et } u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t(\eta_{i+1} - \eta_{i-1})/2/\Delta x$$

ce qui se code

```
for(i=1;i<nx-1;i++) eta[i] = etao[i] - dt*(uo[i+1]-uo[i-1])/2/dx ;
for(i=1;i<nx-1;i++) u[i] = uo[i] - dt*(etao[i+1]-etao[i-1])/2/dx ;
```

puis d'updater

```
for(i=1;i<nx;i++) uo[i]=u[i];
for(i=0;i<nx;i++) etao[i]=eta[i];
```

Malheureusement c'est instable! Mais si on utilise le champ η calculé dans la première équation que l'on injecte dans la seconde celle de u . Ce qui se code

```
for(i=1;i<nx-1;i++) eta[i] = etao[i] - dt*(uo[i+1]-uo[i-1])/2/dx ;
for(i=1;i<nx;i++) uo[i]=u[i];
for(i=1;i<nx-1;i++) u[i] = uo[i] - dt*(etao[i+1]-etao[i-1])/2/dx ;
for(i=0;i<nx;i++) etao[i]=eta[i];
```

cela stabilise le schéma tant que $\Delta t < \Delta x$. C'est un schéma qui reste cependant très naïf. Nous verrons des techniques plus élaborées ensuite.

Utiliser le code `onde3.c` pour reproduire la figure 30.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "math.h"
#include <math.h>
// cc onde3.c ; ./a.out | gnuplot
//
// OK MARCHE
//
// attention les differences finies c est pas bien
// solution de du/dt = - deta/dx; deta/dt = -d(hu)/dx
/* _____ */
/* _____ */
```

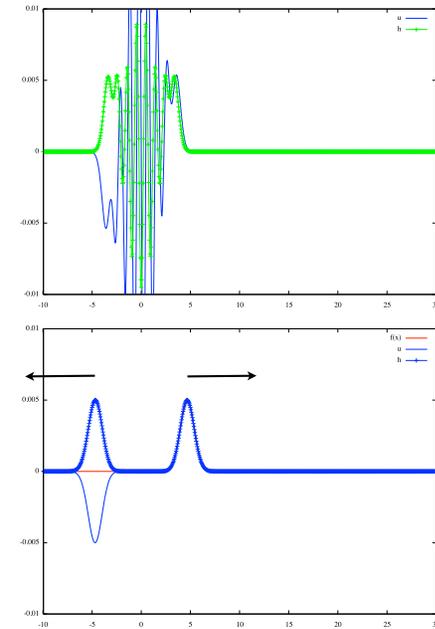


FIGURE 30 – Haut cas instable $\Delta t > \Delta x$. Bas Cas stable, la bosse se casse en deux ondes...

```

int main (int argc , const char *argv []) {
    int i , nx , it ;
    char file ;
    double *x=NULL , *u=NULL , *uo=NULL , *h0=NULL , *eta=NULL , *etao=NULL ;
    double dt , dx , x0 , L , t , tmax ;
    FILE *g ;

    nx = 800 ;
    L = 40 ;
    x0 = -10 ;
    dx = L/nx ;
    dt = 0.05 ;
    t = 0 ;
    tmax=45 ;

    x= (double*) calloc (nx+1 , sizeof (double)) ;
    u= (double*) calloc (nx+1 , sizeof (double)) ;
    eta=(double*) calloc (nx+1 , sizeof (double)) ;
    uo= (double*) calloc (nx+1 , sizeof (double)) ;
    etao=(double*) calloc (nx+1 , sizeof (double)) ;
    h0= (double*) calloc (nx+1 , sizeof (double)) ;

    fprintf (stderr , " _Solution _de _ _ " ) ;
    fprintf (stderr , " du/dt _ _ _ deta/dx ; _ _ " ) ;
    fprintf (stderr , " deta/dt _ _ _ d(h0u)/dx _ " ) ;
    fprintf (stderr , " _ _ dx=%lf _ _ dt/dx=%lf \n" , dx , dt/dx ) ;

// init
    for (i=0 ; i<nx ; i++)
    { u[i]=0 ;
      x[i]= x0 +i*dx ;
      uo[i]=0 ;
      etao[i]=.01*exp(-(x[i])*(x[i])) ;
      u[i]=uo[i] ;
      eta[i]=etao[i] ;
      h0[i]=1 - ((x[i]-5)/(x0 +nx*dx))*(x[i]>5) ;
    }
    do{
        t=t+dt ;
        it++ ;
        // resolution simple deta/dt = -d(h0u)/dx ;
        for (i=1 ; i<nx-1 ; i++)
        {
            eta[i] = etao[i] - dt*(h0[i+1]*uo[i+1]-h0[i-1]*uo[i-1])/2/dx ;

```

```

    }
    // extrapolation lineaire ,
    //c'est le plus simple ou encore plus simple eta[0]=eta[1]
    eta[0]=2*eta[1]-eta[2];
    // bord a droite Neumann
    eta[nx-1]=eta[nx-2];
    //update de eta , sinon instable!
    for(i=0;i<nx;i++) etao[i]=eta[i];
    //resolution simple du/dt = - deta/dx;
    for(i=1;i<nx-1;i++)
        {
            u[i] = uo[i] - dt*(etao[i+1]-etao[i-1])/2/dx ;
        }
    //sort a gauche: extrapolation lineaire ,
    //c'est le plus simple ou encore plus simple u[0]=u[1]
    u[0]=2*u[1]-u[2];
    // bord a droite
    u[nx-1]=0;
    // swap
    for(i=0;i<nx;i++) uo[i]=u[i];

// sauf et affiche
if((it%5)==0){
g = fopen("sol.OUT", "w");
for(i=0; i<nx; i++)
{
    fprintf(g, "%lf %lf %lf \n", x[i], u[i], t);
}
fclose(g);
fprintf(stderr, "t=%lf\n", t);
printf("t=%lf; u(x)=0.01*exp(-(x-t)*(x-t))/2; p[%lf:%lf][%lf:%lf] u(x) t 'exacte',", t,
x[1], x[nx-1], -.01, .01);
printf("u'-'_u_1:2_t 'u' _w_l, '-'_u_1:2_t 'eta' _w_l, '-'_u_1:2_t 'fond' _w_lp\n");
for(i=0; i<nx; i++)
{
    printf("%lf %lf \n", x[i], u[i]);
}
printf("e\n");
for(i=0; i<=nx; i++)
{
    printf("%lf %lf \n", x[i], eta[i]);
}
printf("e\n");

for(i=0; i<nx; i++)
{
    printf("%lf %lf \n", x[i], -h0[i]/100);
}
printf("e\n");

```

```
}  
}while(t<tmax);  
}
```

11 Annexe 2 : Utilisation de Basilisk

Résolution des équations de Navier Stokes pour calculer la houle qui se propage :

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/houle.c>

Résolution du Laplacien :

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/airywave.c>

Références

- [1] J. Billingham, A. C. King Wave motion sur [googlebooks](#)
- [2] Jacques Bouteloup "vagues Marées Courants marins" PUF 1979
- [3] Guyon E., Hulin J.-P. & Petit L. (1991) "Hydrodynamique Physique", InterEditions, Ed. CNRS 506p, (voir page 208 et suivantes)
EDP Science 2001 pour la deuxième édition
- [4] Guyon E., Hulin J.-P., Petit L. & Mitescu C.D. (2001) : "Physical hydrodynamics" Oxford University Press (version anglaise)
- [5] Cours des Glénans, Les Glénans.
- [6] James Lighthill, Waves in Fluids, Cambridge Univ Press 1978
- [7] François MARin "Hydrodynamique Marine" Ellipses 2016
- [8] Mei C.C. (1989) "the applied dynamics of ocean surface waves" adv series on Ocean Eng. Vol I, World Scientific
- [9] Noda JGR 76 (30) 1971, "Water waves generated by a local surface disturbance".
- [10] Paterson A.R. (1983) : "A first course in fluid dynamics", Cambridge, 528p (voir chapitre XV) [googlebooks](#)
- [11] A. Petitjean (1998) Recent Progresses in Dam-Break Modelling in France, <http://kfki.baw.de/conferences/ICHE/1998-Cottbus/274.pdf> Case Studies : Dam Break, Dam Break Modelling
- [12] O. Thual
<http://thual.perso.enseeiht.fr/xsee/pc7/00main.pdf>
<http://thual.perso.enseeiht.fr/xsee/index.htm>
- [13] G. B. Whitham-Linear and Nonlinear Waves-Wiley-Interscience (1999)
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Vague>
<http://scs-ingenierie.pagesperso-orange.fr/fr/acceuil.html>
<http://apere.free.fr/vagues/propag.htm> qui prennent mes images de la science en fête sans me citer.

- La vague dans la peinture et dans les arts, attention contenu sexuel explicite, ceci n'est pas pour les enfants :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Guillaume_Seignac_La_Vague.jpg/

la vague de Courbet 1868

la vague de Camille Claudel

la vague de d' Aristide Maillol 1898

la vague de Frantisek Kupka 1902

la vague de Hokusai

la vague de Gauguin 1889

Née de la Vague de Lucien Clergue

Jeune homme nu assis au bord de la mer 1835

- un film classique sur les vagues rtsp://18.39.0.144:554/ifluids/Waves_in_Fluids.rm?cloakport=8080,554 en "Real Player"

<http://web.mit.edu/hml/ncfmf/14WF.pdf>, le synopsis,

existe aussi sur "youtube" http://www.youtube.com/watch?v=MNyebpog_i0.

<https://www.youtube.com/watch?v=PSNJfnltZ5U> https://www.youtube.com/watch?v=RcUiG7tF_UM

- La page où èbe de ce texte

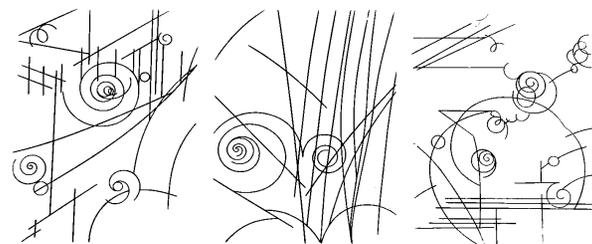
<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/>

- La dernière version (28 mars 2024) :

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEhoule.pdf>



Jacques Despierre (1912-1995), "Rythmes d'eau" 1961 (Bâtiment Esclangon)



Raymond Subes "Sans Titre" 1961 (entrée de Jussieu Quai Saint Bernard)