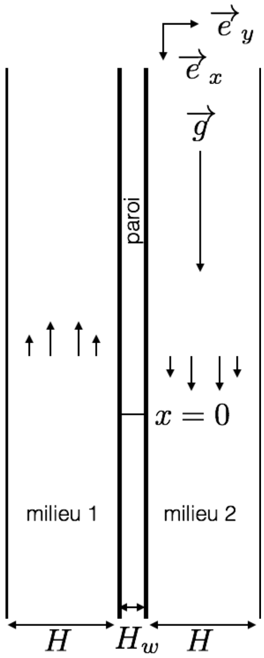
Vendredi 15 Janvier 2015

Transferts Thermiques dans les Fluides

MF 204

durée 2h30 heures, tout document personnel autorisé

Echangeur par convection forcée et naturelle.



On veut étudier l'écoulement créé à l'intérieur d'un radiateur d'appartement. L'eau chaude circule haut en bas sous l'action de la gravité et d'un gradient de pression imposé par l'installation. L'air chaud monte de bas en haut car il est réchauffé par convection naturelle. Pour les besoins de l'énoncé, on simplifie fortement la configuration. On considère un écoulement de liquide de haut en bas (milieu 2), à droite, et un écoulement de bas en haut (milieu 1) à gauche. Les écoulements sont établis, 2D plans, stationnaires et laminaires, les plans sont infinis, parallèles de largeur H, séparés d'une distance H_w (voir figure). Les fluides 1 et 2 sont incompressibles. Les viscosités sont faibles, le nombre de Prandtl est d'ordre unité dans les deux écoulements.

Bien entendu un vrai radiateur a une taille finie, l'air, aspiré par le bas venant de la pièce froide est chauffé dans le canal (par l'autre canal rempli d'eau qui est chaude). Il sort alors sous forme d'un panache en haut (on ne considère pas ces écoulements).

Les parties sont assez indépendantes. En effet la partie 1 traite de l'écoulement dans le "milieu 2" sans tenir compte du "milieu 1". La partie 2 aussi mais présente une discontinuité de température sur le mur central. La partie 3 traite de l'écoulement dans le "milieu 1" sans tenir compte du "milieu 2". La partie 4 réunit les deux avec une approximation grossière.

1.1 Ecrire les équations de Navier Stokes sans dimension (et les équations de la chaleur) dans le canal de gauche et le canal de droite.

1.2 Quelles sont les conditions aux limites possibles tout à droite et tout à gauche ?

1.3 Quelles sont les conditions aux limites possibles en haut et en bas (si on fait une simulation numérique dans un domaine borné) ?

1.4 Quels sont tous les nombres sans dimension que l'on peut construire *a priori*.

1.5 Valeur du nombre de Prandtl pour l'eau et pour l'air.

1.6 Dans toute la suite on néglige la dissipation visqueuse dans les équations de l'énergie (bien entendu on ne néglige pas la diffusion), quels nombres sans dimension sont donc très faibles ?

2. Régime établi, stationnaire en temps, convection forcée à droite.
Dans un premier temps on néglige le régime de convection naturelle du canal de gauche. On ne travaille que sur le "milieu 2." La température du mur de séparation entre les deux canaux vaut T_w sur tout sa largeur et de haut en bas, elle est supposée uniformément constante dans cette question. Le problème est invariant par translation en x. De plus, la température du mur de droite est supposée constante de valeur T_{20}.
2.1 Compte tenu des symétries écrire l'équation de la chaleur (cf 1.6).
2.2 Compte tenu des symétries écrire les équations de la quantité de mouvement et l'incompressibilité (on n'oublie ni la gravité, ni le gradient de pression moteur, noté $-\Pi$).
2.3 Ecrire ces équations sans dimension
2.4 Quelle est la jauge (l'échelle) de la vitesse ?
2.5 Quelle est la solution stationnaire pour la vitesse u_2 et v_2 et pour p_2 dans le canal qui descend.
2.6 Calculer la distribution de température stationnaire entre les deux plaques de droite.
2.7 Tracer le profil de $T_2(y)$ et les lignes iso température.
2.8 Tracer la vitesse $u_2(y)$
2.9 Quel est le nombre de Nusselt à la paroi de gauche du canal de droite ?

3. Régime établi, stationnaire en temps, convection forcée à droite, saut de température.
On néglige toujours le régime de convection naturelle du canal de gauche. La température du mur de droite est supposée toujours constante de valeur T_{20}. La température du mur de séparation entre les deux canaux vaut maintenant aussi T_{20} sur tout sa largeur, elle est supposée varier dans cette question en un certain $x = 0$ et passer à T_{21}. Le problème n'est plus invariant par translation en x.
3.1 Compte tenu des hypothèses, justifiez que la température du fluide reste constante égale à T_{20} pour $x < 0$ loin de 0.
3.2 Si en $x = 0$ on change la température du mur central de T_{20} à T_{21} et que l'on regarde la variation de température en $x > 0$, dites pourquoi il apparaît une couche limite thermique,
3.3 Quelle est la nouvelle équation de température lorsqu'il y a une discontinuité de température à la paroi ?
3.4 Justifiez l'existence d'une couche limite thermique
3.5 Quelle est l'épaisseur de cette couche limite thermique ?
3.6 Quelle est la solution pour la température ?
3.7 Montrez que le nombre de Nusselt est en ${Pe_2}^{1/3}(x/H)^{-1/3}$
3.8 En déduire le Nusselt moyen pour une longueur H.

4. Régime établi, stationnaire en temps. Convection naturelle à gauche dans le "milieu 1".
Dans un second temps on considère que le fluide chaud qui descend impose une température constante au mur de séparation entre les deux canaux qui vaut T_w, elle est supposée constante dans cette question. La température du mur de gauche est fixée à T_{10}, tous les champs de vitesse et de température sont invariants par translation et stationnaires.
4.1 Compte tenu des symétries écrire l'équation de la chaleur.
4.2 Calculer la distribution de température stationnaire entre les deux plaques de gauche.
4.3 Qu'est ce que l'approximation de Boussinesq ?
4.4 Compte tenu des symétries écrire les équations de la quantité de mouvement et l'incompressibilité.
4.5 Ecrire ces équations sans dimension

4.6 Quelle est la jauge de la vitesse ?
4.7 Quelle est la solution stationnaire pour la vitesse u_1 et v_1 et pour p_1 dans le canal qui monte.
4.9 Tracer le profil de température T_1
4.9 Tracer les lignes iso température.
4.10 Tracer la vitesse $u_1(y)$
4.11 Quel est le nombre de Nusselt à la paroi de droite du canal de gauche ?

5. Convection naturelle à gauche et forcée à droite. Ecoulements stationnaires mais non établis.
On suppose maintenant les parois extrêmes adiabatiques, l'échange de chaleur ne se fait qu'au travers de la paroi centrale.
5.1 Justifier que l'équation de la chaleur s'écrit en première approximation entre chacun des plans pour les milieux $i = 1, 2$:

$$\rho_i c_{pi}(\frac{\partial T_i u_i}{\partial x} + \frac{\partial T_i v_i}{\partial y}) = k_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2}$$

quel est l'ordre de grandeur relatif du terme négligé ?
5.2 justifiez alors :

$$\rho_i c_{pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H (u_i T_i) dy = k_i \left[\frac{\partial T_i}{\partial y}\right]_0^H$$

5.3 On va faire dans toute la suite une analyse analogue à celle des systèmes minces (à faible nombre de Biot) : la température varie peu en espace y au travers de chaque canal, donc $T_i(x, y) \simeq T_i(x)$.
En déduire qu'en première approximation :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^H (u_i T_i) dy \simeq Q_i \frac{\partial}{\partial x} T_i$$

où Q_i serait le débit volumique moyen du canal considéré. Qu'en pensez vous ?
5.4 Pour le canal de gauche, le mur central et le canal de droite sont représentés par un coefficient d'échange. Pour le canal de droite le mur central et le canal de gauche sont représentés par un coefficient d'échange. En déduire que l'équation simplifiée moyenne de la chaleur dans les domaines 1 et 2 a la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} T_1 = A_1(T_1 - T_2) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x} T_2 = -A_2(T_1 - T_2),$$

identifiez A_1 et A_2.
5.5 En déduire la distribution d'écart de température moyenne $(T_1 - T_2)$ en fonction de la longueur x considérée.
5.6 on se donne une longueur L d'échangeur, trouvez la relation entre $T_1(x = 0)$,$T_2(x = 0)$,$T_1(x = L)$,$T_2(x = L)$ et les autres paramètres. Il s'agit de la formule fondamentale des échangeurs.

Bibliographie :
W. Aung. Fully Developed Laminar Free Convection Between Vertical Plates Heated Asymmetrically. International Journal Heat Mass Transfer, 15 :1577–1580, 1972.

Correction

1. pas de difficulté, il faut inventer des conditions à droite et à gauche. En haut et bas on peut mettre un Neuman. Eckert est nul partout.

2. On a posé $T = T_{20} + (T_w - T_{20})\bar{T}$ donc et comme Pas de dissipation visqueuse $E_2 = 0\,;\, 0 = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}$,
   $\bar{T}(0) = 0$ et $\bar{T}(1) = 1$ la température est linéaire $\bar{T} = \bar{y}$
   Navier Stokes $0 = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + 1$, avec $\bar{u}(0) = 0$ et $\bar{u}(1) = 1$
   avec $U_{20} = (\Pi + \rho_2 g)H^2/(\mu_2)$
   ce qui donne $\bar{u} = (\bar{y} - \bar{y}^2)/2$
   Profil de Poiseuille.

3 . PC, cours solution de Lévêque

4 . Dans la partie gauche, On a posé $T = T_{10} + (T_w - T_{10})\bar{T}$ donc et comme pas de dissipation visqueuse $E_1 = 0\,;\, 0 = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}$,
   $\bar{T}(0) = 0$ et $\bar{T}(1) = 1$ la température est linéaire $\bar{T} = \bar{y}$

   Navier Stokes $0 = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} - \bar{y}$,
   avec $U_{10} = (\alpha g(T_w - T_{10}))H^2/\mu_1$
   avec les CL $\bar{u}(0) = 0$ et $\bar{u}(1) = 1$ ce qui donne $\bar{u} = (y - y^3)/6$

5 . Echangeur simplifié
Il s'agit des équations de la chaleur sous forme conservative en négligeant la dérivée longitudinale lente.

On symbolise l'autre par un coefficient d'échange.

$$\frac{\partial}{\partial x} T_1 = \frac{h}{\rho_1 c_{p1} Q_1}(T_1 - T_2) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x} T_2 = -\frac{h}{\rho_2 c_{p2} Q_2}(T_1 - T_2),$$

$$\frac{d(T_1 - T_2)}{T_1 - T_2} = -(\frac{h}{\rho_1 c_{p1} Q_1} + \frac{h}{\rho_2 c_{p2} Q_2})dx$$

qui s'intègre... c'est la méthode "log mean temperature difference"