Equation de la Chaleur

Dans ce chapitre nous faisons un bilan d'énergie sur une tranchette pour établir l'équation de la chaleur en dimension 1. Nous nous focalisons sur le mode de transmission de la chaleur appelé la "conduction".
Nous examinons ensuite des exemples stationnaires en dimension 1.

1 Généralités

1.1 Différents mécanismes

On distingue différents mécanismes de transferts de chaleur conduction/ convection/ rayonnement.
Nous allons plus précisément étudier dans ce chapitre la "conduction". La chaleur fournie à un endroit du corps est propagée de proche en proche dans le corps. Dans le cas du gaz, nous avons vu qu'il s'agissait de chocs entre molécules, dans le cas du solide, de vibrations des atomes. Lorsque l'on examine les choses à une échelle bien plus grande que l'écart entre les molécule et que le milieu paraît continu, la température varie en fonction de la position. On n'a plus d'équilibre dans tous le corps comme dans le cas des systèmes minces.

1.2 Lois de conservation, forme générale

Les équations fondamentales de la mécanique des "milieux continus" expriment les lois générales de la physique indépendamment des propriétés "spéciales" des matériaux. Les lois de conservations pour un domaine donné peuvent être en toute généralité écrites sous la forme :

variation temporelle = terme de flux + création intérieure

Le bilan de n'importe quelle quantité de la physique, la masse, la quantité de mouvement, l'énergie....

$$\frac{d}{dt}\iiint a dv = -\iint \overrightarrow{J}\cdot d\overrightarrow{s} + \iiint r dv$$

• a est la quantité qui est conservée.
• $\overrightarrow{J}$ est le flux associé, le signe moins est une convention de définition, on choisit d'orienter les normales des surfaces vers l'extérieur, donc le produit

scalaire $\overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{s}$ est positif si le flux est dans le sens de la normale. Ce qui veut bien dire que le flux est sortant.
• r est le terme source volumique.

1.3 forme Globale

Dans certains cas on peut rester sur une description globale.
Le corps se refroidit lentement, la température du corps est en équilibre continuel (il n'y a pas de fortes variation de températures dans le corps). Nous examinerons ce cas plus tard. Nous nous concentrons pour l'instant sur des exemples où il y a une variation assez forte de la température dans l'objet.

1.4 hypothèse de l'état local associé

Cette hypothèse dite de "l'état local associé" va nous être utile pour la suite. Bien que le système soit en déséquilibre au sens de la thermodynamique, chaque unité de volume élémentaire peut être considérée comme approximativement en équilibre du point de vue thermodynamique.

Ce qui veut dire aussi que la mécanique des milieux continus est, non seulement, l'étude des phénomènes à des échelles de longueur plus grandes que les échelles atomiques, mais encore à des échelles de temps plus longues que celles qui permettent à l'assemblée de particules contenues dans ce volume élémentaire de retourner à l'équilibre "thermostatique" (qui est le nouveau nom de la thermodynamique classique).

1.5 forme locale cas 1D

Pour fixer les idées, on commence par le cas unidimensionel ou "1D". Les lois de conservations pour un domaine donné invariant par translation en y et z peuvent être écrites sous la forme :

variation temporelle totale =

= (ce qui rentre - ce qui sort) des surfaces +

+ création intérieure volumique

où les variations sont prises par unité de longueur en y et z. Faisons un petit dessin pour calculer ce bilan. On suppose que la tranche ne bouge pas. Sur

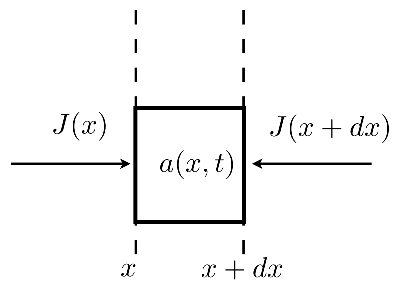

FIG. 1 – Bilan sur une tranche élémentaire.

la tranche fixe représentée sur la figure 1, par unité de longueur en y et z, on a :
• pour la conservation de a, une quantité $a(x,t)dxdS$ dans la tranche dx de surface dS arbitraire en y, z. Attention, on passe d'une dérivée simple car la quantité globale ne dépend que du temps, à une dérivée partielle $\partial/\partial t$ car la variable d'espace x va varier.
• Il y a un flux rentrant en x qui est $J(x,t)$ (on a $\overrightarrow{J} = J\overrightarrow{i}$), ce flux rentre à gauche, donc il contribue pour $J(x,t)dS$ à l'augmentation de a
• Il y a un flux sortant en $x+dx$ qui est $J(x+dx,t)dS$, ce flux sort à droite, donc il contribue pour $-J(x+dx,t)dS$ à la diminution de a
• s'il y a création de a, avec un tau $r(x)$, il faut compter $r(x)dxdS$ en plus.
Au total, la variation temporelle de a au point x est :

$$\frac{\partial}{\partial t}a(x,t)dxdS = +J(x,t)dS - J(x+dx,t)dS + r(x,t)dxdS$$

Or, par définition de la dérivée : $J(x+dx,t) = J(x) - dx\frac{\partial}{\partial x}J(x,t) + ...$, donc

$$\frac{\partial}{\partial t}a(x,t)dxdS = -\frac{\partial}{\partial x}J(x,t)dxdS + r(x,t)dxdS$$

soit la forme finale :

$$\frac{\partial}{\partial t}a(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}J(x,t) + r(x,t).$$

Nous allons appliquer cette expression à l'énergie.

1.6 Application à la conservation de l'énergie

La quantité a que nous avons introduite peut être n'importe quelle quantité de la physique, la masse, la quantité de mouvement, l'énergie.... Nous allons ici préciser le cas de l'énergie dans le cas d'un milieu fixe de densité constante. Dans ce cas on a $a = \rho e$, et si on définit $J = q$ le flux d'énergie :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} e(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} q(x,t) + r(x,t)$$

On connaît l'expression de la capacité calorique qui relie les variations de l'énergie avec les variations de température $\rho \frac{\partial}{\partial t} e(x,t) = \rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x,t)$, donc

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} q(x,t) + r(x).$$

Il faut ensuite exprimer la relation constitutive entre le flux de chaleur q et le champ de température. La source r est une grandeur donnée.

Par définition $\overrightarrow{q}$ est le vecteur courant de chaleur (ou densité de flux de chaleur). Il est tel que le taux de chaleur reçu par conduction dans le domaine D est égal par définition à :

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\partial D} -\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$$

le signe $-$ résulte de la convention adoptée : car $\overrightarrow{n}$ est la normale extérieure.

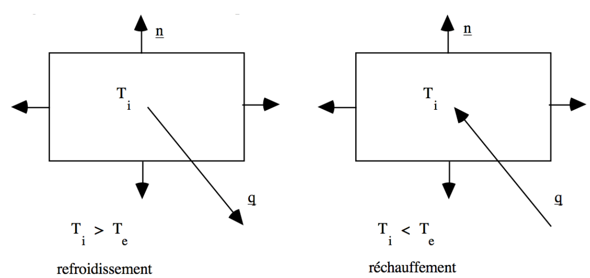

FIG. 2 – Le flux de chaleur est dans le sens chaud/ froid.

1.7 Application à la Création d'entropie

Examinons l'équation pour l'entropie, d'abord, nous avons toujours par l'hypothèse de l'état local associé, et en supposant qu'il n'y a aucun travail ni création volumique d'énergie :

$$Tds = de + 0.$$

$$\rho T \frac{\partial}{\partial t} s = \rho \frac{\partial}{\partial t} e(x,t) \text{ soit } \rho T \frac{\partial}{\partial t} s = -\frac{\partial}{\partial x} q(x,t).$$

Or, un bilan d'entropie entre la tranche x et $x + dx$ donnerait :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} s(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{q(x,t)}{T(x,t)}) + \dot{\sigma}(x,t)$$

car la chaleur apportée en x est $q(x,t)$ et donc l'entropie apportée $+\frac{q(x,t)}{T(x,t)}$ et celle partant en $x+dx$ est $-\frac{q(x+dx,t)}{T(x+dx,t)}$ et car l'on a défini $\dot{\sigma}(x,t)$ qui représente le taux de création d'entropie. Par le second principe $\dot{\sigma} > 0$. En éliminant $\partial s/\partial t$ entre ces deux équations on obtient :

$$\dot{\sigma}(x,t) = q\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{T}).$$

En l'écrivant sous la forme de Clausius Duhem simplifiée :

$$q\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{T}) \geq 0 \text{ ou } -q\frac{\partial T}{\partial x}(\frac{1}{T^2}) \geq 0$$

on en déduit que si

$$q = -k\frac{\partial}{\partial x}T$$

alors

$$-q\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{T}) = k\Big(\frac{\partial T}{\partial x}\Big)^2$$

qui doit être positif, donc la constante k est positive. Cette forme est la forme la plus simple, parmi les formes compliquées pour l'expression du flux de chaleur. C'est la loi de Fourier.

Le flux de chaleur est bien dans le sens chaud froid.

2 Loi de Fourier : équation de la chaleur en conduction pure

2.1 Loi constitutive du Flux de chaleur

On a vu dans le chapitre 1 bis consacré à la théorie cinétique que le flux d'énergie dépendait du gradient de la température avec un coefficient proportionnel à la vitesse d'agitation et au libre parcours moyen.

On retrouve donc une expression identique liée au gradient de température avec une démarche complètement différente. Nous avions établi un résultat pour un gaz, nous montrons ici que ce résultat est indépendant du corps considéré. Tous les matériaux suivent la loi de Fourier (du moins en première approximation si on ne chauffe pas de manière trop fort ou de manière trop rapide).

On en déduit que la forme la plus simple, parmi les formes compliquées pour l'expression du flux de chaleur est bien :

$$q = -k\frac{\partial}{\partial x}T.$$

C'est la loi de Fourier (François Marie Charles Fourier 1772-1837). k le coefficient de conductivité thermique est positif (et comme T est toujours positif).

q est en fait un vecteur, ici dans notre cas où il n'y a de variations qu'en x, le flux est un vecteur dirigé par $\overrightarrow{e}_x$

$$\boxed{\overrightarrow{q} = -k\big(\frac{\partial}{\partial x}T\big)\overrightarrow{e}_x.}$$

2.2 Quelques valeurs de k

Fourrier (sic) dans la fresque "La Fée Électricité" R. Dufy (1936-1937, Paris, musée d'Art moderne de la Ville de Paris) photo PYL

D'un point de vue pratique, on ne retiendra que :

$$\boxed{q = -k\frac{\partial}{\partial x}T, \text{ avec } k \text{ en } W/m/K}$$

k		matériau	Conductivité k en $Wm^{-1}K^{-1}$	diffusivité $k/(\rho c_p)$ en m^2s^{-1}.
0.01		air	$2.5\ 10^{-2}$	$2\ 10^{-5}$
	gaz			
0.1		bois	0.13	$2.4\ 10^{-7}$
	liquides	glycérine	0.29	$0.98\ 10^{-7}$
		eau	0.60	$1.44\ 10^{-7}$
1				
		mercure	8.0	$4.2\ 10^{-6}$
		granit	2.51	$1.1\ 10^{-6}$
100	métaux	acier	46	$1.2\ 10^{-5}$
		alu	200	$0.86\ 10^{-4}$
		argent	418	$1.71\ 10^{-4}$
		quartz	1.5	$7\ 10^{-7}$
V				

Remarques

•$k(T)$ croît avec la température pour les gaz

•$k(T)$ décroît avec la température pour le cuivre, le zinc, les aciers doux, le plomb, mais croît avec la température pour l'aluminium et les aciers inoxydables

•$k(T)$ est quasi constant pour les huiles de moteur

•$k(T)$ pour l'eau augmente avec T, puis diminue (culmine vers 400K)

•Tous les ouvrages de thermique ont des tables avec les valeurs des différents matériaux à différentes températures...

2.3 Différentes écritures de l'équation de la Chaleur 1D

L'équation de la chaleur établie à partir des lois de conservation est :

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} q(x,t) + r(x)$$

compte tenu de la loi de Fourier :

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k \frac{\partial}{\partial x} T\Big) + r.$$

S'il n'y a pas de sources de chaleur $r = 0$:

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k \frac{\partial}{\partial x} T\Big).$$

Bien souvent, le coefficient de conduction sera pris constant, mais il peut dépendre de la position (si on met des matériaux différents en contact), et il peut aussi dépendre de la température si on chauffe trop, ou si on veut résoudre de manière très précise. Si on n'est pas dans ces cas, on écrira la forme simplifiée classique :

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t).}$$

On la note aussi parfois avec λ plutôt que k :

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t).$$

Enfin, on note aussi

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t), \text{ avec } \alpha = \frac{k}{\rho c_p}.$$

Le coefficient α de "diffusivité" (noté aussi a) a les dimensions d'une longueur au carré divisé par un temps ($m^2 s^{-1}$). L'équation de la chaleur est une équation différentielle aux dérivées partielles.

Il y a deux variables, x et t qui sont deux variables indépendantes. Pour résoudre cette équation, il faut des conditions aux limites, c'est à dire la valeur de la température aux bornes du domaine. Nous allons les exposer plus tard.

2.4 Note

Nous venons de voir l'équation de la chaleur, elle traduit une conservation d'énergie. Nous avons vu la loi de Fourier.

Remarquons que si la température est homogène : partout pareille, l'équation se réduit à $\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = 0$, l'état ne peut être que stationnaire si la température est partout la même. Notons aussi qu'au chapitre deux, nous avons utilisé en fait l'équation de la chaleur globale pour déterminer la température finale dans le type d'exercice :
Soit un corps 1 de volume V_1 à la température T_1 et un corps 2 de volume V_2 à la température T_2, ils sont mis en contact, quelle est la température finale ?
L'équation de la chaleur se résout en fait de manière globale,

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho e dv = - \iint \overrightarrow{q} \cdot d\overrightarrow{s} + \iiint r dv$$

sans flux extérieur ni création intérieure cela donne :

$$\rho_1 V_1 (T_f - T_1) + \rho_2 V_2 (T_f - T_2) = 0$$

d'où l'expression de la température finale :

$$T_f = \frac{\rho_1 V_1 (T_1) + \rho_2 V_2 (T_2)}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$$

Dans les exemples qui vont suivre, à la différence de ce cas, on chauffe continuellement aux bornes en imposant une température ou un flux et la température n'est plus uniforme en espace.

3 Conduction stationnaire pure 1D.

3.1 Equation de la chaleur stationnaire 1D.

Rappelons l'équation de la chaleur que nous venons d'établir :

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial}{\partial x} T\right) + r.$$

Les deux variables, x et t sont deux variables indépendantes, il s'agit de ce que l'on appelle une "Equation aux Dérivées Partielles" (EDP, ou PDE en anglais). Le fait qu'il y ait deux variables (en fait 4 en réalité : t, x mais aussi y et z), complique beaucoup la résolution. On va donc commencer par examiner le cas simple stationnaire.

On appellera solution stationnaire la solution obtenue pour un temps assez long. Pour la solution stationnaire, le temps n'est plus un paramètre, la température ne varie plus avec le temps.

Ecrivons les équations stationnaires : il s'agit simplement de dire la température ne varie plus avec le temps, c'est à dire : $\frac{\partial}{\partial t} T = 0$.

• l' équation stationnaire de la chaleur dans un milieu immobile linéaire homogène avec terme source est donc :

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + r$$

• l' équation stationnaire de la chaleur dans un milieu immobile linéaire homogène avec terme source et isotrope est donc :

$$0 = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} T + r$$

Dans les deux cas, c'est une équation différentielle ordinaire. On a besoin de ses conditions aux limites pour la résoudre.

• **conditions aux limites :** il faut connaître la température aux bornes de l'objet chauffé. C'est normal. La température d'un mur de maison dépend bien de la température extérieure et de la température à l'intérieur de la maison.
On dira que soit la température pariétale est imposée :

$$T = T_p$$

ou soit l'autre possibilité qui est que le flux pariétal imposé :

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}|_p = q_p$$

remarquons qu'une paroi adiabatique (on dit aussi athermane) est telle que

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}|_p = 0.$$

sur un plan de symétrie on a aussi

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Il existe une autre possibilité liée au "facteur d'échange" que nous verrons plus tard.

Nous allons examiner des exemples simples en dimension 1. Ces exemples vont nous permettre de fixer les idées.

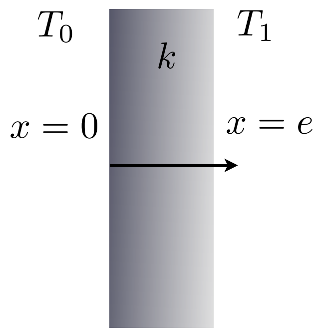

FIG. 3 – Un mur infini, soumis à T_0 en $x = 0$ et T_1 en $x = e$.

3.2 Exemple de conduction stationnaire : le problème de la température du mur homogène

3.2.1 Équation de la chaleur dans un mur

Soit une paroi d'épaisseur e, ce mur est homogène : k est constant, séparant deux milieux à température fixée et uniforme, T_0 (à gauche) et T_1 (à droite).

Dans ce solide, l'équation de la chaleur en stationnaire est simplement :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

la température est linéaire $\frac{dT}{dx} = a$ puis $T = ax + b$, la température passe de T_0 à T_1, de $x = 0$ à e donc

$$T = T_0 + \frac{x}{e}(T_1 - T_0)$$

et le flux est constant dans le solide, il vaut :

$$q = -k(T_1 - T_0)/e.$$

Le flux entrant est le même que le flux sortant. Si $T_0 > T_1$, le flux est positif, il va bien du chaud au froid.

3.2.2 Équation de la chaleur : profils de température

La température est linéaire en x, c'est une droite

$$T = T_0 + \frac{x}{e}(T_1 - T_0).$$

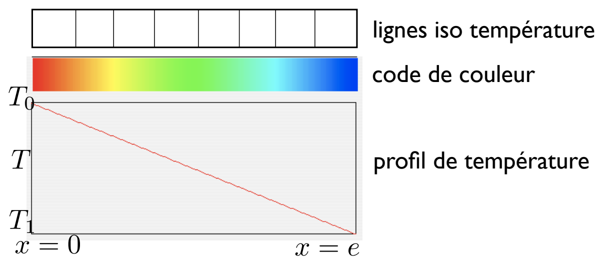

FIG. 4 – Profil de température : différentes représentations équivalentes. Remarquer le code couleur RVB : le rouge est chaud, le bleu est froid, la température intermédiaire est le vert.

la pente est constante, elle est liée au flux. La température ne varie pas en y.

On trace aussi des iso lignes de température. Pour chaque x fixé, c'est une droite parallèle à l'axe des y.

Ou on trace des cartes en couleur d'iso températures. Le rouge est en général la température la plus élevée, le bleu la plus froide. le vert est une température intermédiaire. On a en fait du plus chaud au plus froid : rouge jaune vert cyan bleu.

3.2.3 Équation de la chaleur dans un mur homogène, flux imposé

Flux imposé à droite

Supposons que l'on se donne cette fois une température imposée à gauche, mais un flux à droite :

$$-k\frac{dT}{dx} = q_1 \text{ en } x = e$$

le flux est toujours constant au travers du mur. Donc

$$T = -\frac{q_1}{k}x + T_0.$$

La température en e est cette fois un résultat du calcul :

$$T_1 = -\frac{q_1}{k}e + T_0.$$

Flux imposé à gauche

Supposons que l'on se donne cette fois une température imposée à droite, mais un flux à gauche :

$$-k\frac{dT}{dx} = q_0 \text{ en } x = 0$$

le flux est toujours constant au travers du mur. Donc

$$T = -\frac{q_0}{k}(x - e) + T_1.$$

La température en 0 est cette fois un résultat du calcul :

$$T_0 = \frac{q_0}{k}e + T_1.$$

3.2.4 Autres conditions aux limites

On peut résoudre l'équation de la chaleur stationnaire avec :
• deux températures en $x = 0$ et $x = e$.
• une température en $x = 0$ et un flux en $x = e$.
• un flux en $x = 0$ et une températures en $x = e$.

On pourrait résoudre l'équation de la chaleur stationnaire avec :
• une température en $x = 0$ et un flux en $x = 0$.
mais ce n'est pas vrai en général, il faut donner les conditions aux bornes.

On ne peut pas résoudre l'équation de la chaleur stationnaire avec :
• un flux en $x = 0$ et un flux différent en $x = e$.
• deux flux égaux en $x = 0$ et $x = e$ car la température est alors indéterminée.

3.2.5 exemple numérique la casserole

• **Q** : Soit une casserole en aluminium d'épaisseur e =0.5 cm et de 20cm de diamètre($k = 200W/m^2/K$) Elle est posée sur une plaque électrique de 900W. L'eau se vaporise, elle est à T_e=100˚C.

• **R** : Le flux sur la paroi du bas est

$$-k\frac{dT}{dx} = q_0$$

soit $q_0 = 900W/\pi/((0.1m)^2) = 28.7kW/m^2$ la température est

$$T_0 = T_e + q_0 e/k \text{ soit } T_0 = 100 + 28662 * 0.005/200 = 100.7^\circ\text{C}$$

l'augmentation de température n'est que de 0.7 degrés.

3.2.6 exemple numérique le Frigidaire

• **Q** : Un frigo de 600W marche périodiquement pendant 5 min et se met en pause pendant 15min. La température moyenne y est de 7 ˚C, il fait 18˚C dans la pièce.
Déterminer la conductivité thermique moyenne de la porte sachant qu'elle fait 3cm d'épaisseur, (dimensions du frigo 1,50x0,5mx0,5m).

• **R** : En moyenne la puissance fournie est de $P = 600 * 5/20 = 150W$, la surface du réfrigérateur est $S = (0.5 * 0.5) * 2 + (1.5 * 0.5) * 4 = 3.5m^2$. remarquons que la surface intérieure est environ $3m^2$.

$$k = \frac{eP}{S(T_2 - T_1)} = 0.03150/3.5/(11) = .12$$

à comparer à l'Aluminium !

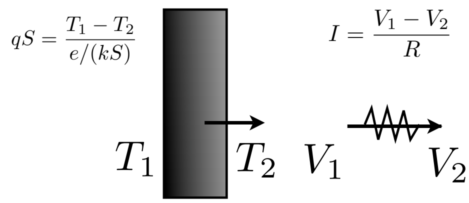

FIG. 5 – Equivalence électrique dans le cas stationnaire 1D, on note $\dot{Q} = qS$ le flux de chaleur total à travers la surface considérée.

3.3 Analogie électrique

3.3.1 Définition

Reprenons le cas simple du mur infini d'épaisseur e et de conductivité k sans production de chaleur, on a vu que si on passe d'une température T_1 à une température T_2, par définition $q = -k(T_2 - T_1)/e$, on définit la quantité de chaleur totale qui rentre $\dot{Q} = qS$ (attention donc au signe qui est inverse du signe habituel). Et on peut aussi écrire

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{e/(k)} \quad \text{ou, avec} \quad \dot{Q} = qS \text{ on a } \dot{Q} = \frac{(T_1 - T_2)}{e/(kS)}$$

On définit ainsi la **résistance thermique :**

$$\boxed{R = \frac{e}{kS}}$$

$\rho_s = e/k$ est appelé la "résistance thermique par unité de surface". Ceci est lié à l'analogie que l'on peut faire avec l'électricité. La température est l'équivalent du potentiel T<->V, tandis que le flux de chaleur est l'équivalent de l'intensité I<-> qS. On peut alors multiplier les milieux 1D et utiliser les lois d'Ohm et de Kirchoff.

L'analogie électrique permet de résoudre de nombreux problèmes pratiques de transferts de chaleur stationnaires.

3.3.2 Cas en série

Par exemple, prenons deux milieux infinis de conductivité k_1 et k_2 et d'épaisseur e_1 et e_2. On passe de la température T_0 en $x = 0$ à T_2 en

$x = e_1 + e_2$. L'équation de la chaleur 1D stationnaire est simplement :

$$\frac{dq}{dx} = 0$$

q est constant dans chaque tranche. Donc

$$q = -k_1 \frac{T_1 - T_0}{e_1}$$

$$q = -k_2 \frac{T_2 - T_1}{e_2}$$

$$0 < x < e_1,\ T = T_0 - \frac{x}{e_1} q \quad \text{et} \quad T_1 = T_0 - \frac{e_1}{k_1} q$$

$$e_1 < x < e_1 + e_2,\ T = T_0 - \frac{x - e_1}{k_2} q \quad \text{et} \quad T_2 = T_1 - \frac{e_2}{k_2} q$$

Soit de 0 à 2, on décompose $-(T_2 - T_0) = -(T_2 - T_1) - (T_1 - T_0)$ soit, puisque le flux de chaleur q est constant

$$-(T_2 - T_0) = (\frac{e_2}{k_2 S} + \frac{e_1}{k_1 S}) q S$$

la résistance totale est le rapport entre la chute de température totale et le flux thermique :

$$-(T_2 - T_0)/(qS) = R_{tot} \ \text{ avec } R_{tot} = (\frac{e_2}{k_2 S} + \frac{e_1}{k_1 S}),\ \text{soit } R_{tot} = R_1 + R_2$$

Les deux résistances thermiques sont en série.

3.3.3 Cas en parallèle

Pour le cas du haut (cf figure), le flux de chaleur total est
$qS_{total} = q_1 S_1 + q_2 S_2$ soit

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 \ \text{ soit } \dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} + \frac{T_1 - T_2}{R_2} = (T_1 - T_2)\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big).$$

La résistance totale est donc

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_{tot}} \ \text{ avec } \frac{1}{R_{tot}} = \Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big),$$

avec la définition des résistances, compte tenu des surfaces, des longueurs et des conductivités

$$R_1 = \frac{L_1}{k_1 S_1},\ R_2 = \frac{L_2}{k_2 S_2}.$$

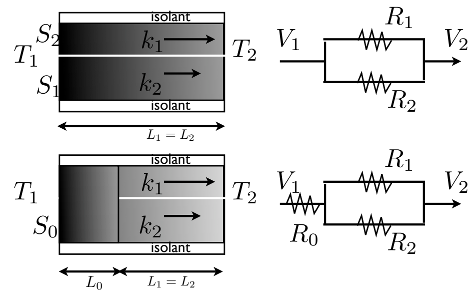

FIG. 6 – Equivalence électrique dans le cas stationnaire 1D, montages en série et en parallèle.

3.3.4 Cas en parallèle et série

La figure suivante résume les configurations principales qui s'interprètent comme des mises en série et en parallèle de de résistances thermiques. Pour le cas de la figure du bas, le flux de chaleur total est

$$\dot{Q} = \dot{Q}_0 = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 \text{ soit } \frac{T_1 - T_0}{R_0} = \frac{T_0 - T_2}{R_1} + \frac{T_0 - T_2}{R_2}$$

soit dans la branche en parallèle :

$$(T_0 - T_2) = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \dot{Q}$$

et le flux est lié à la résistance totale équivalente :

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_{tot}} \text{ et } (T_1 - T_2) = (T_1 - T_0) + (T_0 - T_2)$$

soit,

$$T_1 - T_2 = R_{tot}\dot{Q} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \dot{Q} + R_0 \dot{Q}$$

d'où

$$R_{tot} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} + R_0$$

avec

$$R_0 = \frac{L_0}{k_0 S_0}, \; R_1 = \frac{L_1}{k_1 S_1}, \; R_2 = \frac{L_2}{k_2 S_2}.$$

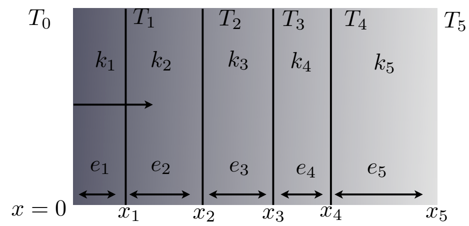

FIG. 7 – Un mur infini, soumis à T_0 en $x = 0$ et T_n en $x = x_n$ composé de n tranches homogènes.

3.3.5 Enchaînement de murs ; mur composite

On peut maintenant empiler les murs e_i et k_i avec $1 \leq i \leq n$.... soit T_0, T_1 à T_n les températures sur les faces, l'équation de la chaleur est :

$$\frac{dq}{dx} = 0$$

q est bien constant dans chaque tranche. Donc

$$q = -k_1 \frac{T_1 - T_0}{e_1}$$

$$q = -k_2 \frac{T_2 - T_1}{e_2}$$

$$....$$

$$q = -k_n \frac{T_n - T_{n-1}}{e}$$

d'où les différentes relations pour les températures :

$$0 < x < x_1,\ T = T_0 - \frac{x}{k_1} q \quad \text{et} \quad T_1 = T_0 - \frac{e_1}{k_1} q$$

$$x_1 < x < x_2,\ T = T_1 - \frac{x - x_1}{k_2} q \quad \text{et} \quad T_2 = T_1 - \frac{e_2}{k_2} q$$

$$...$$

$$x_{n-1} < x < x_n,\ T = T_{n-1} - \frac{x - x_{n-1}}{k_n} q \quad \text{et} \quad T_n = T_{n-1} - \frac{e_n}{k_n} q$$

dans chaque tranche intermédiaire la température est linéaire.

Le flux total est

$$qS = \frac{T_0 - T_n}{e_1/k + ... + e_n/k_n},$$

que l'on identifie à $(T_0 - T_n)/R$ la résistance thermique de ce mur est la somme des résistances de chaque constituant.

$$RS = e_1/k + ... + e_n/k_n.$$

Chaque résistance est en série comme en électricité.

3.3.6 Visualisation du champ de température

Avec l'appliquette Java `mur.class`, on trace la distribution de température à travers un mur avec trois matériaux différents. On fait varier les coefficients k_1, k_2 k_3 et les épaisseurs e_1 e_2 et e_3.

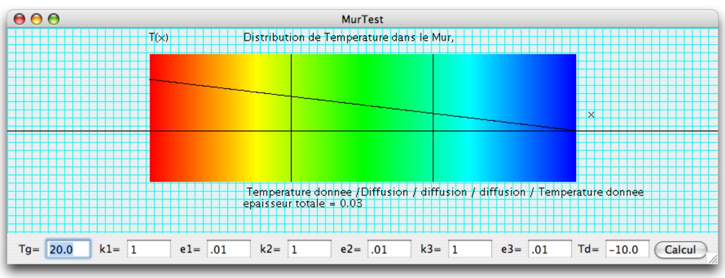

FIG. 8 – La distribution de température $T(x)$ dans trois milieux 1D en `java` `[Cliquer]` . Remarquer le code de couleur, Rouge chaud, bleu froid.

Faire varier les épaisseurs et les conductivités thermiques grâce à l'appliquette Java.

3.3.7 exemple numérique en construction

Calculons des valeurs e résistances thermiques pour les matériaux de construction courants.

Valeurs en construction

Matériau	ρ (kg/m3)	c_p (Wh/kg.K)	k (W/(m.K))
Béton cellulaire	400	0.28	0.13
plâtre	900	0.26	0.35
plaque plâtre BA10	790	0.22	0.33
laine de roche	25	0.26	0.03
Amiante	1000	?	0.1
Polystyrène expansé	18	0.38	0.039
brique creuse	650	0.25	0.45

TAB. 1 – Valeurs issues de http ://www.ideesmaison.com.

Un mur de béton de 30cm doublé en intérieur dune couche de plâtre de 1cm a une résistance de 2.34 m^2K/W

Un mur de brique de 20cm doublé en intérieur d'un panneau de plâtre de 1cm a une résistance de 0.44+ 0.03 = 0.47 m^2K/W

On voit clairement que la deuxième solution est nettement moins bonne. Si on met 16cm de laine de roche, on refait grimper la résistance à 0.44+2.77 +0.03 = 3.24 m^2K/W, assurant un faible transfert de chaleur en hiver.

3.3.8 exemple numérique le Frigidaire

Reprendre l'exercice et du frigo : calculer la résistance thermique totale. En moyenne la puissance fournie est de $P = 600*5/20 = 150W$, la résistance thermique

$$R = \frac{(T_2 - T_1)}{P} = 0,073$$

Coût du fonctionnement sachant que le prix public TTC d'un kWh d'électricité en France en 2008 est d'environ 0,11 €.

Par jour, l'énergie est de $150 * 2410^{-3}kWh = 3.6kWh$ donc 0.4 €

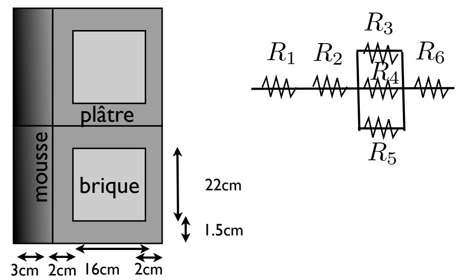

FIG. 9 – Un mur infini inhomogène constitué de différents matériaux. Sa représentation électrique

3.3.9 Mur composite, approximation électrique

Q : Soit un mur de 3m de haut et de 5m de large constitué de longues briques de 16cm x 22cm ($k = 0.72W/mK$), deux couches d'un plâtre de 2 cm d'épaisseur ($k = 0.22$), une couche de matériau en mousse de 3cm ($k = 0.026$). Calculer la résistance totale du mur.

R : Calcul des résistances.
On simplifie fortement en modélisant par des résistances en série, et en parallèle. On utilise la formule $R = e/(kS)$
La surface est prise par motif et par mètre transverse, on travaille donc sur un mur de 0.25m x 1m.
Pour la mousse, 3cm d'épaisseur, la surface est la taille du motif :22cm+1.5cm*2=0.25m multipliée par un mètre en profondeur :

$$R_1 = 0.03m/(0.026W/mK(0.22 + 0.015 * 2)) = 4.6K/W$$

pour le plâtre vertical, même surface :

$$R_2 = R_6 = 0.02/(0.22(0.22 + 0.015 * 2)) = 0.36K/W$$

pour le plâtre horizontal, la surface est de 1.5cm x 1m

$$R_3 = R_5 = 0.16/(0.22(0.015)) = 48.5K/W$$

brique 22cmx1m

$$R_4 = 0.16/(0.72(0.22)) = 1.01K/W$$

Les trois résistances du milieu sont en parallèle

$$1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5 = 1/0.97$$

la résistance totale :

$$4.6 + 0.36 + .97 + 0.36 = 6.3$$

S'il fait 0°C dehors et 18°C à l'intérieur le flux est 2.86 W par $0.25m^2$ de surface soit $11.5W/m^2$
Le flux total pour les $15m^2$ est de 171 W.

Le transfert à travers le mur modélisé par ce type de modèle n'est pas juste mais donne en pratique des résultats comparables.

Remarquons que la décomposition n'est pas forcément unique, on peut interpréter de manière différente la disposition des différents éléments.

• Remarque, les ponts thermiques...

•Remarque, la "vraie" solution s'obtient avec des codes de calculs tels que FreeFem....

3.4 La résistance de contact thermique

Nous avons jusqu'à présent considéré que la température était continue du passage d'un corps à l'autre au travers du plan de l'interface. En pratique c'est parfois faux. En effet ; la surface de contact entre deux matériaux n'est jamais parfaitement plane, il y a des rugosités ou des minis aspérités qui gênent le contact. De l'air est donc emprisonné par endroits. Cela isole un peu les deux corps, à une échelle plus grande que la rugosité on observe une discontinuité de température. Même si au niveau fin de la rugosité, la température reste continue, au niveau global, on constate que la température est discontinue lorsque l'on passe d'un corps à l'autre.

On modélise ce phénomène par la résistance de contact thermique.

Par définition, la "résistance de contact" relie le "saut" de température à la densité de flux thermique qui traverse le contact :

$$R_{contact} = \frac{\Delta T}{q}.$$

On conçoit que la résistance de contact dépend de nombreux paramètres (nature du fluide interstitiel, des matériaux, porosité, rugosité, pression de contact....), son évaluation théorique est impossible. Les ordres de grandeur pratiques sont de 10^{-3} à 10^{-6} $Km^{-2}W^{-1}$.

On négligera la résistance de contact lorsque un des deux solides est un mauvais conducteur de la chaleur. On dit qu'il y a contact parfait, et les deux températures sont égales. En revanche lorsque les matériaux sont de bons conducteurs thermiques la résistance de contact peut fortement modifier la résistance totale.

3.5 Mur avec production de chaleur

Dans certains cas, il y a création d'énergie volumique. Cette source est souvent due à des réactions chimiques internes, c'est le cas des réacteurs chimiques. C'est aussi le cas quand il y a dissipation électrique dans les fils électriques, par effets joule il y a création d'une source de chaleur. C'est aussi le cas dans les centrales atomique, la dissociation de l'Uranium crée de la chaleur dans les pastilles de combustible nucléaire.
On peut imaginer aussi le cas de la vitre de voiture avec son dispositif de dégivrage (en fait, un fil chauffe la vitre par effet Joule, dans ce cas dire que la production de chaleur est uniforme est une approximation). On peut

imaginer le cas du chauffage par le sol dans un appartement (en fait, un serpentin d'eau chaude chauffe le sol, dans ce cas dire que la production de chaleur est uniforme est une approximation).

L' équation stationnaire de la chaleur dans un milieu immobile linéaire avec terme source et isotrope est :

$$0 = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}T + r.$$

avec les conditions aux limites d'une température imposée T_s par exemple en $x = 0$ et $x = e$.

S'intègre deux fois, les deux constantes d'intégration sont éliminées par les deux conditions aux limites, on obtient le profil final de température :

$$T = T_s - \frac{r}{2k}x^2 + \frac{re}{2k}x$$

la température est maximale en en $x = e/2$ (là où $\partial T/\partial x = 0$), elle vaut

$$T_m = T_s + \frac{re^2}{8k}$$

l'écart de température entre le centre et l'extérieur est donc $\frac{re^2}{8k}$. S'il n'y a pas de chauffage volumique, la température est bien constante. Plus le dégagement de chaleur volumique est important, plus la température maximale est importante.
La densité de flux de chaleur est $q = -k\partial T/\partial x$ soit :

$$q(x) = r(x - e/2) \text{ avec } q(0) = -q(e) = -re/2 \text{ et } q(e/2) = 0$$

En $x = 0$ le flux sort : il est bien dans le sens de la normale extérieure $q(e) = re/2 > 0$ (si $r > 0$), en $x = e$ le flux sort : il est bien dans le sens de la normale extérieure $q(0) = -re/2$ or la normale est dans le sens -1.
L'énergie produite par unité de surface du mur est

$$P_{prod} = re.$$

Cette énergie est évacuée par chaque face du mur de manière égale, on a bien :

$$+q(0) - q(e) + P_{prod} = -2(re/2) + re = 0.$$

4 Conclusion

Nous avons établi l'équation locale de la chaleur 1D (x) par un bilan sur une tranche infinitésimale. Si k le coefficient de conduction de la chaleur de la loi de Fourier en $Wm^{-1}K^{-1}$, $k/(\rho c_p)$ la diffusivité thermique en $m^2 s^{-1}$.

on écrira la forme simplifiée classique lorsque k est constant :

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t).}$$

Il faut donner des conditions aux limites à cette équation. On en a étudié des solutions stationnaires pour des murs enchaînés. Pour l'instant nous n'avons présenté que des solutions stationnaires à température ou flux imposé. Cela nous a permis d'introduire la résistance thermique. Le chapitre suivant va introduire le coefficient de transfert et nous verrons aussi la solution instationnaire du problème.

5 Références

Y. Çengel (1998) "Heat transfert, a practical approach", Mc Graw Hill.
Incropera, DeWitt : Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 5th Edition, Wiley
J. Crabrol (1989) "Transferts de chaleur, tome 1 les principes", collection technologies, Masson
P.-Y. Lagrée, Equation de la chaleur, Cours MECAVENIR/EPU 2009/2010
J.F. Sacadura (1993) "Initiation aux tranferts thermiques", Lavoisier Tec & Doc.
`http ://fr.wikipedia.org/wiki/Conduction_thermique`
`http ://www.grasp.ulg.ac.be/cours/2cm/thermo13.pdf`

Tous les ouvrages 536.2 dans une bibliothèque.

Consulter aussi `http ://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MECAVENIR` le cours complet de thermique de P.-Y. Lagrée,