

# Multiscale Hydrodynamic Phenomena :

## Méthodes Multi Échelles :

### Méthode des Échelles Multiples

Pierre-Yves LAGRÉE

CNRS, Institut Jean Le Rond d'Alembert, U.M.R. 7607,

Sorbonne Université (Université Pierre & Marie Curie, Paris 06)

Boîte 162, 4 place Jussieu, 75005 PARIS, FRANCE.

mess.e. : pierre-yves.lagree@upmc.fr

Ouèbe : <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree>

Page ouèbe de ce fichier

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP>.

3 octobre 2023

Calendrier :

<https://calendar.google.com/calendar/u/0/embed?src=191gfktr03n0ggc5h3c77pud4s@group.calendar.google.com&ctz=Europe/Paris>

#### Résumé

Nous allons étudier un cas de problème perturbé qui fait apparaître deux échelles différentes par exemple de temps qui agissent en même temps et non plus l'une après l'autre comme pour la Méthode des Développements Asymptotiques Raccordés. C'est la Méthode des Échelles Multiples qui montre l'insuffisance de la précédente méthode. Nous allons étudier l'exemple simple de l'oscillateur (mouvement rapide) amorti (décroissance lente) dont la solution n'est pas aussi triviale que l'on pense.

## 1 Introduction

### 1.1 Considérations classiques sur les oscillateurs forcés

Cette méthode est à l'origine plutôt liée à des problèmes d'oscillateurs forcés faiblement à une fréquence proche de la résonance. En effet, le problème type est un oscillateur de fréquence naturelle unité forcé à la fréquence  $\omega$  :

$$y'' + y = \varepsilon \cos(\omega t) \quad (1)$$

il est classique que la solution est de la forme ([solution de l'équation sans second membre : en  $\cos$  et  $\sin$ ] + [solution particulière : solution forcée en  $\omega$ ]) :

$$y = A \sin(t) + B \cos(t) + \frac{\varepsilon \cos(\omega t)}{1 - \omega^2}$$

tant que  $\varepsilon$  est petit et que  $\omega$  est différent de 1, tout va bien. En fait dans cette section  $\varepsilon$  n'a pas d'importance. Si on se rapproche de la fréquence 1, on voit que l'amplitude d'oscillation devient de plus en plus grande. La perturbation fournit de plus en plus d'énergie lorsque l'on se rapproche de  $\omega = 1$ . On sait que la solution n'est plus correcte pour  $\omega = 1$  et que la solution de l'ODE est obtenue en utilisant la "variation de la constante" (voir annexe §11). on pose  $y = A(t) \sin(t) + B(t) \cos(t)$ , on en déduit les dérivées successives

$$y' = A \cos(t) - B \sin(t) + A' \sin(t) + B' \cos(t),$$

$$y'' = [-A \sin(t) - B \cos(t)] + \{2A' \cos(t) - 2B' \sin(t) + A'' \sin(t) + B'' \cos(t)\}.$$

si bien qu'en écrivant

$$y'' + y = \varepsilon \cos(t)$$

le terme entre crochets disparaît et ce permet d'identifier les coefficients devant les fonctions trigonométriques dans le terme entre accolades  $2A' + B'' = \varepsilon$ ,  $-2B' + A'' = 0$ . Donc, une solution particulière (sous forme de polynômes) est  $B'' = 0$  et  $A = \varepsilon t/2$  (voir annexe §11). La solution devient, avec  $A$  et  $B$  vraies constantes :

$$y = A \sin(t) + B \cos(t) + \varepsilon \frac{t}{2} \sin(t)$$

la solution n'est plus bornée lorsque le temps augmente, on est alors à la résonance, le terme en  $t$  provoque cette croissance (en général on rajoute une faible dissipation proportionnelle à  $y'$  qui évite d'avoir une amplitude infinie). Il est appelé terme séculaire (de "siècle", donc lent). Nous voyons ainsi qu'une deuxième échelle apparaît dans le problème, c'est une échelle plus lente que l'échelle de départ.

## 1.2 Le problème sur lequel nous allons nous concentrer

Pour fixer les idées nous allons beaucoup étudier l'équation simple de l'oscillateur amorti

$$y'' + \varepsilon y' + y = 0, \quad y(0), \quad y'(0) = 1, \quad (2)$$

en effet, nous connaissons sa solution exacte, et nous pourrions ainsi "vérifier" (sans prouver) que les méthodes asymptotiques "marchent". On voit tout de suite que l'équation 1 est de ce type puisqu'une solution de  $y'' + \varepsilon y' + y = 0$  à  $\varepsilon \rightarrow 0$  est  $y \sim \sin(t)$  et donc  $y' \sim -\cos(t)$  ce qui substitué dans 2 donne bien 1. Paradoxalement, un terme de dissipation provoquerait une explosion en temps...

Nous verrons que l'on peut l'appliquer à d'autres cas qu'aux oscillateurs cette méthode.

La méthode de la moyenne avec amplitudes lentement variable, est proche de la méthode de Krylov-Bogoliubov 1947. Nous attribuons à Feynman une méthode qu'il a popularisée dans son cours de physique mais n'est pas de lui.

La méthode des échelles multiples est parfois attribuée à Poincaré (1854-1912), bien que lui même ait dit qu'elle vint de l'astronome Lindstedt 1882 (1854-1939) (Kevorkian and Cole, 1996). Lighthill introduisit une méthode plus générale en 1949. La méthode des échelles multiples, aurait été utilisée par Sturrock 57 puis Frieman 63, puis Nayfeh 65 (développement en puissances de la dérivée) puis dans Van Dyke (1975) parlant de "method of strained coordinates". Krylov & Bogoliubov et Kevorkian & Cole ont introduit le développement maintenant standard en deux échelles.

La méthode est popularisée par Cole et Kevorkian 63, surtout par les nombreuses oeuvres de Nayfeh. Comme le note Nayfeh, la méthode est si populaire qu'elle a été redécouverte tous les 6 mois (Nayfeh "Perturbation Methods" 1973, page 232) dans les années 60 rendant difficile la reconnaissance de maternité exacte.

## 2 Un premier exemple

### 2.1 Problème

Partons du problème physique du ressort avec frottement visqueux. On considère l'exemple de l'oscillateur faiblement amorti de masse  $m$ , de raideur  $k$  et de coefficient d'amortissement  $\beta$  :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

avec les conditions initiales  $y(0) = 0$  et  $\frac{dy}{dt}(0) = V_0$ . On se place dans le cas où  $\beta$  est faible. La première question à résoudre est le poids relatif de l'amortissement en adimensionnant les équations.

## 2.2 Adimensionnement

Dans ce cas on s'attend à ce que le mouvement soit proche d'une oscillation harmonique  $\cos(\sqrt{k/m}t)$  (obtenue dans le cas  $\beta$  nul). On note  $Y$  la grandeur caractéristique de l'amplitude des oscillations et  $\tau$  celle de la période. On introduit alors les variables sans dimension  $\bar{y} = y/Y$  et  $\bar{t} = t/\tau$ . L'équation et les conditions initiales en variables adimensionnelles deviennent :

$$m\tau^{-2}\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} + \beta\tau^{-1}\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} + k\bar{y} = 0$$

$$\bar{y}(0) = 0, \text{ et } Y\tau^{-1}\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}(0) = V_0.$$

La vitesse initiale étant donnée, on choisit  $Y$  et  $\tau$  tels que  $Y/\tau = V_0$ . Le deuxième choix est fait au niveau du temps caractéristique. Dans le cas d'un oscillateur faiblement amorti, les oscillations sont régies par un équilibre entre inertie et raideur. On choisit donc  $\tau = \sqrt{m/k}$  ce qui représente la période des oscillations non-amorties. remarquons que s'il n'y avait pas de ressort, le temps caractéristique lié à l'amortissement est  $m\tau^{-2} = \beta\tau^{-1}$  soit donc un temps  $m/\beta$ .

Les deux grandeurs caractéristiques sont donc choisies comme il suit :

$$\tau = \sqrt{m/k} \text{ période des oscillations non-amorties}$$

$$Y = \sqrt{m/k}V_0 \text{ longueur qui normalise la condition initiale}$$

On note que le choix des dimensions caractéristiques a été effectué de manière à conserver le maximum de termes significatifs dans les équations et à respecter ainsi le principe de moindre dégénérescence.

Avec ce choix des dimensions caractéristiques, et avec  $\varepsilon = \beta/(\sqrt{km}) = \frac{\sqrt{m/k}}{m/\beta}$  où  $\varepsilon$  est le petit paramètre du problème non-dimensionnel (c'est bien le rapport entre le temps caractéristique de l'oscillation  $\sqrt{m/k}$  et le temps caractéristique de freinage visqueux  $m/\beta$ ),

le problème non-dimensionnel devient :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} + \varepsilon\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} + \bar{y} &= 0 \\ \bar{y}(0) = 0, \text{ et } \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}(0) &= 1. \end{aligned}} \quad (3)$$

## 2.3 Solution exacte

Bien entendu, ce problème linéaire

$$\bar{y}'' + \varepsilon\bar{y}' + \bar{y} = 0, \quad \bar{y}(0) = 0, \quad \bar{y}'(0) = 1$$

a pour solution exacte simple :

$$\bar{y} = -\frac{e^{\frac{1}{2}(-\varepsilon - \sqrt{-4 + \varepsilon^2})\bar{t}}}{\sqrt{-4 + \varepsilon^2}} + \frac{e^{\frac{1}{2}(-\varepsilon + \sqrt{-4 + \varepsilon^2})\bar{t}}}{\sqrt{-4 + \varepsilon^2}} = \frac{e^{-\varepsilon\bar{t}/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}} \sin((\sqrt{1 - \varepsilon^2/4})\bar{t})$$

que l'on développe pour des temps d'ordre 1, et pour des epsilons petits ( $\sqrt{-4 + \varepsilon^2} = 2i\sqrt{1 - (\varepsilon/2)^2}$ ) :

$$\bar{y} = \frac{i}{2}(e^{-i\bar{t}} - e^{i\bar{t}}) - \frac{\bar{t}}{2}\varepsilon\frac{i}{2}(e^{-i\bar{t}} - e^{i\bar{t}}) + \dots \text{ ce qui donne } \bar{y} = \sin(\bar{t}) - \frac{\bar{t}}{2}\varepsilon\sin(\bar{t}) + \dots$$

On aurait aussi pu développer non complètement la solution pour tenir compte des temps longs ;

$$\bar{y} = -e^{-\frac{\varepsilon\bar{t}}{2}}\frac{i}{2}(e^{-i\bar{t}} - e^{i\bar{t}} + \dots) \text{ soit en fait } \bar{y} = e^{-\varepsilon\bar{t}/2}\sin(\bar{t}) + \dots$$

si on poursuit le développement de  $e^{-\varepsilon\bar{t}/2}$  on obtient le résultat précédent  $\sin(\bar{t}) - \frac{\bar{t}}{2}\varepsilon\sin(\bar{t}) + \dots$ , mais sous cette dernière forme on voit bien que pour les grands temps, ce développement ne marche plus.

FIGURE 1 – Pour  $\varepsilon =$  variant de 0.001, à 1.0, tous les .025, tracé de la solution complète en rouge et la solution approchée naïve  $\sin(\bar{t}) - \varepsilon \frac{\bar{t}}{2} \sin(\bar{t})$  en noir [Cliquer sur le contrôle pour lancer le film, Acrobat/ QuickTime]

La solution exacte nous permet de voir qu'une bonne approximation est non pas :

$$\bar{y} = \sin(\bar{t}) - \frac{\bar{t}}{2}\varepsilon \sin(\bar{t}) + \dots \text{ mais } \bar{y} = e^{-\varepsilon\bar{t}/2} \sin(\bar{t}) + \dots$$

Cependant, bien que le problème soit résolu complètement dans ce paragraphe, jouons le jeu et cherchons une méthode pour retrouver ce développement avec l'exponentielle décroissant lentement  $\varepsilon\bar{t}$  et le sinus oscillant vite en  $\bar{t}$ .

## 2.4 Tentative de développement

On cherche d'abord un développement asymptotique de la solution de ce problème sous forme de développement asymptotique en une séquence de  $\nu_i(\varepsilon)$ , on voit sans peine qu'il s'agit de puissances de  $\varepsilon$  :

$$\bar{y}(\bar{t}, \varepsilon) = \bar{y}_0(\bar{t}) + \varepsilon \bar{y}_1(\bar{t}) + o(\varepsilon)$$

on substitue dans  $\bar{y}'' + \varepsilon \bar{y}' + \bar{y} = 0$ ,  $\bar{y}(0) = 0$ ,  $\bar{y}'(0) = 1$ , ce qui donne

$$\bar{y}''_0(\bar{t}) + \bar{y}_0(\bar{t}) + \varepsilon \bar{y}'_0(\bar{t}) + \varepsilon \bar{y}''_1(\bar{t}) + \varepsilon \bar{y}_1(\bar{t}) + o(\varepsilon) = 0, \quad \bar{y}_0(0) + \varepsilon \bar{y}_1(0) + o(\varepsilon) = 0, \quad \bar{y}'_0(0) + \varepsilon \bar{y}'_1(0) + o(\varepsilon) = 1.$$

Au premier ordre  $O(1)$ , on doit résoudre le problème :

$$\bar{y}''_0 + \bar{y}_0 = 0, \quad \bar{y}_0(0) = 0, \quad \bar{y}'_0(0) = 1.$$

La solution est  $\bar{y}_0(\bar{t}) = \sin(\bar{t})$ . Elle décrit les oscillations libres d'un pendule non-amorti. A l'ordre suivant  $O(\varepsilon)$ , le problème est :

$$\bar{y}''_1 + \bar{y}_1 = -\bar{y}'_0, \quad \bar{y}_1(0) = 0, \quad \bar{y}'_1(0) = 0.$$

Remarquons que les conditions aux limites ont été prises par l'ordre 0, et que la solution à l'ordre 0 apparaît en terme de forçage.

La solution du problème à l'ordre 1 est la somme de la solution générale du problème homogène, plus une solution particulière qui est  $-\bar{t} \sin(\bar{t})/2$  :

$$\bar{y}_1(\bar{t}) = A \sin(\bar{t}) + B \cos(\bar{t}) - \bar{t} \sin(\bar{t})/2.$$

Compte-tenu des conditions initiales, on a  $\bar{y}_1(\bar{t}) = -\bar{t} \sin(\bar{t})/2$ . Le développement asymptotique de la solution devient :

$$\bar{y}(\bar{t}, \varepsilon) = \sin(\bar{t}) - \varepsilon \frac{\bar{t}}{2} \sin(\bar{t}) + o(\varepsilon).$$

Ce développement asymptotique n'est pas uniformément valable pour  $\bar{t} \geq 0$  car pour  $\bar{t} = O(\varepsilon^{-1})$ , le deuxième terme devient du même ordre que le premier.

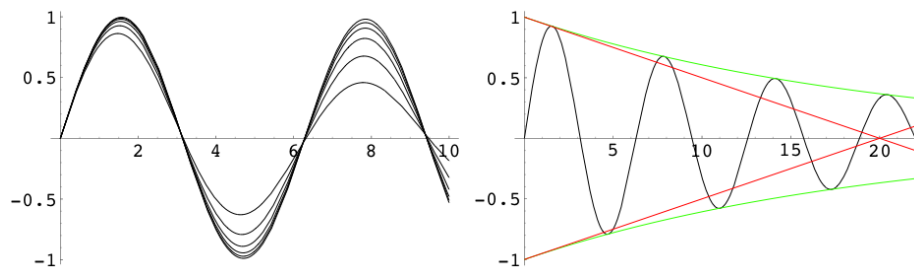


FIGURE 2 – Solution exacte pour la solution  $\bar{y}(\bar{t})$ , à gauche  $\varepsilon$  varie de 0.2 à 0.005, plus  $\varepsilon$  est petit plus on est proche du sinus; à droite  $\varepsilon = 0.1$  comparaison solution exacte [noir], le préfacteur du développement naïf  $(1 - \varepsilon/2)\sin(\bar{t})$  [rouge] et l'amplitude de la solution à double échelle  $\exp(-\varepsilon\bar{t}/2)\sin(\bar{t})$  [vert]. Pour les temps assez courts les trois solutions sont bien confondues.

Le développement est valable pour les temps d'ordre 1, mais pas pour les temps longs. En réexaminant la solution exacte, on voit que l'on a retrouvé le développement pour les temps  $O(1)$  et les epsilons petits. Mais on remarque que la solution exacte fait intervenir simultanément deux échelles de temps caractéristiques : une échelle rapide,  $\bar{t} = O(1)$ , correspondant au temps caractéristique d'oscillation du ressort (échelle introduite lors du dimensionnement de l'équation), et une échelle lente,  $\bar{t} = O(1/\varepsilon)$ , correspondant au temps caractéristique d'amortissement de l'amplitude des oscillations.

Quand on force un oscillateur à sa fréquence, il absorbe de plus en plus d'énergie, c'est ce que représente cette croissance en temps.

La solution que l'on a construite n'est pas encore complète. Il faut construire une technique qui tienne compte de ces deux échelles de temps. La première idée est de complètement découpler ces échelles en disant que l'oscillation est bien plus rapide que la dissipation, et donc que la solution reste en  $\sin(t)$  mais que l'amplitude du sinus varie lentement. Nous ferons une moyenne sur la période rapide : c'est la méthode énergétique simple ou "méthode de moyenne simplifiée" que nous appelons improprement "méthode de Feynman"), c'est aussi en réalité la "Méthode des Amplitudes Lentement Variables". Nous introduisons ensuite la "méthode des échelles multiples" dans tous ses détails, nous terminons par la "méthode WKB" ou BKW. Il s'agit toujours de résoudre :

$$\begin{cases} \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} + \varepsilon \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} + \bar{y} = 0 \\ \bar{y}(0) = 0, \text{ et } \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}(0) = 1. \end{cases} \quad (4)$$

et on trouvera toujours que la solution approchée trouvée par ces méthodes différentes est

$$y \simeq e^{-\varepsilon t/2} \sin(t).$$

Bien sûr ce ne sera pas une preuve mathématique du bien fondé de ces méthodes.

### 3 Une première méthode simple : la méthode des Amplitudes Lentement Variables

#### 3.1 Interprétation Energétique de Feynman

Nous venons donc de tenter de résoudre notre problème (4), et nous avons trouvé  $\bar{y}(\bar{t}, \varepsilon) = \sin(\bar{t}) - \varepsilon \frac{\bar{t}}{2} \sin(\bar{t}) + o(\varepsilon)$  qui n'est pas valable pour les temps longs  $\bar{t} = O(\varepsilon^{-1})$ . On est dans une impasse, mais on va exploiter ici la variation lente de l'énergie dans une méthode simplifiée qui "marche" dans beaucoup de cas. C'est une démarche approchée ("heuristique"), elle est présentée dans Feynman Mécanique 1 chapitre 24. Ce problème peut être traité en remarquant qu'il y a une oscillation "rapide" (en fait plutôt sur le temps unité) et une variation lente (de l'amplitude totale), on va chercher des solutions de la forme  $\bar{y} = A(\bar{t}) \sin(\bar{t})$  où l'amplitude  $A(\bar{t})$  varie très lentement (d'où le nom de la méthode), pour :

$$\bar{y}'' + \varepsilon \bar{y}' + \bar{y} = 0.$$

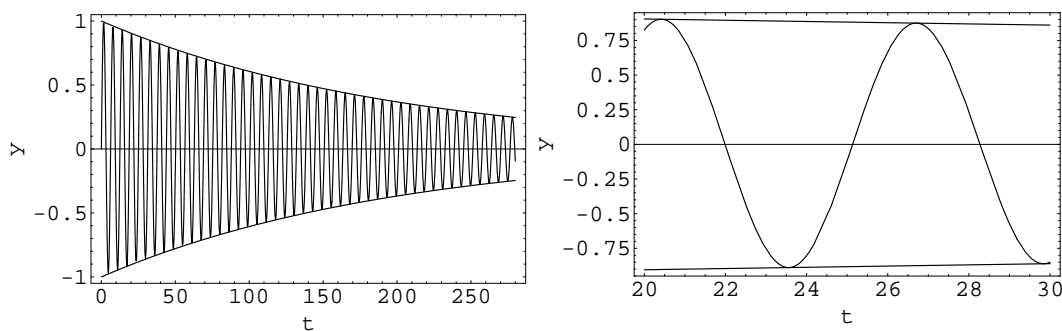


FIGURE 3 – Solution de l'oscillateur amorti  $\bar{y} = e^{-\varepsilon \bar{t}/2} \sin(\bar{t})$ . A gauche la décroissance lente par frottement  $e^{-\varepsilon \bar{t}/2}$ , à droite, à l'échelle de la pulsation  $\sin(\bar{t})$ , l'amplitude varie peu de  $e^0$  à  $e^{-\varepsilon \pi}$ .

On va écrire cette équation comme un bilan d'énergie cinétique  $\bar{y}'^2/2$  et potentielle  $\bar{y}^2/2$ , pour cela, on multiplie par la vitesse  $\bar{y}'$  et on intègre en temps, or comme on a  $\bar{y}'\bar{y} = (\bar{y}^2/2)'$  et  $\bar{y}'\bar{y}'' = (\bar{y}'^2/2)'$ , l'équation devient :

$$\frac{d}{d\bar{t}}(\bar{y}'^2/2 + \bar{y}^2/2) = -\varepsilon \bar{y}'^2.$$

Comme on en cherche une solution de la forme  $\bar{y} = A(\bar{t}) \sin(\bar{t})$  où  $A$  varie lentement, on peut dire que sur une période la moyenne de  $\bar{y}$  est nulle. Sur cette même période la moyenne de son carré  $\langle \bar{y}^2 \rangle$  est  $A(\bar{t})^2 \langle \sin^2(\bar{t}) \rangle$  car  $A$  n'a pas eu le temps de varier sur un temps si court et que comme  $\langle \sin^2(\bar{t}) \rangle = 1/2$ , la moyenne de  $\langle \bar{y}^2 \rangle = \frac{A^2}{2}$ . En effet on sait que puisque  $\sin^2 \bar{t} = (1 - \cos 2\bar{t})/2$ , la moyenne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \bar{t} d\bar{t} = \frac{1}{4\pi} [\bar{t} + \frac{1}{2} \sin 2\bar{t}]_0^{2\pi} = \frac{2\pi + 0}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

soit donc la moyenne de  $\langle \bar{y}^2 \rangle$  est bien  $\frac{A^2}{2}$ , De même  $\bar{y}' \sim A \cos(\bar{t})$  car l'amplitude varie peu sur un temps pas trop long, donc  $\langle \bar{y}'^2 \rangle = \frac{A^2}{2}$ . La moyenne de l'équation différentielle est donc écrite sous la forme d'une décroissance lente (par rapport à l'oscillation) de l'énergie (on a subrepticement permuté  $d/d\bar{t}$  et  $\langle \rangle$ , mais c'est cohérent avec la lenteur supposée) :

$$\langle \frac{d}{d\bar{t}}(\bar{y}'^2/2 + \bar{y}^2/2) \rangle = -\varepsilon \langle \bar{y}'^2 \rangle \text{ soit } \frac{d}{d\bar{t}}(A^2/4 + A^2/4) = -\varepsilon A^2/2.$$

la partie lentement variable varie donc de la manière suivante :

$$\frac{d}{d\bar{t}}(A^2) = -\varepsilon A^2.$$

on en déduit qu'en fait il faut utiliser, par moindre dégénérescence, une nouvelle variable  $\bar{t}_1 = \varepsilon \bar{t}$  et donc  $\frac{d}{dt} = \varepsilon \frac{d}{d\bar{t}_1}$ , ainsi :

$$\frac{d}{d\bar{t}_1}(A^2) = -A(\bar{t}_1)^2 \quad \text{donc } A(\bar{t}_1) = e^{-\bar{t}_1/2}.$$

On peut donc interpréter la solution comme étant une fonction de deux temps : le temps normal  $\bar{t}$  et le temps lent  $\bar{t}_1$ . La solution pertinente de l'équation est donc bien

$$\bar{y} = e^{-\varepsilon \bar{t}/2} \sin(\bar{t}) + \dots$$

## 3.2 Méthode des Amplitudes Lentement Variables

### 3.2.1 Mise en oeuvre dans le cas de l'oscillateur amorti

Conceptuellement, il s'agit exactement de la méthode précédente mais généralisée sans invoquer de bilan d'énergie. On l'appelle aussi "Méthode de la Moyenne" (*averaging method*). Posons l'équation sous la forme

$$\bar{y}'' + \bar{y} = \varepsilon F(\bar{y}'), \quad \text{avec } F(\bar{y}') = -\bar{y}'.$$

le membre de gauche est l'oscillateur initial, la partie oscillante de l'équation, le membre de droite est un terme source ou frein, assez petit. Dans le cas particulier que l'on a étudié c'est  $-\bar{y}'$ , ce peut être une fonction quelconque  $F(\bar{y}, \bar{y}')$ . Posons la solution sous la forme d'une somme des fonctions solutions de l'équation sans second membre avec des coefficients variables. Mais on va supposer que ces coefficients varient très très peu en temps à l'échelle de la pulsation :

$$\bar{y} = A(\bar{t}) \sin(\bar{t}) + B(\bar{t}) \cos(\bar{t}),$$

on en déduit les dérivées successives sans approximation pour l'instant

$$\bar{y}' = A(\bar{t}) \cos(\bar{t}) - B(\bar{t}) \sin(\bar{t}) + A'(\bar{t}) \sin(\bar{t}) + B'(\bar{t}) \cos(\bar{t})$$

$$\bar{y}'' = -A(\bar{t}) \sin(\bar{t}) - B(\bar{t}) \cos(\bar{t}) + 2A'(\bar{t}) \cos(\bar{t}) - 2B'(\bar{t}) \sin(\bar{t}) + A''(\bar{t}) \sin(\bar{t}) + B''(\bar{t}) \cos(\bar{t}).$$

d'où pour la partie oscillante (membre de gauche) il reste uniquement la partie variable des fonctions  $A$  et  $B$  :

$$\bar{y}'' + \bar{y} = 2A'(\bar{t}) \cos(\bar{t}) - 2B'(\bar{t}) \sin(\bar{t}) + A''(\bar{t}) \sin(\bar{t}) + B''(\bar{t}) \cos(\bar{t})$$

et pour la partie source (membre de droite)

$$\varepsilon F(\bar{y}') = -\varepsilon(A(\bar{t}) \cos(\bar{t}) - B(\bar{t}) \sin(\bar{t}) + A'(\bar{t}) \sin(\bar{t}) + B'(\bar{t}) \cos(\bar{t})).$$

A partir de maintenant, on va considérer que  $A$  et  $B$  varient plus lentement que  $\cos$  et  $\sin$ , donc  $A'$  et  $B'$  sont "petits" et  $A''$  et  $B''$  sont encore plus petits. On néglige donc de manière *ad hoc* les termes en  $A''$  et  $B''$ . On a donc à trouver  $A$  et  $B$  tels que :

$$2A'(\bar{t}) \cos(\bar{t}) - 2B'(\bar{t}) \sin(\bar{t}) = -\varepsilon(A(\bar{t}) \cos(\bar{t}) - B(\bar{t}) \sin(\bar{t}) + A'(\bar{t}) \sin(\bar{t}) + B'(\bar{t}) \cos(\bar{t})).$$

Pour trouver  $A$  et  $B$  on "projette" sur la base solution des fonction cosinus et sinus. On multiplie par  $\cos(\bar{t})$  le problème et on l'intègre de 0 à  $2\pi$ . On va ainsi utiliser les propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\bar{t}) d\bar{t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\bar{t}) d\bar{t} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\bar{t}) \cos(\bar{t}) d\bar{t} = 0,$$

pour éliminer certains termes et extraire deux EDO sur  $A$  et  $B$ . On regarde donc terme à terme le membre de droite (la source). On extrait d'abord  $A$  en supposant que  $A(\bar{t})$  varie peu :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\bar{t}) \cos^2(\bar{t}) d\bar{t} \simeq \frac{1}{2\pi} A(\bar{t}) \int_0^{2\pi} \cos^2(\bar{t}) d\bar{t} = A(\bar{t}) \frac{1}{2}$$

de même  $B$  varie peu

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(\bar{t}) \cos(\bar{t}) \sin(\bar{t}) d\bar{t} \simeq \frac{B(\bar{t})}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\bar{t}) \sin(\bar{t}) d\bar{t} = 0$$

de même pour  $A'$ , reste donc  $B'$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B'(\bar{t}) \cos^2(\bar{t}) d\bar{t} \simeq \frac{1}{2\pi} B'(\bar{t}) \int_0^{2\pi} \cos^2(\bar{t}) d\bar{t} = B'(\bar{t}) \frac{1}{2}$$

On trouve en faisant la même chose pour le membre de gauche  $2A'(t)(1/2)$ . En intégrant cette fois après avoir multiplié par  $\sin(\bar{t})$  les deux membres on va trouver l'équation pour  $B'$ . En réunissant tout cela on obtient le système approché issu du problème

$$2A'(t) = -\varepsilon(A(\bar{t}) + B'(\bar{t})) \text{ et } -2B'(t) = \varepsilon(B(\bar{t}) - A'(\bar{t})).$$

Par substitution de  $B'$  dans  $2A'$  on voit que le terme dominant est en fait au premier ordre en  $\varepsilon$  :

$$2A'(t) = -\varepsilon A(\bar{t}) \text{ et } -2B'(t) = \varepsilon B(\bar{t}).$$

Arrivés à ce point on constate que  $A'$  et  $B'$  sont  $O(\varepsilon)$ , donc que  $A''$  et  $B''$  sont  $O(\varepsilon^2)$ , ce qui nous permet de vérifier *a posteriori* nos hypothèses initiales de variations lentes des amplitudes  $A$  et  $B$  par rapport à  $\cos$  et  $\sin$ . On obtient bien deux exponentielles décroissantes, et la solution correspondant aux C.L. est bien

$$e^{-\varepsilon\bar{t}/2} \sin(\bar{t}).$$

Bien entendu on retrouve le développement de la solution exacte.

### 3.2.2 Généralisation

L'écriture avec un terme source  $F$  nous fait généraliser à :

$$\bar{y}'' + \bar{y} = \varepsilon F(\bar{y}', \bar{y}),$$

ce qui permet d'extraire les équations d'amplitude en  $A$  et  $B$  par moyennes sur une période :

$$A'(t) = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(y'(\bar{t}), \bar{y}(\bar{t})) \cos(\bar{t}) d\bar{t}, \text{ et } -B'(t) = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(y'(\bar{t}), \bar{y}(\bar{t})) \sin(\bar{t}) d\bar{t} \quad (5)$$

ce qui constitue l'essence de la "Méthode des Amplitudes Lentement Variables" (voir par exemple [16] pour des exemples).

On pourrait s'arrêter à ce point, cette formule est en fait suffisante pour beaucoup d'applications (mais qui nécessitent un oscillateur!), nous allons en fait la retrouver en étant plus rigoureux dans la démarche. La manière de quantifier la faible variation de  $A$  et  $B$  est précisée par la "Méthode des Échelles Multiples" que nous allons voir maintenant. La méthode que nous allons présenter est plus générale et n'a pas besoin d'oscillateurs, elle peut englober la méthode des développements asymptotiques raccordés.



## 4 Méthode des Échelles Multiples

### 4.1 Développement

A la lumière des exemples précédents, on va construire la méthode des échelles multiples. Cette méthode rationalise l'approximation des Amplitudes Lentement Variables. Formellement, elle consiste à chercher une solution  $f(t, \varepsilon)$  dans le domaine où  $O(t) \leq 1/\varepsilon^M$  sous forme de développement asymptotique en échelles multiples  $t_0, t_1, \dots, t_M$  (considérées comme des variables indépendantes) :

$$f(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^M \varepsilon^n f_n(t_0, t_1, t_2, \dots, t_M) + O(\varepsilon t_M)$$

avec  $t_0 = t, t_1 = \varepsilon t, t_2 = \varepsilon^2 t, \dots, t_M = \varepsilon^M t$ . Les fonctions  $f_n$  vérifient des équations aux dérivées partielles dont les solutions sont telles que :

- elles doivent être telles que  $f$  vérifie les conditions limites imposées.
- le développement asymptotique doit être uniformément valable pour  $O(t) \leq 1/\varepsilon^M$ , *i.e.*  $|f_{n+1}/f_n|$  reste borné pour  $O(t) \leq 1/\varepsilon^M$  (chaque approximation ne doit pas être plus singulière que la précédente).

### 4.2 Exemple : Oscillateur faiblement amorti

#### 4.2.1 Echelles

Nous illustrons la méthode sur l'exemple de l'oscillateur faiblement amorti, étudié précédemment. On considère donc le problème déjà posé dans le quel on supprimera les "—" dans la suite. On introduit les échelles de temps :

$$t_0 = t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \dots$$

en fait par la suite on met systématiquement  $t_0 = t$  pour simplifier la notation. On cherche la solution  $y(t, \varepsilon)$  sous la forme :

$$y = y_0(t_0, t_1, t_2, \dots, t_M) + \varepsilon y_1(t_0, t_1, t_2, \dots, t_M) + \dots + \varepsilon^M y_M(t_0, t_1, t_2, \dots, t_M) + O(\varepsilon t_M)$$

Prenons le temps d'ordre 1 :  $t = O(1)$ . Il suffit d'une seule échelle de temps  $t$  pour résoudre le problème. On obtient comme précédemment  $y_0$  solution du problème

$$y_0'' + y_0 = 0, \quad y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1.$$

On en déduit  $y_0 = \sin(t)$  et  $y = \sin(t) + O(\varepsilon t)$ .

Prenons le temps plus grand,  $t = O(1/\varepsilon)$ . On introduit alors deux échelles de temps  $t$  (en fait  $t_0$ ) et  $t_1 = \varepsilon t$  et on cherche  $y$  sous la forme :

$$y = y_0(t_0, t_1) + \varepsilon y_1(t_0, t_1) + O(\varepsilon t_1)$$

#### 4.2.2 Dérivées

Les opérations de dérivation s'écrivent par la règle de dérivation en "chaîne" :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial t_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial t_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_1}$$

qui est puisque  $t_0 = t$  et  $t_1 = \varepsilon t$ , et ainsi  $\frac{\partial t_0}{\partial t} = 1$  et  $\frac{\partial t_1}{\partial t} = \varepsilon$  :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1}$$

et pour la dérivée seconde, par élévation au carré simple ( $\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} = (\frac{d}{dt})^2$ ) et en ne retenant que les deux premiers termes

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} + \dots$$

donc la dérivée de  $y$  en ne retenant que les deux premiers termes

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y_0}{\partial t_0} + \varepsilon \left( \frac{\partial y_1}{\partial t_0} + \frac{\partial y_0}{\partial t_1} \right) + o(\varepsilon)$$

puis la dérivée seconde de même :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0^2} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0 \partial t_1} \right) + o(\varepsilon).$$

### 4.2.3 C. L.

L'écriture des conditions initiales en  $t = 0$  donne :  $\frac{dy}{dt} = 1$  donc

$$\frac{\partial y_0}{\partial t_0}(0, 0) + \varepsilon \left( \frac{\partial y_1}{\partial t_0}(0, 0) + \frac{\partial y_0}{\partial t_1}(0, 0) \right) + o(\varepsilon) = 1$$

et  $y = 0$  donc

$$y_0(0, 0) + \varepsilon y_1(0, 0) + o(\varepsilon) = 0.$$

Cela donne :

$$\frac{\partial y_0}{\partial t_0}(0, 0) = 1, \quad y_0(0, 0) = 0, \quad \text{et à l'ordre suivant} \quad \frac{\partial y_1}{\partial t_0}(0, 0) = -\frac{\partial y_0}{\partial t_1}(0, 0), \quad y_1(0, 0) = 0.$$

### 4.2.4 Rang zéro

On obtient à l'ordre  $O(1)$  un problème analogue au précédent pour  $y_0$  :

$$y_0'' + y_0 = 0$$

Mais la différence est que  $y_0$  est maintenant fonction de deux variables et les dérivées intervenant dans l'équation sont des dérivées partielles par rapport à  $t_0$ . On peut considérer  $t_1$  comme un paramètre libre. La solution est de la forme :

$$y_0 = A_0(t_1) \sin(t_0) + B_0(t_1) \cos(t_0).$$

avec  $A_0$  et  $B_0$  fonctions de  $t_1$  qui restent à déterminer. L'écriture des conditions initiales donne :

$$1 = \frac{\partial y_0}{\partial t_0}(0, 0) + \varepsilon \left( \frac{\partial y_1}{\partial t_0}(0, 0) + \frac{\partial y_0}{\partial t_1}(0, 0) \right) + o(\varepsilon) \quad \text{et} \quad 0 = y_0(0, 0) + \varepsilon y_1(0, 0) + \dots$$

donc  $A_0(0) = 1$  et  $B_0(0) = 0$ . A l'ordre suivant,  $O(\varepsilon)$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0^2} + y_1 = -\left( \frac{\partial y_0}{\partial t_0} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0 \partial t_1} \right), \quad y_1(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial t_0}(0, 0) = -\frac{\partial y_0}{\partial t_1}(0, 0).$$

En substituant l'expression de  $y_0$ ,

$$\frac{\partial y_0}{\partial t_0} = A_0(t_1) \cos(t_0) - B_0(t_1) \sin(t_0), \quad \text{et ensuite} \quad 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0 \partial t_1} = 2 \partial_{t_1} A_0(t_1) \cos(t_0) - 2 \partial_{t_1} B_0(t_1) \sin(t_0),$$

le problème vérifié par  $y_1$  devient :

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0^2} + y_1 = (B_0(t_1) + 2 \frac{dB_0}{dt_1}(t_1)) \sin(t_0) - (A_0(t_1) + 2 \frac{dA_0}{dt_1}(t_1)) \cos(t_0),$$

$$y_1(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial t_0}(0, 0) = -\frac{dB_0}{dt_1}(0).$$

Les termes séculaires (les termes qui ne sont pas bornés en temps) proviennent des termes résonants du second membre, *i.e.* les termes en *sint* et *cost* de même pulsation que l'oscillateur. Pour que le développement en échelles multiples soit borné à l'infini il faut donc éliminer ces termes. Ce sont les

termes séculaires. On impose alors leur annulation (on parle aussi de condition de solvabilité *solvability condition* :

$$A_0(t_1) + 2dA_0/dt_1(t_1) = 0, \text{ d'où } A_0(t_1) = a_0 e^{-t_1/2}, \quad A_0(0) = 1$$

et

$$B_0(t_1) + 2dB_0/dt_1(t_1) = 0, \text{ d'où } B_0(t_1) = b_0 e^{-t_1/2}, \quad B_0(0) = 0$$

$y_0$  est donc complètement déterminé :  $y_0 = e^{-t_1/2} \sin(t_0)$ .

Le rang 0 nous donne donc bien le bon morceau de la solution exacte  $e^{-t_1/2} \sin(t_0) = e^{-\varepsilon t/2} \sin(t)$ , c'est bien que l'on avait obtenu approximativement par la méthode des Amplitudes Lentement Variables. Avant de mettre en oeuvre la méthode sur d'autres exemples voyons ce qui se passe pour les ordres suivants.

#### 4.2.5 Rang un

Passons à l'ordre suivant, la résolution du problème nous donne :

$$y_1 = A_1(t_1) \sin(t_0) + B_1(t_1) \cos(t_0).$$

Les conditions initiales donnent  $A_1(0) = 0$  et  $B_1(0) = 0$ , ce qui ne détermine pas complètement  $y_1$  mais les informations obtenues sont suffisantes pour le développement cherché. On rappelle que ce développement doit être tel que

$$y - (y_0 + \varepsilon y_1) = o(\varepsilon) \text{ pour } t_0 = O(1)$$

$$y - (y_0 + \varepsilon y_1) = o(1) \text{ pour } t_0 = O(1/\varepsilon)$$

La deuxième relation est automatiquement vérifiée car  $y_1$  est bornée. La première montre qu'il suffit de connaître le terme d'ordre 1 de  $y_1$  pour  $t = O(1)$ . Il suffit donc de redévelopper  $y_1$  à  $t$  fixé en ne retenant que les termes d'ordre 1 :

$$y_1 = A_1(\varepsilon t) \sin(t) + B_1(\varepsilon t) \cos(t) = A_1(0) \sin(t) + B_1(0) \cos(t) + o(1) = 0 + o(1)$$

Le développement de  $y$  est :

$$y = e^{-\varepsilon t/2} \sin t + O(\varepsilon^2 t)$$

valable dans tout le domaine  $O(t) \leq 1/\varepsilon$ .

#### 4.2.6 Méthode des échelles multiples au rang suivant : trois échelles de temps

On va étudier l'ordre suivant... il faut faire intervenir les trois échelles de temps :  $t_0, t_1 = \varepsilon t$ , et aussi  $t_2 = \varepsilon^2 t$ ... On reprend en fait exactement l'analyse précédente, mais avec ces trois temps.

La dérivée (prise en chaîne) pour les trois temps

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial t_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial t_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial t_2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_2}$$

s'écrit en somme des puissances des dérivées

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}$$

ce qui fait que Nayfeh a appelé cette méthode "derivative expansion method". Les opérations de dérivation s'écrivent pour la dérivée de  $y$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y_0}{\partial t_0} + \varepsilon \left( \frac{\partial y_1}{\partial t_0} + \frac{\partial y_0}{\partial t_1} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial y_2}{\partial t_0} + \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial t_2} \right) + o(\varepsilon^2)$$

puis la dérivée seconde :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0^2} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0 \partial t_1} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_0^2} + 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0 \partial t_1} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0 \partial t_2} \right) + o(\varepsilon^2).$$

Le problème à l'ordre 1 est toujours le même, mais il y a le nouveau temps  $t_2$ , qui apparaît comme "0" supplémentaire :

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0^2} + y_0 = 0, \quad y_0(0, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial y_0}{\partial t_0}(0, 0, 0) = 1$$

La solution est toujours :  $y_0 = A_0(t_1, t_2) \sin t_0 + B_0(t_1, t_2) \cos t_0$  avec un "slot" supplémentaire pour les constantes d'intégration, qui dépendent toujours de  $t_1$  et maintenant de  $t_2$ . Pris au temps initial :  $A_0(0, 0) = 1$  et  $B_0(0, 0) = 0$ .

Le problème à l'ordre  $\varepsilon$ , est encore le même, bien sûr, avec  $t_2$  :

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0^2} + y_1 = -\left(\frac{\partial y_0}{\partial t_0} + 2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0 \partial t_1}\right), \quad y_1(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial t_0}(0, 0, 0) = -\frac{\partial y_0}{\partial t_1}(0, 0, 0).$$

on y substitue  $y_0$  et on factorise les  $\cos(t_0)$  et  $\sin(t_0)$  :

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0^2} + y_1 = (B_0(t_1, t_2) + 2\frac{\partial B_0}{\partial t_1}(t_1, t_2)) \sin t_0 - (A_0(t_1, t_2) + 2\frac{\partial A_0}{\partial t_1}(t_1, t_2)) \cos t_0.$$

L'annulation des termes séculaires donne (même calcul que déjà fait, il n'y a que le  $t_2$  en plus qui joue dans les constantes d'intégration en  $t_1$  que sont les fonctions  $a_0$  et  $b_0$  de notre nouveau  $t_2$ ) :

$$A_0(t_1, t_2) = a_0(t_2)e^{-t_1/2} \quad \text{et} \quad B_0(t_1, t_2) = b_0(t_2)e^{-t_1/2}.$$

avec  $A_0(0, 0) = 1$  et  $B_0(0, 0) = 0$

Le problème à l'ordre 2 rajoute des termes sources et un terme à la dérivée en 0 :

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t_0^2} + y_2 = -\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0} + 2\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0 \partial t_1} + \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + 2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0 \partial t_2} + 2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2}\right), \quad y_2(0, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial y_0}{\partial t_2}(0, 0, 0) + \frac{\partial y_1}{\partial t_1}(0, 0, 0) + \frac{\partial y_2}{\partial t_0}(0, 0, 0) = 0.$$

De même, on substitue  $y_0$  et  $y_1$  calculés précédemment et on factorise les  $\cos(t_0)$  et  $\sin(t_0)$  : les termes séculaires obtenus sont de nouveau imposés à 0 :

$$(B_1(t_1, t_2) + 2\frac{\partial B_1}{\partial t_1}(t_1, t_2)) + e^{-t_1/2}(b_0 - 8\frac{da_0}{dt_2}) = 0$$

$$(A_1(t_1, t_2) + 2\frac{\partial A_1}{\partial t_1}(t_1, t_2)) + e^{-t_1/2}(a_0 + 8\frac{db_0}{dt_2}) = 0$$

et on résout pour  $A_1$  et  $B_1$  en intégrant ce qui donne

$$y_1 = (a_1(t_2)e^{-t_1/2} + (\frac{b_0(t_2)}{8} - \frac{da_1(t_2)}{dt_2}t_1e^{-t_1/2}) \sin t_0 + (b_1(t_2)e^{-t_1/2} - (\frac{a_0(t_2)}{8} + \frac{db_0(t_2)}{dt_2}t_1e^{-t_1/2}) \cos t_0$$

C'est ici que l'on regarde le rapport des amplitudes :

$$\frac{|\varepsilon y_1|}{|y_0|} = \frac{\varepsilon e^{-t_1/2} \sqrt{(a_1(t_2) + (\frac{b_0(t_2)}{8} - \frac{da_1(t_2)}{dt_2}t_1))^2 + (b_1(t_2) - (\frac{a_0(t_2)}{8} + \frac{db_0(t_2)}{dt_2}t_1))^2}}{e^{-t_1/2} \sqrt{a_0^2 + b_0^2}}$$

ce terme devient  $O(1)$  pour  $t_1 = O(1/\varepsilon)$  donc

$$\frac{b_0(t_2)}{8} = -\frac{da_1(t_2)}{dt_2} \quad \text{et} \quad \frac{a_0(t_2)}{8} = \frac{db_0(t_2)}{dt_2}$$

donc  $a_0 = \cos t_2/8$  et  $b_0 = -\sin t_2/8$ . Ceci détermine complètement  $y_0$

$$y_0 = e^{-t_1/2}(\cos(t_2/8) \sin t_0 - \sin(t_2/8) \cos t_0)$$

ou encore, en factorisant  $(\cos(t_2/8) \sin t_0 - \sin(t_2/8) \cos t_0) = \sin(t_0 - (t_2/8))$  et avec le temps  $t$

$$y_0 = e^{-\varepsilon t/2} \sin((1 - \varepsilon^2/8)t).$$

On peut continuer en utilisant toutes les conditions aux limites et trouver  $y_1 = 0$  puis trouver  $y_2 = \frac{1}{8} \sin t_0$ . On regroupe alors  $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$ , ce qui nous donne le développement à l'ordre 2 pour les trois temps :

$$y = e^{-t_1/2} \sin(t_0 - (t_2/8)) + 0\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{8} \sin t_0 + \dots$$

On réécrit avec  $t$  le développement valable jusqu'à  $t = O(1/\varepsilon^2)$  :

$$y = e^{-\varepsilon t/2} \sin\left(\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8}\right)t\right) + \frac{\varepsilon^2}{8} \sin t + O(\varepsilon^3 t)$$

Il voit que le terme d'ordre  $\varepsilon$  a modifié aussi la fréquence et l'amplitude en plus de la décroissance exponentielle. Bien entendu, cette forme est bien le développement de la solution exacte :

$$y_{exacte} = e^{-\varepsilon t/2} \frac{\sin\left(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} t\right)}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}}$$

### 4.3 Exemple : le problème de Friedrichs

#### 4.4 Friedrichs lent, rapide

Reprenons l'équation différentielle modèle de Friedrichs  $y(x)$  que nous avons déjà longuement examinée avec la méthode des développements asymptotiques raccordés :

$$\varepsilon y'' + y' = \frac{1}{2}, \quad y(x=0) = 0 \quad y(x=1) = 1,$$

en fait, on constate que cette équation est posée avec la variable lente qui est ici  $x$ , on faisait un changement de variable pour passer en variable locale rapide,  $\tilde{x} = x/\varepsilon$  (la variable interne de couche limite).

La méthode des échelles multiples, est conçue pour les échelles rapides, perturbées aux échelles longues. Mais pour cela, récrivons l'équation qui est écrite dans la variable lente  $x$  dans la variable rapide, disons  $\tilde{x} = x/\varepsilon$  (on sait déjà que c'est la bonne jauge). Les conditions aux limites sont  $y(\tilde{x}=0) = 0$  et  $y(x=1) = 1$  :

$$\varepsilon \varepsilon^{-2} \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} y + \varepsilon^{-1} \frac{d}{d\tilde{x}} y = \frac{1}{2}, \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} y + \frac{d}{d\tilde{x}} y = \frac{\varepsilon}{2}.$$

C'est cette dernière équation  $\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} y + \frac{d}{d\tilde{x}} y = \frac{\varepsilon}{2}$  que nous cherchons à résoudre. Ce problème n'est pas avec des solutions oscillantes, on ne peut pas appliquer la méthode de moyenne (ou Amplitudes Lentement Variables).

#### 4.5 Friedrichs rapide, lent

Repassons en variable  $t$  pour appliquer la méthode à la lettre. Equation que nous cherchons à résoudre :

$$\frac{d^2}{dt^2} y + \frac{d}{dt} y = \frac{\varepsilon}{2}$$

écrite dans la variable rapide  $t$  qui est aussi  $t_0$ . Les conditions aux limites sont  $y(t_1=0) = 0$  et  $y(t_1=1) = 1$ , la condition finale est donné pour la variable lente  $t_1$ .

Cherchons maintenant le développement ( $t$  est bien  $t_0$ )

$$y = y_0(t_0, t_1) + \varepsilon y_1(t_0, t_1) + \dots$$

dérivons une et deux fois :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}y &= \frac{\partial}{\partial t_0}y_0 + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t_1}y_0 + \frac{\partial}{\partial t_0}y_1\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}y &= \frac{\partial^2}{\partial t_0^2}y_0 + \varepsilon\left(2\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_0}y_0 + \frac{\partial^2}{\partial t_0^2}y_1\right) + \dots\end{aligned}$$

Au premier ordre on a à résoudre :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0^2}y_0 + \frac{\partial}{\partial t_0}y_0 = 0,$$

la condition en  $t = 0$  s'écrit  $y_0(t_0 = 0, t_1 = 0) = 0$  et en  $t = 1/\varepsilon$  est  $t_1 = 1$ , s'écrit  $y_0(t_0 = \infty, t_1 = 1) = 1$ . La solution de ce premier problème est

$$y_0 = A_1(t_1) + A_2(t_1)e^{-t_0},$$

avec  $A_1(0) + A_2(0) = 0$  et  $A_1(1) + 0 = 1$ .

Passons à l'ordre suivant :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0^2}y_1 + \frac{\partial}{\partial t_0}y_1 = -2\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_0}y_0 - \frac{\partial}{\partial t_1}y_0 - \frac{1}{2}.$$

Substituons

$$-2\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_0}y_0 = -2(0 - A_2'e^{-t_0}), \quad \text{et} \quad -\frac{\partial}{\partial t_1}y_0 = -A_1' - A_2'e^{-t_0}$$

soit l'équation forcée pour  $y_1$  :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0^2}y_1 + \frac{\partial}{\partial t_0}y_1 = -A_1' + A_2'e^{-t_0} + \frac{1}{2}$$

on peut résoudre pour  $y_1$ , l'équation sans second membre donne  $B_1(t_1) + B_2(t_1)e^{-t_0}$  le terme  $-A_2'e^{-t_0}$  va donner un terme en  $t_0A_2'e^{-t_0}$ , les deux derniers vont s'intégrer en :  $t_0(-A_1' + \frac{1}{2})$ . Ces termes sont "séculaires", on posera donc :

$$(-A_1' + \frac{1}{2}) = 0 \quad \text{et} \quad A_2' = 0.$$

$A_1$  s'intègre et compte tenu du fait que  $A_1(1) = 1$  :

$$A_1(t_1) = \frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}$$

de même pour  $A_2$  qui est donc constant et vaut  $A_2(0)$  encore inconnu (certains auteurs (Bender Orzag) invoquent que ce terme séculaire est sans danger car  $t_0e^{-t_0}$  tend vers 0, et qu'il n'est donc pas la peine d'imposer  $A_2' = 0$  car seule la valeur en 0 intervient ici). La solution :

$$y = \frac{t_1}{2} + \frac{1}{2} + A_2(0)e^{-t}$$

la condition en 0 est  $y(0) = 0$  donc  $0 = \frac{1}{2} + A_2(0)$ . Ce qui donne enfin la solution :

$$y = \frac{t_1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t_0} = \frac{t_1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t_1/\varepsilon} = \varepsilon\frac{t}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

on retrouve bien la solution composite du problème qui donne la solution extérieure et la solution intérieure lorsque l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0 en gardant  $t_1$  ou  $t_0$  :

$$y_{ext} = \frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \quad y_{int} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t_0}.$$

Les deux méthodes (Echelles Multiples, Développements asymptotiques Raccordés, puis aussi WKB *cf* plus loin) donnent bien le même résultat.

## 4.6 Exemple : le problème de Cole

### 4.6.1 Equations

Reprenons le fameux problème de Cole dans ses cours et dans [10]. C'est un oscillateur de masse  $m$  faible, de raideur  $k$  et d'amortissement  $\beta$ , au temps  $t = 0$  on lui fournit une impulsion  $P_0$ . Les équations sont :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

avec  $y(0) = 0$  et  $m \frac{dy}{dt}(0) = P_0$ .

### 4.6.2 Adimensionnement, point de vue lent

On note  $Y$  la grandeur caractéristique de l'amplitude des oscillations et  $\tau$  celle de la période. On introduit alors les variables sans dimension  $\bar{y} = y/Y$  et  $\bar{t} = t/\tau$ . L'équation et les conditions initiales en variables adimensionnelles deviennent :

$$m\tau^{-2}k^{-1} \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} + \beta\tau^{-1}k^{-1} \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} + \bar{y} = 0$$

$$\bar{y}(0) = 0, \text{ et } mY\tau^{-1} \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}(0) = P_0.$$

La vitesse initiale étant donnée, on choisit  $Y$  et  $\tau$  tels que  $mY/\tau = P_0$ .

Le deuxième choix est fait au niveau du temps caractéristique. Dans le cas d'un oscillateur de faible masse, il est fortement amorti, les oscillations sont régies par un équilibre entre frottement et raideur. On choisit donc  $\tau = \beta/k$  au lieu du temps d'oscillation  $\sqrt{m/k}$ .

Les deux grandeurs caractéristiques sont donc choisies comme il suit :

$$\tau = \beta/k \text{ temps caractéristique de l'amortissement}$$

$$Y = P_0/(\beta) \text{ longueur qui normalise la condition initiale}$$

Avec ce choix des dimensions caractéristiques, le problème non-dimensionnel devient : quand la masse est faible (liée à  $\varepsilon = mk/\beta^2$ , on a bien temps d'oscillation  $\sqrt{m/k}$  très petit par rapport à  $\beta/k$ , donc  $m/k \ll \beta^2/k^2$  donc  $\varepsilon \ll 1$ .)

on retrouve l'équation différentielle modèle de Cole  $y(t)$  que nous avons déjà longuement examinée avec la méthode des développements asymptotiques raccordés :  $E_\varepsilon = 0$  sans dimension ("Cole" problem [13] p 40) :

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \varepsilon y'(0) = 1.$$

Le problème tel quel est en fait posé avec la variable lente qui est ici notée  $t$ .

### 4.6.3 Adimensionnement, point de vue rapide

On vient de voir le point de vue de la variable lente. Repassons en variable  $t$  pour appliquer la méthode à la lettre. Mais pour cela, réécrivons l'équation qui est écrite dans la variable lente  $t_1$  dans la variable rapide, disons  $t = t_1/\varepsilon$  (on sait déjà que c'est la bonne jauge). On faisait un changement de variable pour passer en variable locale rapide,  $t/\varepsilon$  (la variable interne de couche limite).

Les conditions aux limites sont  $y(t_1 = 0) = 0$  et  $y'(t_1 = 0) = 1$  :

$$\varepsilon \frac{d^2}{dt_1^2} y + \frac{d}{dt_1} y + y = 0, \text{ ce qui donne } \frac{d^2}{dt^2} y + \frac{d}{dt} y + \varepsilon y = 0.$$

C'est cette dernière équation  $\frac{d^2}{dt^2} y + \frac{d}{dt} y + \varepsilon y = 0$  que nous cherchons à résoudre.

On aurait pu dès le départ se placer dans ce cadre : en fait, du point de vue de la méthode des échelles multiples, il y a plutôt un temps court associé au départ, et un temps lent associé à l'amortissement du retour élastique. le temps est alors  $\tau = m/\beta$  et  $Y = P_0/(\beta)$ . Le terme de raideur a un poids relatif  $k/(m/\tau^2) = mk/\beta^2$ , qui est bien  $\varepsilon$ .

On a alors  $\frac{d^2}{dt^2} y + \frac{d}{dt} y + \varepsilon y = 0$  et  $y'(0) = 1$

#### 4.6.4 Solution en échelles multiples

Soit donc le problème en variables rapides

$$\frac{d^2}{dt^2}y + \frac{d}{dt}y + \varepsilon y = 0, \text{ avec comme conditions } y'(0) = 1 \quad y(0) = 0.$$

Cherchons maintenant le développement

$$y = y_0(t, t_1) + \varepsilon y_1(t, t_1) + \dots$$

dérivons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}y &= \frac{\partial}{\partial t}y_0 + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t_1}y_0 + \frac{\partial}{\partial t}y_1\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}y &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}y_0 + \varepsilon\left(2\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t}y_0 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}y_1\right) + \dots \end{aligned}$$

Au premier ordre  $\varepsilon^0$  on a à résoudre :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y_0 + \frac{\partial}{\partial t}y_0 = 0$$

la condition en  $t = 0$  s'écrit  $y_0(t = 0, t_1 = 0) = 0$  et  $y'_0(t = 0, t_1 = 0) = 1$ . La solution

$$y_0 = A_1(t_1) + A_2(t_1)e^{-t}$$

avec  $y_0 = 0$  donc  $A_1(0) + A_2(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$  donc  $-A_2(0) = 1$ . Cette solution n'est pas oscillante, on ne peut pas appliquer la méthode de moyenne (ou Amplitudes Lentement Variables).

Passons à l'ordre suivant  $\varepsilon^1$  :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y_1 + \frac{\partial}{\partial t}y_1 = -2\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t}y_0 - \frac{\partial}{\partial t_1}y_0 - y_0$$

substituons

$$-2\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t}y_0 = -2(0 - A'_2e^{-t}), \text{ et } -\frac{\partial}{\partial t_1}y_0 = -A'_1 - A'_2e^{-t}$$

soit l'équation forcée pour  $y_1$  :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y_1 + \frac{\partial}{\partial t}y_1 = -A'_1 + A'_2e^{-t} - A_1 - A_2e^{-t}$$

on peut résoudre pour  $y_1$ , l'équation sans second membre donne  $B_1(t_1) + B_2(t_1)e^{-t}$  le terme en  $(-A'_1 - A_1)$  va donner un terme en  $t(-A'_1 - A_1)$ , les termes en  $e^{-t}$  donnent du  $te^{-t}$ . Ces termes sont séculaires, on posera donc :

$$(-A'_1 - A_1) = 0 \quad \text{et} \quad A'_2 - A_2 = 0.$$

qui s'intègre avec  $A_2(0) = -1$  et  $A_1(0) = 1$  :

$$A_1(t_1) = e^{-t_1} \quad A_2(t_1) = -e^{t_1}$$

La solution finale est :

$$y = e^{-t_1} - e^{+t_1}e^{-t}$$

On a en variable  $t$  rapide :

$$y = e^{-\varepsilon t} - e^{\varepsilon t}e^{-t}$$

et pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, à  $t$  fixé, on retrouve

$$y = 1 - e^{-t}$$



et en variables  $t_1$  lente, en revanche

$$y = e^{-t_1} - e^{+t_1} e^{-t_1/\varepsilon}$$

et pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, à  $t_1$  fixé on retrouve

$$y = e^{-t_1}$$

La solution exacte est un oscillateur apériodique

$$-\frac{e^{\frac{1}{2}(-\sqrt{1-4\varepsilon}-1)t} - e^{\frac{1}{2}(\sqrt{1-4\varepsilon}-1)t}}{\sqrt{1-4\varepsilon}}$$

qui nous est utile pour comparer avec la solution approchée. Pour les petits  $\varepsilon$  cela donne

$$e^{-\varepsilon t} + e^{-t+\varepsilon t}$$

on retrouve bien

$$y = e^{-t_1} - e^{+t_1} e^{-t}$$

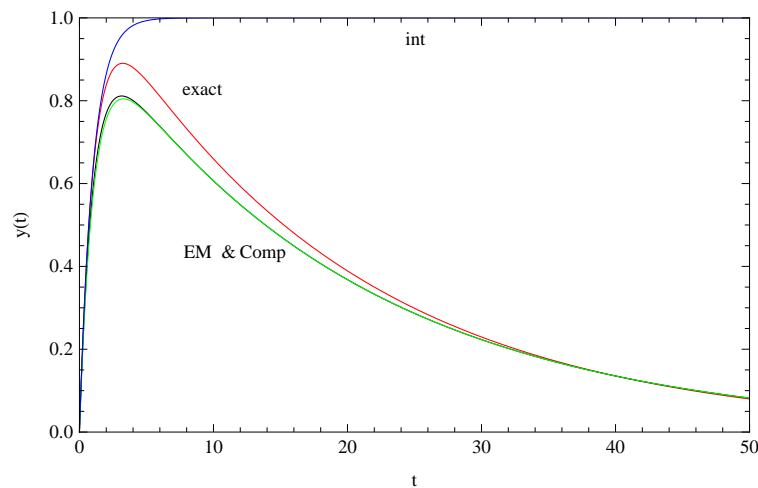


FIGURE 4 – Comparaison de la solution exacte  $(-\frac{e^{\frac{1}{2}(-\sqrt{1-4\varepsilon}-1)t} - e^{\frac{1}{2}(\sqrt{1-4\varepsilon}-1)t}}{\sqrt{1-4\varepsilon}})$  rouge, composite  $(e^{-\varepsilon t} - e^{-t})$  noire, et échelles multiples  $(e^{-\varepsilon t} - e^{\varepsilon t} e^{-t})$  vert, pour référence la solution intérieure  $(1 - e^{-t})$  bleue. Notons que la solution échelles multiples et que l'approximation composite sont quasi superposés. Ici  $\varepsilon = 0.05$ , ajouter le second ordre améliorera la solution.

- le développement composite

$$y_{comp}(t) = e^{-t} - e^{-t/\varepsilon}$$

C'est bien ce que nous avons obtenu au chapitre

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP/MAE.pdf>

## 4.7 Exemple : Oscillateur de Rayleigh et de Van der Pol

### 4.7.1 Equation de l'oscillateur de Rayleigh

Il s'agit du problème non linéaire suivant :

$$y'' - \varepsilon(1 - (y')^2)y' + y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0,$$

on voit que pour les petites vitesses, le terme de frottement est en fait un terme explosif. Au contraire pour les grandes vitesses, le terme de frottement est effectivement un frein. C'est presque le même que Van der Pol, voir plus loin.

### 4.7.2 Solution régulière

Le développement naïf en solution régulière donne l'existence d'un terme séculaire en  $t \cos(t)$  et en  $t \sin(t)$  qui rend la solution non pertinente pour les temps assez grands.

### 4.7.3 Méthode Énergétique de Feynman

En multipliant par  $y'$ , on reconnaît une croissance de l'énergie lorsque le module est inférieur à 1 ( $|y| < 1$ ), une décroissance de l'énergie si  $|y| > 1$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{y'^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) = \varepsilon(1 - y^2)y'^2$$

on va écrire que cette variation est lente en écrivant  $y = \sqrt{A(t_1)} \sin(t)$ , donc la moyenne sur la période  $2\pi$  donne  $\langle \sin^2(t) \rangle = 1/2$  et attention supposant que  $\langle y^2 y'^2 \rangle = \langle A^2 \sin^4(t) \rangle$  et comme  $\langle \sin^4(t) \rangle = 3/8$ , donc  $\langle y^2 \rangle = A/2$ ,  $\langle y'^2 \rangle = A/2$ , mais attention  $\langle y^4 \rangle = 3A^2/8$  on obtient ainsi la décroissance lente du carré de l'amplitude

$$\frac{d}{dt}(A) = \varepsilon \left( A - \frac{3}{4} A^2 \right)$$

cette croissance se fait à l'échelle  $t_1 = \varepsilon t$ , on pourrait donc écrire  $\frac{d}{dt_1}(A) = \left( A - \frac{3}{4} A^2 \right)$ . L'équation se résout en décomposant en éléments simples :

$$\frac{dA}{A} + (3/4) \frac{dA}{1 - 3A/4} = dt$$

elle se comporte en exponentielle croissante aux temps courts et sature en  $4/3$  aux temps longs :

$$A(t) = \frac{4e^{t\varepsilon} a_0^2}{3a_0^2(e^{t\varepsilon} - 1) + 4}$$

La non linéarité provoque une saturation de l'amplitude de l'exponentielle, voir la figure suivante (figure 5) représentant la solution numérique et l'enveloppe exponentielle.

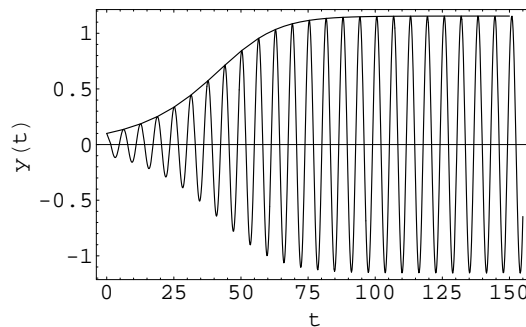


FIGURE 5 – Problème de l'oscillateur de Rayleigh :  $y'' - \varepsilon(1 - (y')^2)y' + y = 0$ ,  $y(0) = a_0$ ,  $y'(0) = 0$ . Solution exacte pour  $\varepsilon = 0.1$  et  $a_0 = 0.01$  et solution de l'équation d'enveloppe  $A$  par les méthodes ALV & Echelles Multiples.

### 4.7.4 Echelles multiples

Pour retrouver plus finement ce résultat, on applique la méthode des échelles multiples : on introduit deux échelles de temps  $t$  et  $t_1 = \varepsilon t$  et on cherche  $y$  sous la forme :

$$y = y_0(t, t_1) + \varepsilon y_1(t, t_1) + O(\varepsilon t_1)$$

A l'ordre 0 ( $\varepsilon^0$ ), on retrouve en substituant dans  $y'' - \varepsilon(1 - y^2)y' + y = 0$  l'oscillateur simple

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} + y_0 = 0, \text{ la solution est de la forme : } y_0 = A(t_1) \cos(t) + B(t_1) \sin(t).$$

avec  $A$  et  $B$  fonctions de  $t_1$  qui restent à déterminer (attention on a permuté  $A$  et  $B$  par rapport aux exemples précédents).

A l'ordre suivant ( $\varepsilon$ ), on fait apparaître  $y_1$  mais aussi les termes de dérivation liés au temps long comme  $2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t \partial t_1}$ , et les termes supplémentaires liés au frottement  $y'_0$ . On obtient en terme source de l'équation sur  $y_1$  des termes provenant de la solution  $y_0$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + y_1 = \\ & = (B(t_1) \cos(t) - A(t_1) \sin(t))(1 - (B(t_1) \cos(t) - A(t_1) \sin(t))^2) - 2 \sin(t)A'(t_1) + 2 \cos(t)B'((t_1)) \end{aligned}$$

comme on développe :

$$\sin(t)^3 = (3 \sin(t) - \sin(3t))/4 \text{ et } \cos(t)^3 = (3 \cos(t) + \cos(3t))/4$$

on peut faire apparaître des termes de forçage de fréquence 3 qui ne seront pas dangereux. Celui devant  $-\sin(3t)$  est  $\frac{1}{4}A^3 - \frac{3}{4}AB^2$  et celui devant  $-\cos(3t)$  est  $\frac{1}{4}B^3 - \frac{3}{4}A^2B$ . En revanche on fait apparaître les termes séculaires avec  $\cos(t)$  et  $\sin(t)$  que l'on annule et qui sont respectivement tels que :

$$\frac{3}{4}B^3 + \frac{3}{4}A^2B - B + 2B' = 0 \text{ resp. } -\frac{3}{4}A^3 - \frac{3}{4}B^2A + A - 2A' = 0.$$

On en déduit en multipliant le premier par  $B$  et le second par  $A$  et en soustrayant,

$$\frac{3}{4}(A^2 + B^2)^2 - (B^2 + A^2) + 2AA' + 2BB' = 0$$

puis en remarquant que l'on fait apparaître  $2AA' + 2BB'$  dérivée de  $A^2 + B^2$ , on a donc

$$\frac{d(A^2 + B^2)}{dt_1} = (A^2 + B^2) - \frac{3}{4}(A^2 + B^2)^2.$$

Si on pose  $\mathcal{A} = A^2 + B^2$  on retrouve l'équation de Landau comme (sauf que c'était approché!) dans la méthode énergétique précédente

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt_1} = \mathcal{A} - \frac{3}{4}\mathcal{A}^2.$$

On retrouve donc que l'amplitude augmente puis sature au bout d'un temps  $1/\varepsilon$  alors que la fonction oscille en  $\cos(t)$  et  $\sin(t)$ .

#### 4.7.5 Equation de l'oscillateur de Van der Pol

Il s'agit du problème non linéaire suivant :

$$y'' - \varepsilon(1 - (y)^2)y' + y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0,$$

on voit que pour les petites amplitudes, le terme de frottement est en fait un terme explosif. Au contraire pour les grandes amplitudes, le terme de frottement est effectivement un frein. Cette fois, c'est l'amplitude qui contrôle la divergence.

Dans ce cas, suivons la même démarche que pour Rayleigh. Le développement naïf en solution régulière donne :

$$a_0(\cos(t) - \varepsilon(\frac{3}{8}(t \cos(t) - \sin(t)) - \frac{1}{32}(\sin(3t) - 3 \sin(t))) + O(\varepsilon^2 t^2))$$

bien entendu, on constate l'existence d'un terme séculaire en  $(t \cos(t) - \sin(t))$  qui rend la solution non pertinente pour les temps assez grands.

Puis la méthode de l'énergie moyenne ;

$$\frac{d}{dt}(\frac{y'^2}{2} + \frac{y^2}{2}) = \varepsilon(1 - y^2)y'^2$$

avec  $y = \sqrt{A(t_1)} \sin(t)$ , donc la moyenne sur la période  $2\pi$  donne  $\langle \sin^2(t) \rangle = 1/2$  et attention supposant que  $\langle y^2 y'^2 \rangle = \langle A^2 \sin^2(t) \cos^2(t) \rangle$  et comme  $\langle \sin^2(t) \cos^2(t) \rangle = 1/8$ , on obtient ainsi la décroissance lente du carré de l'amplitude

$$\frac{d}{dt}(A) = \varepsilon(A - \frac{1}{4}A^2)$$

cette croissance se fait à l'échelle  $t_1 = \varepsilon t$ , on peut donc écrire  $\frac{d}{dt_1}(A) = (A - \frac{1}{4}A^2)$ . et on termine la résolution....

En faisant le calcul en échelles multiples, on a la même équation d'amplitude pour enlever le terme séculaire...

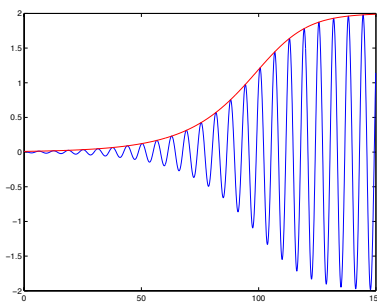


FIGURE 6 – Problème de l'oscillateur de Van Der Pol :  $y'' - \varepsilon(1 - y^2)y' + y = 0$ ,  $y(0) = a_0$ ,  $y'(0) = 0$ . Solution exacte pour  $\varepsilon = 0.1$  et  $a_0 = 0.01$  et solution de l'équation d'enveloppe  $A$  par les méthodes ALV & Echelles Multiples.

## 4.8 Exemple : Oscillateur de Duffing

Il s'agit du problème de l'oscillateur dont la raideur varie avec le déplacement :

$$y'' + y - \varepsilon y^3 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

l'ordre 0 n'est pas un sinus aussi simple qu'il y paraît. La mise en oeuvre passe par l'astuce du passage de  $\sin(t)^3 = (3 \sin(t) - \sin(3t))/4$ . On constate ainsi que la non linéarité par le terme  $\sin(3t)/4$  modifie la fréquence propre des oscillations, et on trouve  $y = \sin((1 - 3\varepsilon/8)t)$ , le terme résonant en  $3 \sin(t)$  va bien sûr provoquer l'échelle lente et on trouve au final

$$y = \sin((1 - 3\varepsilon/8)t) + \varepsilon(\sin(3t) + 9 \sin(t))/32 + \dots$$

On remarquera que pour Duffing le terme séculaire vient malheureusement de la méthode elle même, on peut mettre en oeuvre la méthode de moyenne de Feynman :

$$y'' + y - \varepsilon y^3 = 0, \text{ est aussi la dérivée de } \frac{y'^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \varepsilon \frac{y^4}{4}$$

et donc que la méthode de la moyenne donnera  $\langle \cos^4 t \rangle = 3/8$  etc.

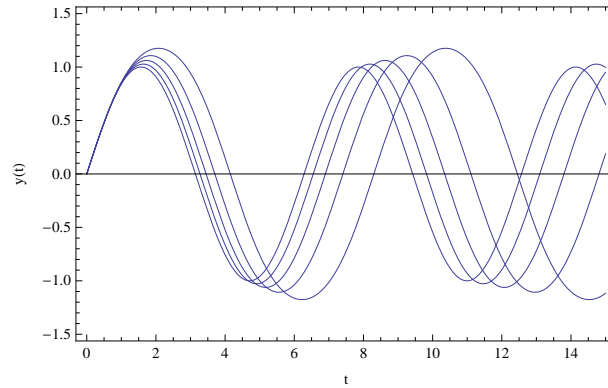
## 4.9 Exemple : Oscillateur avec frottement turbulent

Nous avons vu en long et large le cas du frottement laminaire en  $-\beta dy(t)/dt$ , nous pourrions maintenant examiner le cas du frottement turbulent en  $-\gamma(dy(t)/dt)^2$ .

Le calcul a non seulement un aspect historique (Diderot, l'ami de  $\partial$ 'Alembert s'y est frotté en étant trop en avance sur son temps [5]) mais bien entendu de première importance pratique. La résolution de  $y'' + y + \varepsilon y^2 = 0$  avec  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$  peut se faire ([8]), on trouve

$$y(t) = \cos(t) + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \frac{4}{3} \cos(t) + \frac{1}{3} \cos(2t)) + O(\varepsilon^2 t)$$

notons que la valeur moyenne de  $y(t)$  est  $\frac{\varepsilon}{2}$

FIGURE 7 – Solution de Duffing,  $\varepsilon$  varie de 0 à 0.4.

## 4.10 Généralisation au cas quelconque pour le terme source

### 4.10.1 Détails du calcul

Il s'agit du problème :

$$y'' + y = \varepsilon F(y'), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

On suit la démarche de [20], pour la mise en oeuvre complète. On applique donc la méthode des échelles multiples : on introduit deux échelles de temps  $t$  et  $t_1 = \varepsilon t$  et on cherche  $y$  sous la forme :

$$y = y_0(t, t_1) + \varepsilon y_1(t, t_1) + O(\varepsilon t_1)$$

A l'ordre 0 ( $\varepsilon^0$ ), on retrouve en substituant dans  $y'' + y = \varepsilon F(y')$  l'oscillateur simple

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} + y_0 = 0, \quad \text{la solution est de la forme : } y_0 = A(t_1) \sin(t) + B(t_1) \cos(t).$$

avec  $A$  et  $B$  fonctions de  $t_1$  qui restent à déterminer.

A l'ordre suivant ( $\varepsilon$ ), on fait apparaître  $y_1$  mais aussi les termes de dérivation liés au temps long comme  $2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t \partial t_1}$ , et les termes supplémentaires liés à  $F(y'_0)$ . On obtient en terme source de l'équation sur  $y_1$  des termes provenant de la solution  $y_0$  :

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + y_1 = F(B(t_1) \cos(t) - A(t_1) \sin(t)) - 2 \cos(t) A'(t_1) + 2 \sin(t) B'(t_1).$$

C'est une équation différentielle dont la solution est  $y_1(t, t_1)$ , avec  $t_1$  qui joue le rôle d'un paramètre dans cette équation précise. Comme il y a un forçage en  $\sin(t)$  et  $\cos(t)$  qui sont solution de l'équation homogène, on va chercher la solution particulière sous une forme  $Y_1 = a(t, t_1) \sin(t) + b(t, t_1) \cos(t)$  et utiliser la méthode de variation de la constante (comme nous l'avons fait en fait depuis le début). La dérivée première est (le prime est la dérivée en  $t$ ) :

$$Y_1' = a'(t, t_1) \sin(t) + b'(t, t_1) \cos(t) + a(t, t_1) \cos(t) - b(t, t_1) \sin(t),$$

la méthode de la variation des constantes (ou "méthode de Lagrange") nous fait imposer une condition supplémentaire :  $a' \sin(t) + b' \cos(t) = 0$ , puis on trouve compte tenu de cette condition, la dérivée seconde  $Y_1'' = -a \sin(t) - b \cos(t) + a' \cos(t) - b' \sin(t)$ . On substitue on a le système

$$\begin{cases} a' \sin(t) + b' \cos(t) = 0 \\ a' \cos(t) - b' \sin(t) = F(B(t_1) \cos(t) - A(t_1) \sin(t)) - 2 \cos(t) A'(t_1) + 2 \sin(t) B'(t_1). \end{cases} \quad (6)$$

On pose  $f(t)$  le membre de droite de la seconde. En multipliant par sinus la première et cosinus la seconde et en additionnant on obtient  $a'$  de même on peut obtenir  $b'$ .

$$\begin{cases} a' = f(t) \cos(t) \\ b' = -f(t) \sin(t). \end{cases} \quad (7)$$

On peut facilement obtenir  $a$  et  $b$ . Mais il faut remarquer que les intégrales avec  $f \cos(t)$  et  $f \sin(t)$  peuvent avoir une contribution non bornée. Or les intégrands sont des fonctions périodiques. La contribution devient de plus en plus grande à chaque période. On en déduit que  $a$  et  $b$  ne sont bornées que si

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt = \int_0^{2\pi} -f(t) \sin(t) dt = 0.$$

En explicitant on trouve :

$$A'(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) F(B(t_1) \cos(t) - A(t_1) \cos(t)) dt$$

$$B'((t_1)) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F(B(t_1) \cos(t) - A(t_1) \sin(t)) dt$$

On retrouve donc **exactement** le résultat de la méthode des "Amplitudes Lentement Variables" (équations 5), avec cependant beaucoup plus de travail. Mais ce résultat est maintenant établi de manière rigoureuse dans notre cadre asymptotique.

#### 4.10.2 De l'ALV à la MEM

Nous retiendrons donc que la solution du problème :

$$y'' + y = \varepsilon F,$$

avec  $y(0)$  et  $y'(0)$  donnés et  $F$  une fonction de  $y$  et  $y'$ , s'écrit en fonction du temps rapide  $t$  et du temps lent  $t_1 = \varepsilon t$  et que la solution est de la forme que nous avons intuité avec l'ALV et que nous venons d'établir avec la MEM :

$$\begin{cases} y & = A(t_1) \sin(t) + B(t_1) \cos(t) \\ A'(t_1) & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) F dt \\ B'(t_1) & = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F dt. \end{cases} \quad (8)$$

La méthode des échelles multiples est particulièrement adaptée pour les oscillateurs perturbés.

Notons que avons noté  $y = A(t_1) \sin(t) + B(t_1) \cos(t)$  dans tout ce cours sauf pour l'exemple de van des Pol et Oscillateur avec frottement turbulent en échelles multiples, où nous avons écrit  $y = A(t_1) \cos(t) + B(t_1) \sin(t)$ . Mais on peut aussi noter  $y = A(t_1) \sin(t + \theta(t_1))$  (ce que choisit Hinch), ou bien entendu l'écrire en complexes plus conjugué  $y = A(t_1) e^{it} + A(t_1)^* e^{-it}$  (ce que font Bender et Orzag). On fera donc attention au  $-1$  liés aux dérivées.

## 5 Méthode WKB

### 5.1 Forme de la solution

D'autres méthodes existent qui tiennent compte de petits paramètres induisant des échelles différentes comme la méthode WKB (ou BKW, Brillouin - Kramers - Wentzel 1926, initiée par Jeffreys en 1923). Elle consiste à chercher la solution sous la forme d'exponentielle directement car on a vu que toutes les solutions sur lesquelles on travaille sont des exponentielles. La solution de (notons que les exemples que nous regarderons sont tels que  $a(\varepsilon) \rightarrow 0$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) :

$$a(\varepsilon)y'' + b(\varepsilon)y' + c(\varepsilon)y = 0$$

est  $A_+e^{s_-x/a} + A_-e^{s_+x/a}$  avec  $s_{\pm} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$ , la solution est combinaison de  $e^{\frac{s_{\pm}x + a \text{Log} A_{\pm}}{a}}$  (voir plus loin la transformation dans Jones présentée en remarque). D'où l'idée de chercher des solutions de la forme exponentielle :

$$y = e^{S(x)/\delta} \text{ puis développer } S = S_0 + \delta S_1 + \dots$$

La méthode consiste donc à chercher la solution sous la forme :

$$y(x) \sim \exp\left(\frac{1}{\delta(\varepsilon)} \sum_{n=0}^N \delta(\varepsilon)^n S_n(x)\right).$$

La séquence des  $\delta(\varepsilon)$  est trouvée par moindre dégénérescence, et les  $S_n$  sont résolus de proche en proche.

### 5.2 Mise en oeuvre sur Friedrichs

Par exemple, prenons l'oscillateur de Friedrichs

$$\varepsilon f''(x) + f'(x) = 1/2 \text{ avec } f(0) = 0 \quad f(1) = 1$$

la méthode s'applique pour des équations sans second membre, donc transformons

$$f(x) = (x+1)/2 + y(x)$$

Le problème à résoudre :

$$\varepsilon y'' + y' = 0 \text{ avec } y(0) = -1/2, \quad y(1) = 0.$$

On cherche donc la solution sous la forme proposée :

$$y(x) \sim \exp\left(\frac{1}{\delta(\varepsilon)} \sum_{n=0}^N \delta(\varepsilon)^n S_n(x)\right)$$

Dérivons la forme générale de la solution "WKB"

$$y(x) = e^{S(x)/\delta(\varepsilon)}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{S'}{\delta} y(x), \\ y''(x) = \left(\frac{S''}{\delta} + \frac{S'^2}{\delta^2}\right) y(x) \end{cases}$$

mais  $S = S_0 + \delta S_1 + \dots$  donc ces dérivées sont aussi :

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{S'_0}{\delta} y(x) + S'_1 y(x) \dots, \\ y''(x) = \left(\frac{S''_0}{\delta} + \frac{S'^2_0}{\delta^2} + \frac{2S'_0 S'_1}{\delta} + \dots\right) y(x). \end{cases}$$

L'équation est donc :

$$\varepsilon \left( \frac{S_0''}{\delta} + \frac{S_0'^2}{\delta^2} + \frac{2S_0'S_1'}{\delta} + \dots \right) y(x) + \frac{S_0'}{\delta} y(x) + S_1' y(x) + \dots = 0$$

manifestement, les termes grands de  $y''$  sont en  $1/\delta^2$ , et  $y'$  est en  $1/\delta$  par moindre dégénérescence,  $\varepsilon = \delta$  il reste alors

$$(S_0'' + \frac{S_0'^2}{\varepsilon} + 2S_0'S_1' + \dots) y(x) + \frac{S_0'}{\varepsilon} y(x) + S_1' y(x) \dots = 0$$

soit

$$\begin{cases} S_0'^2 + S_0' = 0, \\ S_0'' + 2S_0'S_1' + S_1' = 0 \end{cases}$$

• une première solution est  $S_0' = 0$  donc constant  $S_0$ , donc  $S_1 = 0$ , la solution est  $y_1 = C_1$ , la constante  $C_1$  inclut  $e^{S_0/\varepsilon}$

• une seconde solution est  $S_0' = -1$ ,  $S_0 = -x$  donc  $S_1' = 0$ ,  $S_1$  est constant la solution est  $y_2 = A_2 + B_2 e^{-x/\varepsilon}$ ,

la solution complète est combinaison des précédentes  $y = A + B e^{-x/\varepsilon}$ , condition en 0 donne  $A + B = -1/2$  et en 1,  $A + B e^{-1/\varepsilon} = 0$ , or  $\varepsilon$  est petit donc  $A = 0$ . La solution est donc

$$y = (-1/2) e^{-x/\varepsilon}$$

c'est bien la solution attendue...

## 5.3 Exemple générique

### 5.3.1 Résolution par la méthode

Prenons un autre exemple générique simple

$$\varepsilon y''(x) = Q(x)y(x),$$

notons, que si  $Q = -1$  avec  $y(0) = 0, y(1) = 1$ , on ne peut pas résoudre par les DAR car la solution extérieure est  $y_e = 1$ , la solution intérieure est oscillante ( $x = \sqrt{\varepsilon}\tilde{x}$ , et  $\tilde{y} = A \sin(\tilde{x}) + B \cos(\tilde{x})$ ), et donc on ne peut pas raccorder à l'infini...

Dans le cas général le développement donne :

$$(\varepsilon/\delta^2)S_0'^2 + (2\varepsilon/\delta)S_0'S_1' + (\varepsilon/\delta)S_0'' = Q(x),$$

d'où  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$  et  $S_0'^2 = Q(x)$  ce qui permet de trouver l'"eikonale" (la phase)

$$S_0 = \pm \int^x \sqrt{Q(x)} dx$$

ensuite à l'ordre suivant

$$S_0'' + 2S_0'S_1' = 0$$

s'écrit  $S_1' = -(1/2)S_0''/S_0'$ , c'est aussi  $S_1 = (-1/2) \text{Log} S_0'$  or  $S_0' = \sqrt{Q}$  on a  $S_1 = -(1/4) \text{Log}|Q|$  la solution complète s'écrit sous la forme de superposition

$$y(x) = |Q|^{-1/4} (C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int^x \sqrt{Q(x)} dx} + C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int^x \sqrt{Q(x)} dx})$$

$C_1$  et  $C_2$  sont déduits des conditions aux limites.



### 5.3.2 Remarque : transformation, cf Jones

On peut reprendre à l'envers (Jones [11]) p 119, en remarquant que toute équation du type :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

peut se transformer en posant

$$y(x) = w(x)e^{-\frac{1}{2} \int^x p(\xi) d\xi} \quad \text{et} \quad Q(x) = \frac{1}{2}p'(x) + \frac{1}{4}p^2(x) - q(x),$$

de la forme suivante :

$$y''(x) - Q(x)y(x) = 0$$

de plus si on pose  $w = WQ^{-1/4}$ ,

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}W - (1 + \psi)W = 0$$

avec  $\zeta(x) = \int^x Q^{1/2}(\xi) d\xi$  et  $\psi(\zeta) = -Q^{-3/4} \frac{d^2}{dx^2} Q^{-1/4}$  Si  $\psi$  est négligeable, alors

$$w = \frac{Ae^\zeta + Be^{-\zeta}}{Q^{1/4}}$$

on peut alors mieux estimer l'erreur en ayant remarqué cette transformation.

## 5.4 Oscillateur faiblement amorti

Nous appliquons maintenant WKB à notre exemple favori de l'oscillateur faiblement amorti qui est :

$$y''(t) + \varepsilon y'(t) + y(t) = 0,$$

il s'agit d'un problème posé dans les échelles rapides (la décroissance est aux temps long). Il faut le réécrire pour appliquer la méthode. Si on écrit  $\varepsilon t = \tau$ , on utilise le temps long  $\tau$  comme variable, on alors  $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial y}{\partial \tau}$ , ainsi :

$$\varepsilon^2(y''(\tau) + y'(\tau)) + y(\tau) = 0.$$

C'est l'équation écrite en temps longs, c'est le temps court qui est maintenant source de problèmes.

Résolvons (Dans les variables choisies  $\varepsilon^2$  est devant la dérivée de plus haut ordre, cela rappelle qu'il y a un problème si  $\varepsilon$  est 0)

$$\varepsilon^2 \left( \frac{d^2}{d\tau^2} y(\tau) + \frac{d}{d\tau} y(\tau) \right) + y(\tau) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{d}{d\tau} y(0) = \frac{1}{\varepsilon},$$

avec WKB cherchons le développement :

$$y(\tau) = \exp\left(\frac{1}{\delta}(S_0 + \delta S_1 + \delta^2 S_2 + \dots)\right)$$

dérivons

$$y'(\tau) = \left(\frac{1}{\delta}(S'_0 + \delta S'_1 + \delta^2 S'_2 + \dots)\right) \exp\left(\frac{1}{\delta}(S_0 + \delta S_1 + \delta^2 S_2 + \dots)\right)$$

dérivons encore

$$y''(\tau) = \left(\frac{1}{\delta^2} S_0'^2 + \frac{1}{\delta}(2S'_1 S'_0 + S_0'') + O(1)\right) \exp\left(\frac{1}{\delta}(S_0 + \delta S_1 + \delta^2 S_2 + \dots)\right)$$

substitué dans l'équation et à l'ordre  $1/\delta$

$$(\varepsilon^2/\delta^2)S_0'^2 + (2\varepsilon^2/\delta)S_0'S_1' + (\varepsilon^2/\delta)S_0'' + (\varepsilon^2/\delta)S_0' + \dots = -1,$$

le PMD donne  $\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}=1$  donc  $\delta = \varepsilon$ , l'équation est :

$$S_0'' + \varepsilon(2S_0'S_1' + S_0'' + S_1') + O(\varepsilon^2) = -1,$$

et  $S_0'^2 = -1$ , so  $S_0' = \pm i$ , cela donne par integration la phase ou "eikonale" (constantes d'intégration  $K_{\pm}$ ) :

$$S_0 = \pm i\tau + K_{\pm}$$

ordre suivant

$$S_0'' + 2S_0'S_1' + S_1'' = 0$$

s'écrit  $S_1' = -(1/2)$  mais comme  $S_0'' = 0$ , cela donne  $S_1 = (-1/2)\tau + K_1$ . La solution

$$y(\tau) = e^{-\tau/2}(C_1 e^{\frac{i\tau}{\varepsilon}} + C_2 e^{\frac{-i\tau}{\varepsilon}}),$$

avec  $C_1$  et  $C_2$ , reliés aux constantes  $e^{K_{\pm}}$ ,  $e^{K_1}$  venant des conditions aux limites. Comme  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1/\varepsilon$  on a  $C_1 = C_2$  et  $(C_1 - C_2)/\varepsilon = 1/\varepsilon$

$$y(\tau) = e^{-\tau/2} \frac{(e^{\frac{i\tau}{\varepsilon}} - e^{\frac{-i\tau}{\varepsilon}})}{2}.$$

Bien sûr après retour dans le temps  $\tau = \varepsilon t$  enfin :

$$y(t) = e^{-\varepsilon t/2} \sin t,$$

comme attendu.

## 5.5 Exemples d'applications

### 5.5.1 Exemple simple

Prenons l'exemple simple déjà évoqué

$$\varepsilon y'' = -y(x), \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 1,$$

ici  $Q = -1$ , on trouve en appliquant la méthode que  $S_0 = \pm \sqrt{i}x$

$$y(x) = |-1|^{-1/4} (C_1 e^{\frac{ix}{\sqrt{\varepsilon}}} + C_2 e^{\frac{-ix}{\sqrt{\varepsilon}}})$$

puis

$$y = \frac{\sin(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}})}{\sin(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})}$$

qui est d'ailleurs la solution exacte.

On consultera le Bender Orszag p 486 qui consacre un gros chapitre à WKB.

### 5.5.2 Exemple Airy

L'équation d'Airy s'écrit :

$$y'' = xy$$

elle a deux solutions,  $Ai$  et  $Bi$ , la première et la seconde oscillent et décroissent en  $x \rightarrow -\infty$ . Mais pour  $x \rightarrow \infty$ , la première décroît à 0 tandis que la seconde croît...

En fait, pour appliquer la méthode, on pourrait écrire  $x = \frac{1}{\varepsilon}X$  avec  $X = O(1)$  et  $y = Y$ , d'où  $\varepsilon^3 \frac{d^2 Y}{dX^2} = XY$ , on trouve alors  $\delta = \varepsilon^{3/2}$  etc...

On trouve alors en appliquant la méthode (c.f. Bender Orszag p 508-509) que pour  $x \rightarrow \infty$

$$Ai(x) = Cx^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}$$

(on peut montrer par ailleurs  $C = 1/(2\sqrt{\pi})$ ).

De même pour  $x \rightarrow -\infty$

$$Ai(x) = C_1 x^{-1/4} \cos \frac{2}{3}(-x)^{3/2} + C_2 x^{-1/4} \sin \frac{2}{3}(-x)^{3/2}$$

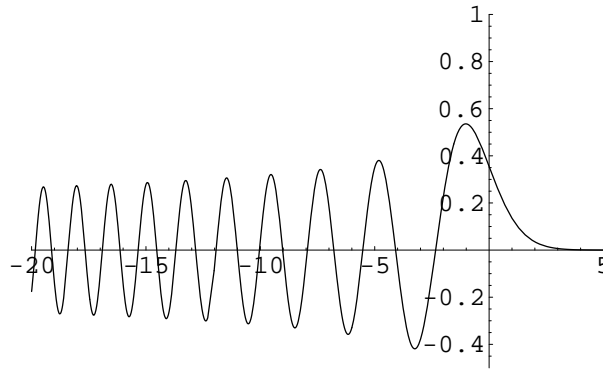


FIGURE 8 – Solution d'Airy  $y'' = xy$ , "ressemble" à  $y'' = -y$  pour  $x < 0$  la solution est oscillante décroissante, et pour  $x > 0$  elle ressemble" à  $y'' = y$  elle est décroissante (c'est  $Bi$  qui croît)...

### 5.5.3 Onde électromagnétique

Propagation d'une onde électromagnétique,  $E_y(z, t) = E(z)e^{-i\omega t}$  et  $B_x(z) = B(z)e^{-i\omega t}$  se propageant dans un milieu d'indice variable  $n(z)$ , on a les équations de Maxwell

$$\frac{\partial}{\partial z} E_y = \frac{\partial}{\partial t} B_z$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B_z = \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} E_y$$

on pose  $\varepsilon\mu = n(z)^2\varepsilon_0\mu_0$  par élimination

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y = \frac{n^2}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y$$

d'où pour le mode considéré

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E = -\frac{n^2\omega^2}{c_0^2} E$$

avec  $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c_0$ , le nombre d'onde associé à la longueur d'onde  $\lambda_0$ , le milieu varie sur une échelle macroscopique  $\ell \gg \lambda_0$ . On pose donc  $z = \ell\bar{z}$  ou encore en définissant (à  $2\pi$  près) cette longueur comme  $\frac{1}{\varepsilon k_0}$  on a  $z = \frac{1}{\varepsilon k_0}\bar{z}$  donc

$$\frac{\partial}{\partial z} E = \varepsilon k_0 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} E \text{ ainsi } \frac{\partial^2}{\partial z^2} E = -\frac{n^2}{\varepsilon^2} E$$

On travaille avec les échelles lentes macroscopiques, on cherche la solution sous la forme  $E = e^{i\phi(\bar{z})/\delta(\varepsilon)}$  on dérive

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} E = \frac{i\phi'}{\delta(\varepsilon)} E$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} E = \left( \frac{i\phi''}{\delta(\varepsilon)} - \frac{\phi'^2}{\delta(\varepsilon)^2} \right) E$$

on en déduit par moindre dégénérescence  $\delta = \varepsilon$  et

$$i\phi''\varepsilon - \phi'^2 = -n^2$$

on développe  $\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \dots$  et ainsi

$$i\phi_0''\varepsilon - \phi_0'^2 - 2\varepsilon\phi_1'\phi_0' + \dots = -n^2$$

d'où les deux premiers ordres

$$\phi_0' = \pm n(z)$$

$$i\phi_0'' - 2\phi_1'\phi_0' = 0.$$

Le premier nous donne donc

$$\phi_0 = \pm \int_0^{\bar{z}} n(\bar{z}) d\bar{z}$$

et le deuxième  $i\phi_0'' = 2\phi_0'\phi_1'$  en substituant l'expression de  $\phi_0'$  s'écrit  $\pm in'(\bar{z}) = 2 \pm n(\bar{z})\phi_1'$  donc  $\phi_1' = \frac{idn}{nd\bar{z}}$  qui s'intègre en  $\frac{i}{2} \text{Log}(n(\bar{z}))$  et on a donc

$$\phi_1 = i \text{Log}(n^{1/2})$$

or  $\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \dots$  donc la solution est en  $e^{\frac{i\phi_0}{\varepsilon} + i\phi_1 + \dots} = e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\bar{z}} n(\bar{z}) d\bar{z}} e^{-\text{Log}(n^{1/2})}$ . La solution WKB de propagation est donc :

$$E = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\bar{z}} n(\bar{z}) d\bar{z}}.$$

#### 5.5.4 Onde de pouls dans une artère d'élasticité lentement variable

Les équations sont linéarisées

$$2\pi R_0 \frac{\partial}{\partial t} R = -\pi R_0^2 \frac{\partial}{\partial x} u$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial x} k(R - R_0)$$

avec  $k$  élasticité lentement variable

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} k(R - R_0) = (2/R_0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (R - R_0)$$

en posant  $\rho = k(R - R_0)$  on se ramène à la forme précédente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho = \frac{2}{kR_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho.$$

#### 5.5.5 Onde de marée dans un estuaire lentement variable

Les équations sont linéarisées, la section de l'estuaire est  $w(h_0)$ , la section mouillée est  $S = w(h_0 + \eta)$ , et  $w$  et  $h_0$  varient très lentement en  $x$  :

$$w \frac{\partial}{\partial t} \eta = -\frac{\partial}{\partial x} (wh_0 u)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -g \frac{\partial}{\partial x} \eta$$

d'où l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta = \frac{g}{w} \frac{\partial}{\partial x} (h_0 w \frac{\partial}{\partial x} \eta).$$

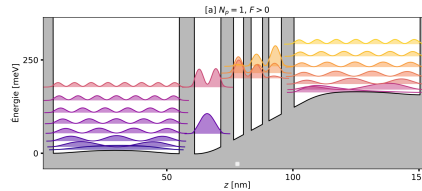


FIGURE 9 – Puits de potentiels et solution de l'équation de Schrödinger, on remarque que  $\lambda \ll a$  (M. Lagrée (2022), "Transport électronique dans les détecteurs à cascade quantique en régime de couplage fort lumière-matière")

## 5.6 Schrödinger

La méthode WKB (ou BKW Brillouin, Kramers Wentzel 1926, et aussi Jeffreys 1923) est particulièrement bien adaptée pour les équations de Schrödinger (clin d'œil au prix Nobel de Physique Feynman 1965, Cohen-Tannoudji 1997, Haroche 2012, Aspect 2022)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + V(x)\Psi = E\Psi$$

le développement se fait en utilisant  $\hbar$  comme petit paramètre, en fait, l'équation est implicitement écrite sans dimension en prenant  $V_0$  et la taille du puits  $a$ .

$$-\frac{\hbar^2}{2mV_0a^2}\bar{\Psi}'' + (\bar{V}(\bar{x}) - \bar{E})\bar{\Psi} = 0$$

$\frac{\hbar^2}{2mV_0a^2}$  est le petit paramètre du problème d'où le développement en  $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2mV_0a^2}$ . On peut interpréter ce petit paramètre comme le rapport de la longueur d'onde de l'onde associée  $\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mV_0}}$  (une onde d'énergie  $V_0$  a pour fonction  $e^{ikx}$  avec  $k = \frac{\sqrt{2mV_0}}{2\pi\hbar}$ ) à la taille de la barrière de potentiel  $a$ .

Si on préfère, on remarque que l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + V_0\Psi \text{ a par moindre dégénérescence pour échelle de longueur } \frac{\hbar}{\sqrt{mV_0}},$$

on a donc bien  $\frac{\hbar^2}{mV_0a^2}$  rapport du carré des échelles. les 2 et  $\pi$  sont pour la déco.

On a alors, si  $E > V$ , la propagation en ondes

$$\Psi(x) = \frac{C_+ e^{+i \int dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))}} + C_- e^{-i \int dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))}}}{\sqrt[4]{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))}}$$

si le potentiel est constant on retrouve les solutions classiques... pour  $V > E$ , donc dans une paroi :

$$\Psi(x) = \frac{C_+ e^{+ \int dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)}} + C_- e^{- \int dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)}}}{\sqrt[4]{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)}}$$

on remarque que le passage  $V = E$  fait apparaître la fonction d'Airy car près du passage de la barrière

$$V - E = (x - x_0)V_0' + O((x - x_0)^2)$$

et ainsi  $-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' = (x - x_0)V_0'\Psi$  de solution  $\Psi = A Ai(V_0'^{1/3}(x - x_0)) + B Bi(V_0'^{1/3}(x - x_0))$  qui présente bien le caractère évanescence et raccorde les solutions précédentes (voir les notes de Gajjar qui détaille bien le calcul).

## 6 Autres méthodes

Partant de l'observation que la fréquence peut se développer en puissances de  $\varepsilon$ ,

$$t = t_0(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots), \quad y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$$

les  $\omega_i$  étant des constantes ou des fonctions de  $t_0, \varepsilon t_1, \varepsilon^2 t_2 \dots$  ce sont la méthodes de Cole - Kevorkian, la méthode des coordonnées étirées ("strained coordinates") la méthode de Lighthill, la méthode Lindstedt Poincaré, la méthode PLK, qui utilisent des variantes de cette observation. Il existe aussi la méthode de "renormalisation" qui en est une sur-variante, *etc...* On consultera la bibliographie pour voir les avantages de chaque point de vue. Les méthodes de type "strained coordinates" étant au final moins générales que les échelles multiples... On peut consulter Mudavanhu O'Maley [9] par exemple ou Nayfeh [18].

Chaque auteur est plus à l'aise avec l'une ou l'autre des méthodes. Par exemple pour Chen *et coll.* [4], qui dit "our renormalization group approach provides approximate solutions which are practically superior to those obtained conventionally", ou Mauss [14, 15] qui est partisan de la méthode MASC.

Nous laissons au lecteur le choix de la méthode appropriée correspondant à sa sensibilité...

## 7 "Modélisation Multiéchelles"

### 7.1 Problème modèle

On parle plus volontiers récemment de problèmes "Multiéchelles" plutôt que d'échelles multiples. Le problème modèle en temps serait :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= \frac{1}{\varepsilon} g(x, y) \end{cases} \quad (9)$$

on retrouve cette forme dans le cas de l'équation de Boltzman avec terme de collision, ou dans des équations avec couplage chimique, cf [19] or E et all [22].

### 7.2 Dynamique lente

#### 7.2.1 Ordre le plus bas

Si par chance  $x$  se stabilise en  $\dot{x} = 0$  à l'échelle de temps courte  $\varepsilon$ , alors on a  $f(x, y) = 0$  qui est l'équilibre de l'équation. On peut résoudre  $x = \Psi(y)$  qui est donc la valeur d'équilibre à l'échelle rapide. Il reste alors à résoudre

$$\dot{y} = g(\Psi(y), y),$$

et le tour est joué.

#### 7.2.2 Ordre suivant

L'ordre suivant est un peu plus compliqué à obtenir (voir Stuart [19]). On part toujours de la solution stabilisée en  $\dot{x} = 0$  qui est  $f(x, y) = 0$ . La solution serait  $x = \Psi(y)$ , et ainsi  $\dot{y} = g(\Psi(y), y)$ , mais  $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dt}$  Donc

$$\dot{x} = \frac{f(x, y)}{\varepsilon} \text{ devient } \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{f(\Psi(y), y)}{\varepsilon}.$$

En développant la fonction qui donne la solution du problème rapide :

$$\Psi(y) = \Psi_0(y) + \varepsilon \Psi_1(y) + \dots$$

on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \psi_0}{\partial y} g(\Psi_0(y), y) \text{ et } f(\Psi(y), y) = f(\Psi_0(y), y) + \varepsilon \Psi_1(y) \frac{\partial}{\partial x} f(\Psi_0(y), y) + \dots$$

A l'ordre  $0(1/\varepsilon)$  donc  $f(\Psi_0(y), y) = 0$  (c'est normal c'est l'ordre le moins élevé).

A l'ordre  $0(1)$  donc  $\Psi_1(y) \frac{\partial}{\partial x} f(\Psi_0(y), y) = \frac{\partial \psi_0}{\partial y} g(\Psi_0(y), y)$  ce qui donne :

$$\Psi_1(y) = \frac{\frac{\partial \psi_0}{\partial y} g(\Psi_0(y), y)}{\frac{\partial}{\partial x} f(\Psi_0(y), y)}.$$

et donc l'ordre suivant comme  $g(\Psi(y), y) = g(\Psi_0(y) + \varepsilon \Psi_1(y) + \dots, y)$  on développe en faisant apparaître  $\frac{\partial}{\partial x} g(\Psi_0(y), y)$  d'où l'estimation plus précise :

$$\dot{y} = g(\Psi_0(y), y) + \varepsilon \frac{\frac{\partial \psi_0}{\partial y} g(\Psi_0(y), y)}{\frac{\partial}{\partial x} f(\Psi_0(y), y)} \frac{\partial}{\partial x} g(\Psi_0(y), y) + O(\varepsilon^2)$$

### 7.3 Dynamique moyennée

Si  $g$  est périodique, on peut travailler sur la variable moyennée :  $\int g(x, y) dx$ , l'intégrale est sur une période, et donc :

$$\frac{dy}{dt} = \int g(x, y) dx.$$

et le problème se résout.

Si cette intégrale est nulle, alors on s'inspire du résultat du paragraphe précédent pour faire apparaître le terme d'ordre  $\varepsilon$  : donc  $\frac{dy}{dt} = 0 + \varepsilon F(y) + \dots$ , où  $F$  peut être estimé comme au paragraphe précédent et pour obtenir une évolution au temps lent.

### 7.4 Dynamique avec bruit

Considérons l'exemple suivant à titre d'exemple (voir E et all [22])

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{y-x}{\varepsilon} \\ \dot{y} &= x - y^3 \end{cases} \quad (10)$$

On résout facilement, et  $y - x = 0$  donc  $\dot{y} = y - y^3$ . Suivant le signe de la condition initiale on aboutit à l'état  $\pm 1$ .

On peut compliquer cet exemple en ajoutant un bruit blanc  $W$ .

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{y-x}{\varepsilon} + \frac{W}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \dot{y} &= x - y^3 \end{cases} \quad (11)$$

on en déduit  $x = y + \varepsilon W$  et donc  $\dot{y} = y - y^3 + \varepsilon W$ , l'action du bruit fait quitter la position d'équilibre et le système va et vient de  $-1$  à  $+1$ .



## 8 Application de la MEM à la dynamique du mode marginal

### 8.1 Approche "heuristique"

En théorie de la stabilité linéaire, on linéarise les équations (de Navier Stokes), et on obtient une équation du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$$

où  $L$  est un opérateur linéaire portant sur  $u$  qui peut être les composantes  $u, v, w$ , leur projection sur les modes... Soient  $\sigma_i$  les  $i$  valeurs propres de  $L$ , et soient  $U_i$  les vecteurs propres associés, on a pour chaque valeur propre :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \sigma_i U_i$$

le système est dit stable si les  $\sigma_i$  ont tous une partie réelle négative. Les  $U_i$  décroissent en temps. En fonction du paramètre de contrôle de l'écoulement, on peut rendre au moins une des valeurs propres positives. Le système est alors instable linéairement. On va appeler  $\varepsilon$  l'écart au seuil du paramètre de contrôle (que l'on peut prendre aussi égal à la valeur propre qui va passer d'une valeur négative, stable, à la valeur nulle de stabilité marginale puis à positive, instable)

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = \varepsilon U_0$$

les autres sont  $\sigma_i = O(1)$  négatifs. Clairement, la croissance va être lente, pour  $\varepsilon > 0$ ,

On conçoit alors que  $U_0$  va entraîner dans sa croissance les différentes composantes de  $u$ , et au final on va garder des termes non inéaires dans l'équation et écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + NL(u)$$

avec

$$u = U_0 + u_1 + \dots$$

$U_0$  est la solution évoluant lentement. Par abus de notation on pose

$$NL(u) = \alpha u^2$$

pour fixer les idées. D'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_0 + u_1 + \dots) = L(U_0 + u_1 + \dots) + \alpha(U_0 + u_1 + \dots)^2$$

ce qui donne à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1 = Lu_1 + \alpha(U_0)^2 + 2\alpha U_0 u_1 + \dots$$

les modes  $u_1$  évoluent plus vite et comme leur taux de croissance  $\sigma$  est négatif, ils s'équilibrent en étant forcés par le second membre, si on pose  $u_1 = u_1^f + u_1^s$  avec  $u_1^f$  décroissant très vite

$$0 = Lu_1^s + \alpha U_0^2$$

et donc  $u_1^s = \frac{-\alpha}{|\sigma|} U_0^2$  (que l'on peut considérer comme une solution particulière), les  $u_1^s$  sont appelés modes esclaves.  $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + NL(u)$  s'écrit alors

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = \varepsilon U_0 - \frac{2\alpha}{|\sigma|} |U_0|^2 U_0$$

On a donc une "équation de Landau" pour la croissance de l'amplitude.

L'étape suivante est la théorie des systèmes dynamiques (théorie de la variété centrale), cette théorie sort du cadre de ce cours, mais reprenons cet exemple en mettant des epsilon.

## 8.2 Approche échelles multiples

Clairement, la croissance va être lente, pour  $\varepsilon > 0$ ,  
on pose donc le temps lent  $t_1 = \varepsilon t$  et on a  $\frac{\partial U_0}{\partial t_1} = U_0$ .

On conçoit alors que  $U_0$  va entraîner dans sa croissance les différentes composantes de  $u$ , et au final on va garder des termes non linéaires dans l'équation et écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + NL(u)$$

avec  $L = L_0 + \varepsilon L_1 + \dots$  clairement, il y a toujours le temps  $t_0 = t$ , mais aussi  $t_1 = \varepsilon t_0$ , donc

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1}$$

Le terme non linéaire a au moins des carrés  $u^2$ . Le développement de  $u$  va s'écrire

$$u = \nu_0 u_0 + \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \dots$$

puis  $Lu = (L_0 + \varepsilon L_1 + \dots)(\nu_0 u_0 + \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \dots)$  et

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \nu_0 \frac{\partial}{\partial t_0} u_0 + \varepsilon \nu_0 \frac{\partial}{\partial t_1} u_0 + \nu_1 \frac{\partial}{\partial t_0} u_1 + \nu_1 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} u_1 + \nu_2 \frac{\partial}{\partial t_0} u_2 + \nu_2 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} u_2 + \dots$$

comme dans  $NL(u)$  il y a des termes en  $\nu_0^2$ , en fait pour simplifier, on écrit  $NL(u) = \alpha u^2$ , il seront vite du même ordre de grandeur que les termes en  $\nu_1$ , donc  $\nu_0 = \sqrt{\nu_1}$ . A l'ordre suivant,  $\varepsilon \nu_0$  du terme instationnaire lent  $\frac{\partial}{\partial t_1} u_0$  va rencontrer les autres termes non linéaires que sont  $\nu_0 \nu_1 u_0 u_1$ , ce qui donne  $\nu_1 = \varepsilon$  donc  $\nu_0 = \sqrt{\varepsilon}$  (ce qui est consistant avec l'analyse heuristique du point précédent)

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{3/2} u_2 + \dots$$

A l'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$  on a :

$$\frac{\partial}{\partial t_0} u_0 = L_0 u_0$$

A l'ordre  $\varepsilon$  on a :

$$\frac{\partial}{\partial t_0} u_1 = L_0 u_1 + \alpha u_0^2$$

A l'ordre  $\varepsilon^{3/2}$  on a :

$$\frac{\partial}{\partial t_0} u_2 + \frac{\partial}{\partial t_1} u_0 = L_0 u_2 + L_1 u_0 + 2\alpha u_0 u_1$$

A l'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$  on a :  $u_0 = A(t_1)U_0 + \sum_i A_i(t_1)U_i e^{\sigma_i t_0}$ , ce qui veut dire que la première composante sur le vecteur propre de valeur propre reste constante, les autres, sont décroissantes

A l'ordre  $\varepsilon$  on a :

$$u_1 = (B(t_1), B_i(t_1)U_0 e^{\sigma_i t_0}) - \alpha(\sigma)^{-1} u_0^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t_0} u_2 - L_0 u_2 = -\frac{\partial}{\partial t_1} u_0 + L_1 u_0 - 2\alpha(\sigma)^{-1} |u_0|^2 u_0$$

La condition de solvabilité est donc bien :

$$\frac{\partial}{\partial t_1} u_0 = L_1 u_0 - 2\alpha(\sigma)^{-1} |u_0|^2 u_0$$

équation de Landau...

## 9 Autres Applications de la MEM

- En théorie de la stabilité linéaire, on obtient en général le comportement à l'échelle rapide, le comportement lent est obtenu lorsque l'on est proche du seuil d'instabilité ou lorsque l'on rajoute des termes non linéaires qui vont éventuellement saturer l'instabilité à un temps long.

- La théorie de l'homogénéisation est une application directe de la méthode des échelles multiples. L'idée de cette méthode est de considérer un milieu compliqué constitué d'une maille de petite taille se répétant (du type milieu poreux, milieu avec inclusions...). Par application de la méthode on remplace le problème par un problème moyenné au niveau de chaque motif de manière à obtenir un milieu global équivalent.

- L'étude des perturbations d'une surface libre d'eau est un autre exemple d'application. Partant des équations d'Euler à surface libre (déjà on a négligé les échelles visqueuses), on regarde ce qui se passe lorsque la profondeur  $h_0$  est faible par rapport à l'échelle longitudinale  $\lambda$  (définissant le petit paramètre  $\delta = h_0/\lambda$ ) et lorsque l'amplitude des perturbation est faible (définie par  $\varepsilon$  le rapport entre la perturbation d'interface libre et  $h_0$ ). En analysant les équations, on montre que lorsque  $\mu$  augmente, les non linéarités augmentent, et lorsque  $\delta$  augmente, les effets de profondeur amenant de la dispersion augmentent. Par moindre dégénérescence le cas  $\delta^2 = \varepsilon$  apparaît rendant ces deux types de perturbations de même ordre de grandeur.

On fait alors une décomposition en échelles multiples, la première  $\lambda$  la seconde  $\varepsilon^2\lambda$ . Elle correspond à une déformation lente faible dans le repère de l'onde qui se propage. Par application de la méthode, on trouve à l'ordre 0 la propagation simple des ondes linéaires, puis à l'ordre suivant en tenant compte d'un terme interprété comme séculaire, on obtient l'équation de KdV :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{3\eta}{2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = 0$$

cette équation ayant pour solution les solitons et autres mascarets.

- récemment, il a été montré en météo (Klein et al. ) que partant des échelles naturelles de la terre  $\Omega$ ,  $R_{terre}$  et  $g$ , et de données caractéristiques moyennes de l'atmosphère  $\rho_{ref} = 1kg/m^3$ ,  $p_{ref} = 10^5 Pa$  et  $u_{ref} = 10m/s$  (cette dernière valeur étant la plus discutable).

$l_{ref} = p_{ref}/(\rho_{ref}g)$  environ 10km (auteur de l'atmosphère) on peut alors écrire les différents nombres sans dimension classiques (Rosby, Mach, Froude) et en examinant les équations de Navier Stokes, on fait apparaître des ordres de grandeur dominants en  $\varepsilon$  :

$$Ro = \frac{\omega l_{ref}}{u_{ref}} \sim \frac{1}{\varepsilon}, \quad M = \frac{u_{ref}}{\sqrt{\gamma p_{ref}/\rho_{ref}}} \sim \varepsilon^2, \quad Fr = \frac{u_{ref}}{\sqrt{g l_{ref}}} \sim \varepsilon^2.$$

on trouve les différents enchaînements d'échelles de la météorologie de la couche limite d'Ekman aux écoulements géostrophiques : 200m 20s 10km 10m/s 500km 12h

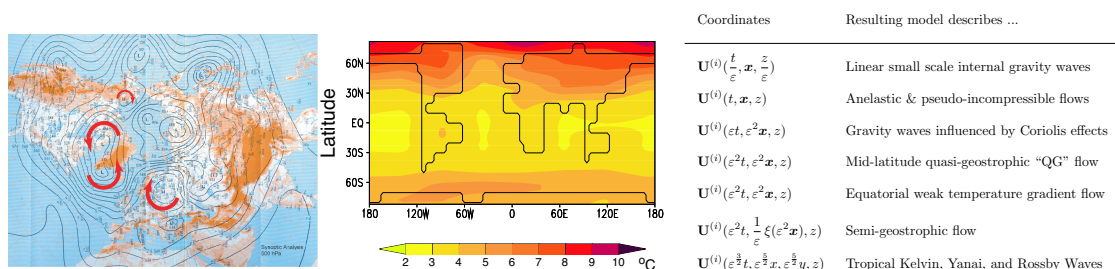


FIGURE 10 – issues de "An applied mathematical view of meteorological modeling" de Rupert Klein des images montrant les différentes échelles en météo.

## 10 Conclusion

Nous avons vu la notion de "méthode des échelles multiples". Cette méthode permet de retrouver les mêmes résultats que la méthode des développements asymptotiques raccordés. Une version simplifiée, la méthode des amplitudes lentement variables a été introduite, mais il s'agit d'une simplification heuristique. D'autres méthodes existent comme WKB (mais aussi "PLK", mais aussi "renormalisation", etc.). Suivant sa sensibilité, suivant la difficulté du problème, suivant l'usage (ou non!) on choisira telle ou telle méthode.

On consultera les chapitres suivants des ouvrages suivants (presque toujours les mêmes exemples mais des points de vues différents). La plupart de ces ouvrages sont disponibles à la bibliothèque de Mécanique de l'Institut Jean le Rond d'Alembert :

Chapitre 1 Cousteix et Mauss (06), Chapitre VIII du François (81), dans tous les livres de Nayfeh, il y a un chapitre sur la méthode. Chapitre 7. du Hinch (91), les ouvrages de Stabilité, comme Charru (07) ou Manneville (04) traitent aussi souvent des échelles multiples, *etc*

## 11 Appendice : retour sur $y''(t) + y(t) = \cos(t)$

On rappelle ici que la solution de  $y''(t) + y(t) = \cos(t)$  est  $y = A_0 \sin(t) + B_0 \cos(t) + \frac{t}{2} \sin(t)$ . Le résultat est classique, retrouvons le pédestrement.

On peut introduire en remarquant que l'équation sœur

$$y'(t) + y(t) = e^{-t}$$

est telle que sans second membre

$$y'(t) + y(t) = 0, \text{ a pour solution } e^{-t}.$$

La bonne idée est de faire la "variation de la constante" :  $y = A(t)e^{-t}$ , donc

$$y' + y = A'(t)e^{-t} - A(t)e^{-t} + A(t)e^{-t} = A'(t)e^{-t} = e^{-t}, \text{ donc } A' = 1$$

La solution est donc un polynome en  $t$  :

$$y = (t + C)e^{-t}.$$

Nous allons utiliser le même type de démarche dans notre cas avec des sinus et cosinus (qui sont des exponentielles particulières). Comme la solution de  $y''(t) + y(t) = 0$  est  $y = A_0 \sin(t) + B_0 \cos(t)$  avec  $A_0$  et  $B_0$  deux constantes, cherchons la solution de  $y''(t) + y(t) = \cos(t)$  sous la forme

$$y = A(t) \sin(t) + B(t) \cos(t)$$

par variation des constantes. Cela nous donne  $y''(t) + y(t) = (A'' - 2B') \sin(t) + (B'' + 2A') \cos(t)$ , soit

$$B'' + 2A' = 1 \text{ et } A'' - 2B' = 0$$

Solution homogène

$$B(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t)$$

$$A(t) = \alpha \sin(2t) - \beta \cos(2t)$$

après substitutiion

$$y = A(t) \sin(t) + B(t) \cos(t) = [\alpha \sin(2t) - \beta \cos(2t)] \sin(t) + [\alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t)] \cos(t)$$

$$y = 8((-\alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t)) \sin(t) - (\alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t)) \cos(t))$$

et comme  $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$ ,  $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$  et  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ , les termes se simplifient.... Il ne reste que :

$$y = -8\alpha \cos(t) - 8\beta \sin(t).$$

les deux constantes  $A_0$  et  $B_0$  absorbent ces  $-8\beta$  et  $-8\alpha$ . Il ne reste qu'à chercher une solution particulière de

$$B'' + 2A' = 1 \text{ et } A'' - 2B' = 0$$

on la cherche sous forme de polynômes  $A = \sum_i a_i t^i$  et  $B = \sum_i b_i t^i$ , qui est  $A = \frac{t}{2}$  et  $B = 0$ . La solution finale est donc bien

$$y = A_0 \sin(t) + B_0 \cos(t) + \frac{t}{2} \sin(t).$$

Au lecteur, à la lectrice : *Merci de me rappeler la solution plus élégante de ce problème .*

## Références

- [1] D. Baltean "Méthodes d'échelles multiples" notes de cours 2004
- [2] C. M. Bender, S.A. Orzag "Advanced Mathematical methods for scientists and engineers" Mc Graw Hill (1991) [google books](#)
- [3] F. Charru (2007) "Instabilités hydrodynamiques", Editions CNRS, EDP. [google books](#)
- [4] Lin-Yuan Chen, Nigel Goldenfeld, and Y. Oono (1996) "Renormalization group and singular perturbations : Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory", pdf PHYSICAL REVIEW E. VOLUME 54, NUMBER 1 JULY 1996
- [5] S. R. Dahmen (2015) "On pendulum and air resistance", Eur. J. Phys Journal H, v40-n4
- [6] W. Eckhaus, Asymptotic Analysis of singular perturbations, Stud. in Math. and Appl. 9, North Holland (1979)
- [7] Richard Phillips Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands "The Feynman Lectures on Physics"
- [8] S J Linz 1995 "A simple non-linear system : the oscillator with quadratic friction" Eur. J. Phys. 16 67
- [9] Mudavanhu O'Maley "Two-timing, Averaging, and Renormalization Methods to Solve Weakly Nonlinear Oscillator Equations on Long Time Intervals"
- [10] C. François, "Les Méthodes de perturbation en Mécanique", Editions ENSTA (1981)
- [11] D.S. Jones (1997) "Introduction to asymptotics, a treatment using nonstandard analysis", word scientific
- [12] J.E. Hinch "Perturbation Method"s, Cambridge University Press, (1991) [google books](#)
- [13] J. Kevorkian & J.D. Cole, "Perturbation Methods in Applied Mathematics", Springer (1981)
- [14] J Mauss & J. Cousteix (2006) "Analyse asymptotique et couche limite", Springer M et A 57. [google books](#)
- [15] J Mauss & J. Cousteix (2007) "Asymptotic analysis and boundary layers", Springer [google books](#)
- [16] Migouline V., Medvédev V., Moustel E., & Paryguine V (1991). "Fondements de la théorie des oscillations", Editions MIR Moscou, 1991, 408 pages
- [17] A. Nayfeh, Introduction to perturbation technique, John Wiley (1981)
- [18] A. Nayfeh, "perturbation methods" Wiley-VCH 2004, 425p
- [19] G.A. Pavliotis A.M. Stuart MULTISCALE METHODS : AVERAGING AND HOMOGENIZATION 2007 Springer
- [20] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia (1992) "Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation", Masson 266p
- [21] Weinan E and Bjorn Engquist "Multiscale Modeling and Computation" NOTICES OF THE AMS VOLUME 50, NUMBER 9 October 2003 1063-1070
- [22] W. E, X. Li, E. Vanden-Eijnden, "Some Recent Progress in Multiscale Modeling." <http://www.math.princeton.edu/multiscale/elv.ps>

Compléments Ouaipe :

[http://www.scholarpedia.org/article/Van\\_der\\_Pol\\_oscillator](http://www.scholarpedia.org/article/Van_der_Pol_oscillator)

[http://www.scholarpedia.org/article/Duffing\\_oscillator](http://www.scholarpedia.org/article/Duffing_oscillator)

<http://www.math.princeton.edu/multiscale/>

[http://www.maths.manchester.ac.uk/~gajjar/MATH44011/notes/44011\\_note6.pdf](http://www.maths.manchester.ac.uk/~gajjar/MATH44011/notes/44011_note6.pdf)

[http://en.wikipedia.org/wiki/WKB\\_approximation](http://en.wikipedia.org/wiki/WKB_approximation)

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP/MAE.pdf>

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP/MEM.pdf> (ce cours)

[http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP/MEM\\_GB.pdf](http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP/MEM_GB.pdf) (version française).

remarquer que ce cours est googlisé à "échelles multiples"

- Remerciements les plus cordiaux à mes collègues François Coulouvrat, Diana Baltean-Carlès et Thérèse Lévy qui ont enseigné ce cours en DEA de Mécanique à l'UPMC.
- Merci à Juliette Chabassier d'avoir refait les calculs pour Van der Pol suite à une typo dans Rayleigh et tracé la figure 6 .
- Remerciements aux étudiants de DEA Physique et DEA Mathématique de l'Université du Bénin, Lomé au Togo en Avril 2008, et aux étudiants de M2 Mécanique des Fluides de l'UPMC en 2004 et 2005 puis ceux du Master Fluid Mechanics UPMC d'octobre 2009 à 2017, devenue Sorbonne-Université 2018 à 2022 qui ont subi ce cours stoïquement.

à jour 3 octobre 2023

la page web de ce texte :

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP>

Le point de vue de ce cours de *P. – Y. Lagrée* est de présenter les méthodes classiques de perturbation en Mécanique (Matched Asymptotic Expansions, Multiple Scales) et couches limites (triple deck/ triple pont). Ce chapitre est la suite d'un chapitre consacré aux développements asymptotiques raccordés.