Lundi 13 mars 2017

Transferts Thermiques dans les Fluides

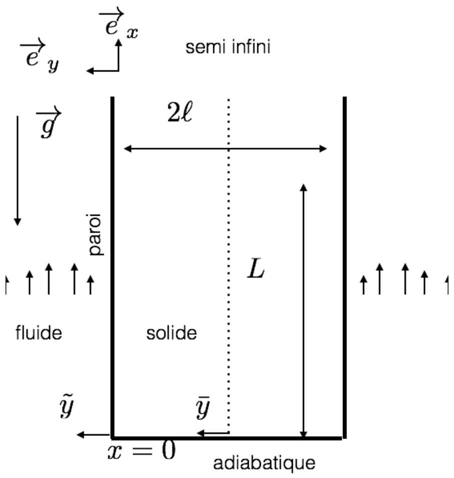
MF 204

durée 2h30 heures, tout document personnel autorisé

Refroidissement par convection naturelle.

On veut étudier le refroidissement d'un objet (de largeur 2ℓ, semi infini à partir de $x=0$, axe orienté vers le haut) initialement chaud à la température T_0. La partie basse de l'objet sera toujours adiabatique. L'objet est en fait assez grand pour que l'on néglige les effets de bout et on suppose l'objet semi infini en première approximation. On utilisera une longueur caractéristique L dans la partie 3. A droite et à gauche la température est T_∞ au loin. On reste en 2D plan. On est instationnaire pour les questions 1 et 2 pour le solide. Pour les questions suivantes 3, 4 et 5 on est en stationnaire dans le fluide.

Les questions sont assez indépendantes.



1. On commence par examiner ce qui se passe dans le solide. On choisit le repère pour que $\bar{y}=0$ au centre de l'objet (dans la partie suivante, question 3, 4 et 5, on mesurera $\tilde{y}$ à partir de la surface).

On rappelle que l'équation de la chaleur sans dimension et les conditions mixtes associées sont :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = (\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2})$$

avec $\bar{T}=1$ en $\bar{t}=0$ et $-(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}) = \pm Bi\bar{T}$ en $\bar{t}$>0 et $\bar{y}=\pm 1$.

1.1 Exprimer tous les adimensionnements choisis pour obtenir ce jeu d'équations.

1.2 Exprimer les conditions aux limites choisies et les invariances choisies pour obtenir ce jeu d'équations.

1.3 Justifiez en quelques mots que la solution est de la forme

$$\bar{T} = \Sigma_{i>0}(\frac{2\sin(k_i)\cos(k_i\bar{y})}{k_i+\sin(k_i)\cos(k_i)}\exp(-k_i^2\bar{t})), \text{ avec } k_i\tan(k_i) = Bi.$$

1.4 L'échange est faible, $Bi \ll 1$, exprimer k_1 en fonction de Bi.

1.5 Faites un développement à l'ordre 2 (en Bi) et montrez qu'au premier ordre en Bi on a $\bar{T} = exp(-K\bar{t})$. Identifiez ce K.

1.6 Constatez que si $Bi \ll 1$, la température est quasi constante dans le solide (elle varie de $O(Bi)$)

1.7 Déduire que pour $Bi \ll 1$, l'échelle de temps n'est pas celle de la question 1.1. Ecrire l'échelle de temps pertinente.

2 Examinons maintenant ce problème avec le point de vue des systèmes minces (on résout avec un autre point de vue, et on compare les deux résolutions).

2.1 Ecrire le bilan global en intégrant sur l'épaisseur $\bar{y}$, l'équation de la chaleur du 1.
2.2 En utilisant $-(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}) = \pm Bi\bar{T}$ et comme Bi petit, montrer que la température varie peu en $\bar{y}$ dans l'objet. En déduire que la moyenne en espace $\int_{-1}^{1} \bar{T}(\bar{y}, \bar{t})d\bar{y} \simeq 2\bar{T}(0, \bar{t})$
2.3 En déduire que $\bar{T}(0, \bar{t})$ est exponentielle en temps (à partir de 2.1 et 2.2), comparer à la question précédente 1.5 et 1.6. et 1.7

On considère une des faces par exemple celle de gauche. On va étudier maintenant le fluide. La gravité est dans le sens des x décroissants. On mesure y à partir de la surface (et non plus du centre). On va dans cette partie établir l'expression du coefficient de Nusselt pour la convection naturelle à flux imposé (et non à température imposée comme en cours ou en PC), soit ϕ_p la valeur de ce flux. On se place en régime stationnaire, on est en 2D plan. On se donne L une longueur caractéristique (la face est semi infinie). On néglige l'élévation de température par la viscosité ($E = 0$).
3.1 On se donne une des faces que l'on considère comme une plaque plane semi infinie. Ecrire les équations de convection naturelle le long de cette plaque (masse, Navier Stokes et équation de la chaleur avec $E = 0$ (que signifie cette hypothèse)).
3.2 Ecrire toutes les conditions aux limites.
3.3 Justifier sans calcul qu'il existe une épaisseur δ petite par rapport à L dans laquelle l'écoulement se produit.
3.4 Poser $u = U_0\tilde{u}$, en déduire la valeur de V_0 si on pose $v = V_0\tilde{v}$ (U_0 pour l'instant inconnu)
3.5 Poser $T = T_\infty + (\delta T)\tilde{T}$, relier (δT) à ϕ_p.
3.6 En dimensionnant l'équation de conservation de quantité de mouvement suivant l'axe x, trouver la relation entre U_0 et ϕ_p (et δ et ...)
3.7 Pourquoi doit on garder certains termes visqueux dans l'équation de conservation de quantité de mouvement ?
3.8 Dans l'équation de conservation de quantité de mouvement, montrer que le terme visqueux dominant et le terme d'inertie permettent de relier U_0, L, δ et ν.
3.9 En déduire l'expression de δ/L en fonction d'un nombre de Grashof (construit sur $\alpha g L \phi_p, k$ et ν).
3.10 Expressions de U_0, et V_0 en fonction de ce nombre de Grashof et $\alpha g L\phi_p/k$.
3.11 Equation de la chaleur dans les variables obtenues.
3.12 Montrer que l'équation transverse suivant $\bar{v}$ se réduit à $\partial\bar{p}/\partial\bar{y} = 0$

4. On écrit maintenant les conditions aux limites :
4.1 Conditions aux limites pour la vitesse.
4.2 Conditions aux limites pour la température.
4.3 Conditions aux limites pour la pression.
4.4 Montrer que la pression est nulle.

5. Normalement on est arrivé à (plus les conditions aux limites) :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \qquad \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \tilde{T}, \qquad \tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}$$

5.1 Montrer que ce système admet une solution autosemblable (on utilisera l'invariance et la forme implicite de la solution $F(\tilde{u}, \tilde{x}, \tilde{y}) = 0$) en $\eta = \tilde{y}/\tilde{x}^m$, $\xi = \tilde{x}$, et $\tilde{u} = \tilde{\xi}^n f'(\eta)$ avec $m = 1/5$, $n = 3/5$,
5.2 Montrer que ce système admet une solution autosemblable pour la température $\tilde{T} = \tilde{\xi}^p g(\eta)$, valeur de p ? (ne pas confondre $g(\eta)$ et la gravité g).

5.3 On rappelle que $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont une fonction de ξ et η (et réciproquement). La transformation des dérivées s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{x}}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}}\frac{\partial}{\partial \eta} \text{ et } \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{y}}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{y}}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

montrer que l'on a alors

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi} - m\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\xi^m}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

5.4 Montrer que si $\tilde{u} = \tilde{\xi}^n f'(\eta)$ alors $\tilde{v} = -(\xi^{m+n-1}((n+m)f - m\eta f'))$.
5.5 Montrer que puisque $\tilde{T} = \tilde{\xi}^p g(\eta)$ l'équation de l'énergie s'écrit :

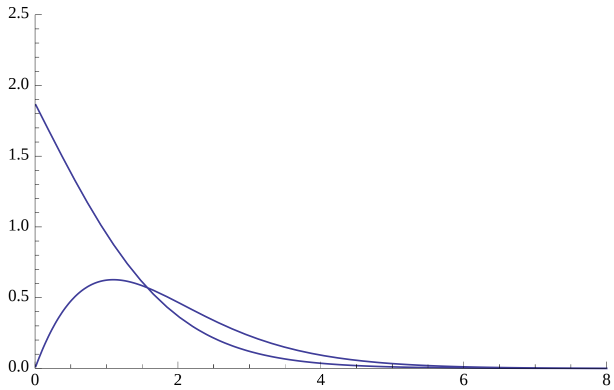
$$(pf'g - (m+n)fg') = \frac{1}{Pr}g''$$

5.6 Montrer que l'équation de la quantité de mouvement est de la forme

$$\xi^{2n-1}(nf'^2 - (m+n)ff'') = \xi^{n-2m}f''' + x^p g(\eta),$$

vérifier que les m, n et p obtenus sont cohérents.
5.7 Ecrire le système autosemblable complet avec ses conditions aux limites.
5.8 Sur la figure ci dessous qui représente la solution du problème pour g et f' à $Pr = 1$, identifier g, f' et η
5.9 Tracer à main levée les courbes pour $Pr = 7$ et 0.7.

6. Retour au solide :
6.1 Expression du Nusselt à la paroi.
6.2 De la moyenne de Nu sur la longueur L en déduire l'expression du coefficient d'échange h à mettre dans la question 1 et 2. Quelle est la valeur de Bi en fonction de α, k, g, L... Pour $Pr = 1$ lire la valeur de $g(0)$ sur le graphe.
6.3 Conclure.



Correction

• équation de la chaleur

On cherche la solution sous forme de variables séparées $\bar{T}_k = A_k e^{-k^2\bar{t}}\cos(k\bar{y})$. Avec $k\tan(k) = Bi$ (par la condition aux limites) et avec la condition initiale :

$$\bar{T} = \Sigma_{i>0}\frac{2\sin(k_i)}{k_i + \sin(k_i)\cos(k_i)}exp(-k_i^2\bar{t})\cos(k_i\bar{y})$$

voir PC et cours. Dans cette équation si Bi tend vers 0, k_1 tend vers 0 car $k_1\tan(k_1) = Bi$, donc $k_1{\sim}Bi^{1/2}$ et

$$\bar{T} \sim \exp(-Bi\bar{t})(1 - Bi\bar{y}^2/2 + ...),$$

A Bi petit $\bar{T}$ varie peu, la bonne échelle de temps est $Bi\bar{t} = \hat{t}$. On remarque que c'est un problème régulier : si $Bi \to 0$, la solution reste 1.

• équation de la chaleur système mince

L'équation intégrée sur l'épaisseur donne $\frac{\partial}{\partial t}\int_{-1}^{1}\bar{T}d\bar{x} = [\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}}]_{-1}^{1}$, avec $[\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}}]_{-1}^{1} = -Bi\bar{T}(1,\bar{t}) - Bi\bar{T}(-1,\bar{t})$
Dans le point de vue "système mince" on suppose que la température est quasi constante en espace dans le milieu considéré et varie en temps selon :

$$\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\bar{T}(\bar{t}) = -Bi\bar{T}(\bar{t})$$

donc la température varie en $\bar{T} = 1.e^{-Bi\bar{t}}$ la température est constante en espace.

Quand on est dans l'approximation des "système minces" ($Bi \ll 1$), on suppose que la température est uniforme en espace, et on fait directement le bilan d'énergie : variation d'énergie interne égale flux aux bornes. La variation d'énergie interne de toute la tranche par unité de hauteur et de profondeur (symbolisé par S) est $\rho c_p(2LS)\frac{\partial}{\partial t}T(t)$ le flux par unité de hauteur et de profondeur sur les deux faces extérieures $2h(T - T_{ext})S$. On retrouve bien la même expression avec dimensions. Dans le cas des systèmes minces, le temps n'est plus le temps diffusif $L^2/a = \rho c_p L^2/k$ mais bien $(L^2/a)/Bi = \rho c_p L/h$, il ne dépend plus de k, il est plus long. La température a donc le temps de diffuser dans l'objet pour que la température soit à peu près uniforme (à l'ordre Bi près).

Un autre pôint de vue serait de faire un développement (régulier) en puissances de Bi :

$$\bar{T} = \bar{T}_0 + Bi\bar{T}_1 + Bi^2\bar{T}_2 + ...$$

• Couche limite pour la plaque

Comme il ne se passe rien si on ne tient pas compte de la viscosité, c'est qu'il existe une couche limite ténue près de la paroi, soit δ son épaisseur et plaçons nous à la distance L du bord d'attaque.
L'incompressibilité et le terme de dérivé totale nous donnent $V_0 = \delta U_0/L$.
La condition de flux à la paroi impose que $\phi_p = k(\delta T)/\delta$
Manifestement, le terme moteur est la force d'Archimède, $\rho g\alpha\Delta T$ qui intervient dans le gradient longitudinal, l'équilibre longitudinal donne : $\rho U_0\frac{U_0}{L} = \rho g\alpha\Delta T$ l'ordre de grandeur est : $U_0 = (Lg\alpha(\delta T))^{1/2}$.
Cette vitesse doit être annulée à la paroi par les effets visqueux, donc : $U_0\frac{U_0}{L} = \nu\frac{U_0}{\delta^2}$ ce qui permet d'éliminer d'écrire $\frac{\delta^4}{L^4} = \frac{\nu^2}{U_0^2L^2}$, et $\frac{\delta^4}{L^4} = \frac{\nu^2}{(Lg\alpha(\phi_p\delta/k))L^2}$ soit $\frac{\delta}{L} = G^{-1/5}$. avec le nombre de Grashof : $G = \frac{g\alpha(\phi_p\delta/k))L^4}{\nu^2}$

Le Problème sans dimension final en posant : $x = L\tilde{x}$, $y = LG^{-1/5}\tilde{y}$, $u = (L^2 g\alpha\phi_p/k)^{1/2}G^{-1/10}\tilde{u}$ *etc* les équations deviennent :

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{y}}=0,\qquad \tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2}+\tilde{T},\qquad \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}}=0,\qquad \tilde{u}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{y}}=\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\tilde{y}^2}$$

avec les conditions aux limites $\tilde{u}(\tilde{x},0)=\tilde{v}(\tilde{x},0)=0$, $\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{y}}(\tilde{x},0)=-1$, et $\tilde{u}(\tilde{x},\infty)=0$, $\tilde{T}(\tilde{x},\infty)=0$, $\tilde{p}(\tilde{x},\infty)=0$
On note que la pression est nulle.

- **Variables de similitude**

Nous utilisons la méthode classique : par dilatation : $\tilde{u}=u^*\hat{u}$, $\tilde{T}=T^*\hat{T}$ $\tilde{x}=x^*\hat{x}$, $\tilde{y}=y^*\hat{y}$ ...
l'invariance des équations donne : $u^*=x^*/y^{*2}, v^*=x^*u^*/y^*, u*^2=T^*x^*$
L'invariance du flux à la paroi donne $T^*/y^*=1$,
donc après calcul : $y^*=x^{*1/5}$, $T^*=x^{*1/5}$, $u^*=x^{*3/5}$ donc il existe une fonction implicite liant la vitesse aux coordonnées $F_1(\tilde{u},\tilde{x},\tilde{y})=0$
par l'invariance cela donne $F_1(\hat{u}u^*,\hat{x}x^*,\hat{y}y^*)=0$
la relation implicite liant la vitesse et ses coordonnées devient $F_1(\hat{u}x^{*3/5},\hat{x}x^*,\hat{y}x^{*1/5})=0$, par élimination de x^*, elle s'écrit $F_2(\hat{u}/(\hat{x}^{3/5}),\hat{x}x^*,(\hat{y}/(\hat{x}^{1/5})=0$, vrai pour tout x^*, donc cet argument n'existe pas. Donc $\hat{u}/(\hat{x}^{3/5})$ est fonction de $(\hat{y}/(\hat{x}^{1/5})$ ou $\tilde{u}/(\tilde{x}^{3/5})$ est fonction de $(\tilde{y}/(\tilde{x}^{1/5})$ avec $\xi=\tilde{x}$, $\tilde{u}=\xi^{3/5}f'(\eta)$ et $\eta=\tilde{y}/\tilde{x}^{1/5}$, on en déduit $\tilde{v}=\xi^{-3/5}V(\eta)$. De même, on en déduit que $\tilde{T}=\xi^{1/5}g(\eta)$.

- **Solutions semblables pour la plaque**

On pose pour les variables de similitude : $\tilde{u}=\tilde{x}^n f(\eta)$ et $\tilde{T}=\tilde{x}^p g(\eta)$, $\quad\eta=\tilde{y}/\tilde{x}^m$
La transformation des dérivées s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}=\frac{\partial\xi}{\partial\tilde{x}}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}\text{ et }\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}=\frac{\partial\xi}{\partial\tilde{y}}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

ce qui donne :

$$\xi=\tilde{x},\quad \eta=\tilde{y}/\tilde{x}^m\text{ et donc }\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}=\frac{\partial}{\partial\xi}-m\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial}{\partial\eta},\quad\text{et}\quad\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}=\frac{1}{\xi^m}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

la vitesse $\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{v}=-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}}$ ou $\frac{1}{\xi^m}\frac{\partial}{\partial\eta}v=-(\xi^{n-1}(nf'-m\eta f''))$ or $\int\eta f''=[\eta f']-\int f'$ donc la vitesse tranverse est : $\tilde{v}=-(\xi^{m+n-1}((n+m)f-m\eta f'))$ on pourrait introduire une fonction de courant $\tilde{\psi}$. Les dérivées

$$\tilde{u}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}=\xi^n(f'\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{(m+n)}{\xi}f\frac{\partial}{\partial\eta}),\text{ et }\frac{\partial^2}{\partial\tilde{y}^2}=\frac{1}{\xi^{2m}}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

ce qui donne pour la quantité de mouvement

$$\xi^{2n-1}(nf'^2-(m+n)ff'')=\xi^{n-2m}f'''+x^pg(\eta)$$

avec $n-1=-2m$. Equation de la chaleur comme $\xi^{2m+n-1}=1$

$$Pr(pf'g-(m+n)fg')=g''$$

avec $n-1=-2m$ et $2n-1=p$ les équations sont

$$f'''+(m+n)ff''-nf'^2+g(\eta)=0,\quad g''+(m+n)fg''-pf'g'=0$$

Note on retrouve bien pour les cas suivants vus en PC et et cours :
$(n,m,p) = (1,0,0)$ point d'arrêt : $f''' + ff'' - f'^2 + ..$ et $g" + Pr(fg') = 0$
$(n,m,p) = (0,1/2,0)$ Blasius T imposé : $f''' + ff''/2 + ..$ et $2g'' + Prfg' = 0$
$(n,m,p) = (0,1/2,1/2)$ Blasius q imposé : $f''' + ff''/2 + ..$ et $2g'' + Pr(fg' - f'g) = 0$
$(n,m,p) = (1/2,1/4,0)$ plaque vert. T imp. : $f''' + 3/4ff'' - (1/2)f'^2 + g = 0$ e t $4g'' + 3Prfg' = 0$
$(n,m,p) = (1/5,2/5,-3/5)$ Panache : $5f''' + 3ff'' - f'^2 + 5g = 0$ et $5g'' + 3Pr(fg' + f'g) = 0$

Le problème autosemblable est ici $n = 3/5$ $m = 1/5$ $p = 1/5$:

$$5f''' + 4ff'' - 3f'^2 + 5g = 0; \qquad 5g'' + Pr(4fg' - gf') = 0;$$

Conditions aux limites $f'(0) = f(0) = f'(\infty) = 0$ $g(\infty) = 0$ et $g'(0) = -1$;.

le Nusselt $Nu = \tilde{x}^{-2/5} G^{1/5} g(0)^{-1}$.

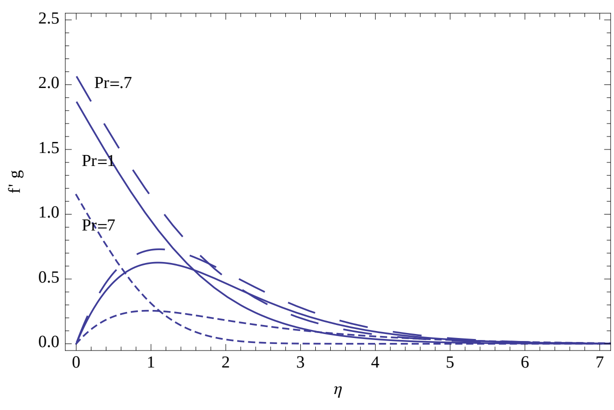


FIGURE 1 – trait plein $Pr = 1$, petit pointillé $Pr = 7$, gros $Pr = 0.7$; f' varie de 0 à 0 et g varie de 1 à 0.