Mardi 20 Janvier 2015

Transferts Thermiques dans les Fluides

MF 204

durée 3h heures, tout document personnel autorisé

Transferts de chaleur dans un écoulement de Couette plan.

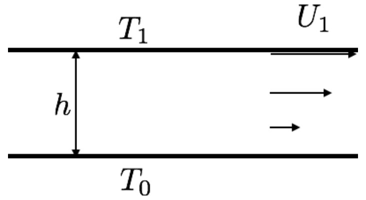

FIGURE 1 – La configuration de type Couette plan.

On se donne une configuration constituée de deux plans parallèles, séparés d'une distance h, le plan du haut en $y = h$ se déplace à la vitesse U_1 suivant $\vec{e}_x$, le plan du bas en $y = 0$ est fixe. Il n'y a pas de gradient de pression, le moteur de l'écoulement est le déplacement de la paroi supérieure, un fluide Newtonien se déplace entre les deux plans. Le dispositif est assez grand pour qu'on le considère infini. L'écoulement est bidimensionnel, plan, laminaire et stationnaire. Le fluide est incompressible. La viscosité est faible, le nombre de Prandtl est d'ordre unité.

La température de la plaque du haut est T_1, la température en bas est T_0, ces deux températures sont constantes en temps et espace sauf dans la question 4. et 5. La dissipation visqueuse est négligée à partir de 4. La viscosité est constante sauf dans 6. La densité est constante sauf dans la question 7. La gravité n'est pas considérée sauf en 7
Les parties sont assez indépendantes.

1.1 Ecrire les équations de Navier Stokes sans dimension avec les conditions aux limites.
1.2 Ecrire l'équation de la chaleur sans dimension avec ses conditions aux limites (parmi les choix possibles en prendra $\bar{T} = 0$ en haut)

2. On néglige la dissipation visqueuse dans un premier temps.
2.1 Quelle est la solution stationnaire pour la vitesse u et v et pour p.
2.2 Calculer la distribution de température stationnaire entre les deux plaques.
2.3 Tracer les iso température.
2.4 Quel est le nombre de Nusselt à la paroi du bas ?

3. On ne néglige pas la dissipation visqueuse dans un premier temps, on garde toujours la densité constante
3.1 Quelle est la solution stationnaire pour la vitesse u et v, calculer le tenseur D_{ij}.
3.2 Calculer la distribution de température entre les deux plaques.
3.3 Tracer le profil de température, les iso température.
3.4 Montrer que si la dissipation est négligeable alors on retrouve la question 2.2

A partir de cette question, la dissipation visqueuse est négligée.

4. Dans cette partie la température est initialement établie comme dans la question 1. Au temps $t = 0$, on change brusquement la température de la paroi inférieure pour la mettre à T_1.
4.1 Mettre cette condition sans dimension. Rappeler les dimensions choisies, et l'échelle de temps en fonction de h et U_1.
4.2 Montrer que si l'on se place loin d'une éventuelle entrée et sortie, le champ de vitesse $(\bar{u}, \bar{v})$ n'a pas d'influence sur l'équation de la chaleur écrite sans dimension.
4.3 On commence par regarder les temps courts, montrer que si $\bar{t} = \varepsilon \tilde{t}$, il existe une couche fine d'épaisseur à déterminer en fonction de ε où la température varie.
4.4 Résoudre explicitement la température aux temps courts avec une solution semblable que l'on déterminera.
4.5 Au temps quelconques, résoudre par superposition d'une somme de fonctions à variables séparées, on ne déterminera explicitement que l'amplitude du premier mode.

5 On reprend la configuration stationnaire en vitesse et température, mais on change la température de T_0 à T_1 en $x = 0$ sur le plan inférieur $y = 0$.
5.1 Ecrire cette condition sans dimension.
5.2 Evaluer l'épaisseur de la couche limite thermique en fonction du Péclet que l'on a défini.
5.3 Résoudre le champ de température en fonction de $\bar{x}$ et d'une nouvelle variable $\tilde{y}$ dans la couche limite thermique (résoudre par variable de similitude). Quel est le nom associé au cas dans un tuyau ?
5.4 Tracer les iso Température.
5.5 Estimer la longueur à partir de laquelle la couche limite thermique a envahi tout l'espace entre les plans.
5.6 Ecrire l'équation de la chaleur dans l'écoulement cisaillé lorsque la température varie entre les deux plans et que la distance longitudinale est longue. Quel est le nom associé au cas dans un tuyau ?
5.7 Tracer différents profils de température en fonction de la variable transverse en différentes abscisses, avant et après le point 0,0.

On revient au cas établi en espace et en temps sans dissipation visqueuse à densité constante, température constante en haut et en bas.

6. On suppose maintenant que la viscosité varie avec la température $\mu(T)$
6.1 Ecrire l'équation de Navier Stokes générale.
6.2 En supposant k constant, montrer que compte tenu des invariances l'équation de la chaleur conserve une solution affine.
6.3 la viscosité varie selon une loi linéaire : $\mu = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)(T - T_0)/(T_1 - T_0)$ en déduire la vitesse $\bar{u}$

On est toujours dans le cas établi en espace et en temps sans dissipation visqueuse à viscosité constante, mais la gravité est orientée de gauche à droite $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{e}_x$.

7. Ici on suppose que la densité varie avec la température $\rho(T)$ suivant l'approximation de Boussinesq
7.1 Montrer que si $U_1 = 0$, et que si $\rho = \rho_0$ constant il faut imposer un gradient pour qu'il n'y ait pas de mouvement.
7.2 Ecrire l'équation de Navier Stokes dans les hypothèses de Boussinesq et l'équation de la chaleur sans dimension en gardant les échelles des questions précédentes (à $U_1 \neq 0$). Introduire un nombre sans dimension devant le terme de température (nombre de Richardson).
7.3 Compte tenu de l'invariance par translation du problème, déterminer le champ de perturbation de pression hydrostatique.
7.4 Résoudre le champ de vitesse $\bar{u}$, commenter l'influence du nombre de Richardson sur cette solution.

Correction

1. Navier Stokes $0 = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$, $\bar{u}(0) = 0$ et $\bar{u}(1) = 1$, Chaleur, On a posé $T = T_1 + (T_1 - T_0)\bar{T}$ donc

$$0 = Pr^{-1}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + 2E\bar{D} : \bar{D}, \text{ avec } \bar{T}(1) = 0 \text{ et } \bar{T}(0) = 1$$

2. Pas de dissipation visqueuse $E = 0$; mais toujours de la diffusion.... La solution est $\bar{u} = \bar{y}$, $\bar{v} = 0$, $\bar{p} = 0$. La ture est $\bar{T} = 1 - \bar{y}$, le Nusselt est 1 (paroi du bas ou du haut !).

3. On a $\bar{D}_{ij} = (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})/2$; donc $\bar{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ et ainsi $2\bar{D} : \bar{D} = 1$. la solution de l'équation de la chaleur $\bar{T} = 1 + (-1 + EPr/2)\bar{y} - EPr/2)\bar{y}^2$ si $E \to 0$ alors on retrouve $\bar{T} = 1 - \bar{y}$ perturbation régulière
4. On doit résoudre avec le temps $h^2/(k/(\rho c_p))$ la chaleur instationnaire $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}$ condition initiale $\bar{T} = 1 - \bar{y}$, aux limites $\bar{T}(0) = \bar{T}(1) = 0$

4.3 sur une échelle de temps ε on chauffe une couche $\sqrt{\varepsilon}$. L'équation de la chameur dans la couche fine $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}$ condition initiale (limite de la solution extérieure en $\bar{y} \to 0$) $\tilde{T} = 1$, aux limites $\tilde{T}(0) = 0$ et le raccord asymptotique $\tilde{T}(\infty) = 1$
Solution semblable avec $erf(\tilde{y}/2/\sqrt{\tilde{t}})$
4.4 sur une échelle de temps O(1), les solutions sont $\Sigma_1^\infty A_n exp(-n^2\pi^2\bar{t})sin(n\pi\bar{y})$
Au temps initial $1 - \bar{y} = \Sigma_1^\infty A_n sin(n\pi\bar{y})$
Le mode 1 en projetant $\int_0^1 (1 - \bar{y})sin(\pi\bar{y})d\bar{y} = \Sigma_1^\infty \int_0^1 sin(\pi\bar{y})A_n sin(n\pi\bar{y})d\bar{y}$ donne $1/\pi = A_1/2 + 0$
5. Equation de la chaleur $\bar{y}\partial_{\bar{x}}\bar{T} = Pe^{-1}\partial^2_{\bar{y}}\bar{T}$ conditions $\bar{T}(\bar{x} < 0, 0) = 1$ $\bar{T}(\bar{x} > 0, 0) = 0$ $\bar{T}(\bar{x}, 1) = 0$ on trouve une couche limite thermique en $Pe^{-1/3}$ Lévêque pour une disatnce ce l'ordre de Pe, les couches limites fusionnent, problème de Graetz.
6. on va poser $\mu = \mu_0(1 + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0}(\frac{T - T_0}{T_1 - T_0}))$ on pose $m = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0}$ et on a toujours $\bar{T} = 1 - \bar{y}$. donc Navier Stokes $0 = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}[(1 - m\bar{y})\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\bar{u}]$ On trouve $\bar{u} = Log(1 - m\bar{y})/Log(1 - m))$ si $m \to 0$ on retrouve le profil linéaire, c'est donc une perturbation régulière.