



TRANSFERTS THERMIQUES  
DANS LES FLUIDES.

Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées  
COURS MF202 2018-2019

Lagrée Pierre-Yves  
CNRS/ Sorbonne Université,  
Institut Jean Le Rond d'Alembert,  
[pyl@ccr.jussieu.fr](mailto:pyl@ccr.jussieu.fr)

25 octobre 2018

page blanche

## Présentation

Ce cours s'inscrit dans la continuité du cours de mécanique des fluides de première année : "fluides incompressibles" et il est en liaison avec celui de deuxième année de "turbulence". Des notions de Mathématiques Appliquées (à la résolution analytique ou numérique des équations aux dérivées partielles) et de Mécanique des Milieux Continus (dispensées en première et deuxième année) sont aussi grandement utilisées. Ce cours de "Thermique" est principalement orienté vers les transferts de chaleur dans les fluides (équations de Navier Stokes) en laminaire et en turbulent (le rayonnement n'est quasiment pas abordé car mettant en jeu des mécanismes très différents).

Pour pouvoir apprécier les subtilités des simplifications des équations de transfert de la mécanique des fluides, on suppose connues les hypothèses et les équations de la mécanique des milieux continus. Lors du premier cours on rappelle rapidement les équations fondamentales et le principe de la construction des lois de comportement. Ensuite, le point de vue de "l'analyse phénoménologique" sera adopté pour simplifier ces équations. Il s'agit d'une méthode qui permet de simplifier les équations de la mécanique des fluides (mais en fait de tout autre domaine) en mettant l'accent sur les ordres de grandeurs dominants. On fait alors apparaître des nombres sans dimension dans les équations de la "Mécanique", ce qui permet de simplifier la résolution en faisant disparaître des termes en justifiant les approximations et en réduisant les équations aux dérivées partielles à leurs termes principaux. On donne ainsi un sens physique aux équations en retenant les termes qui ont effectivement de l'importance. La méthode systématique utilisée pour résoudre ces équations simplifiées dépendant de petits paramètres est la théorie des développements asymptotiques raccordés (*matched asymptotic expansion*). Un rappel sous forme simplifiée est présenté en exercice de révision.

D'une certaine manière ce cours est donc consacré à la simplification des équations de la thermohydrodynamique, on le fait en se guidant avec les nombres sans dimension. On discute ainsi les approximations classiques de cette discipline.

- On commence par rappeler les équations générales de la mécanique (lois de conservation) et on présente très rapidement comment les équations constitutives sont obtenues à partir de la thermodynamique des processus irréversibles (Chap. 1). Ce chapitre ne présente aucune simplification des équations mais au contraire leur complexité.
- L'équation de la chaleur (cas de la diffusion dans un solide) est ensuite résolue dans des cas simples de manière à fixer les idées et à mettre en évidence le problème de l'écriture des conditions aux limites : c'est ainsi que le facteur d'échange est introduit. Cette simplification drastique sert à simplifier notre ignorance des échanges extérieurs (Chap 2). La PC1 rappelle des solutions classiques et fondamentales de l'équation de la chaleur. La PC2 est un TP numérique de résolution par éléments finis de cette équation.
- Après la diffusion pure, l'équation de la chaleur dans un fluide en mouvement est ensuite présentée, l'exemple de l'effet d'entrée dans un tube chauffé est examiné.

Il permet de visualiser la compétition entre la diffusion et la convection, menant à l'apparition des couches limites thermiques. La PC3 examine ce problème de manière plus simplifiée et présente des liens avec la PC1. Après la convection forcée interne, la convection forcée externe est examinée. Le fluide n'est pas confiné mais passe autour d'un objet qu'il refroidit. La PC4 présente un cas de couplage thermique fluide/solide en convection forcée externe.

- Après avoir étudié la convection forcée (échange de chaleur grâce à un écoulement initial), la convection libre est abordée. Dans ce cas, l'écoulement est créé par l'échauffement du fluide. La PC5 et la PC6 montrent la mise en mouvement d'un fluide dilatable sous l'action d'un réchauffement.

En résumé, tout le monde connaît déjà depuis fort longtemps l'équation de la chaleur (cette équation est l'archétype des "équations de la physique", et ce que l'on appelle le couplage "multiphysique" qui consiste souvent à résoudre des Laplaciens instationnaires). Elle est ici rappelée sans dimension :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

le but de ce cours est de l'établir dans toute sa complexité en rajoutant tous les termes oubliés ou négligés par les présentations des cursus précédents simplifiés et de mettre en évidence le rôle important de nombres sans dimension et des conditions aux limites.

## Plan

### Cours

- 1. Généralités, équations de la thermomécanique des fluides.
- 2. Le coefficient d'échange, son importance dans les transferts thermiques.
- 3. La convection forcée.
- 4. La convection libre.
- 5. Introduction à la couche limite turbulente (sur internet).
- 6. La méthode intégrale (sur internet).
- 7. Transferts de masse (sur internet).

### Exercices et Pales de révision sur le Web

- Un exemple simple de développement asymptotique raccordé.
- La couche limite hypersonique.
- Le jet turbulent.
- Le panache turbulent.
- Le réacteur MOCVD.
- De Poiseuille au panache via le jet.
- La convection thermique mixte.
- Le refroidissement d'un pôt d'échappement.
- Échanges thermiques dans une centrale nucléaire.
- Consulter les PC de couche limite du cours MF101.
- Consulter les ouvrages de thermique et de mécanique des fluides de la bibliothèque.
- Les fichiers de ce cours sont consultables sur  
<http://www.ida.upmc.fr/~lagree/COURS/ENSTA/coursENSTA.html>  
 n'hésitez pas à cliquer sur les liens dans ces pages.
- La page officielle est <https://3w2.ensta.fr/%7Edfr/Cours/index.php?sigle=MF202>

### Pales de révision

- Echauffement d'eau intersticielle par du magma.
- Etude de la convection libre verticale dans une cavité.
- Etude de la convection mixte entre deux vitrages.
- Convection libre dans une cavité carrée.
- Convection mixte dans une cavité élancée
- Convection forcée instationnaire.
- Convection forcée dans le procédé de fabrication du verre fondu.
- Ecoulement catabatique (vent le long des montagnes).
- Convection mixte avec Magnétohydrodynamique.
- etc.

Exemples de mots clefs Google :

convection forcée, solution de Lévêque thermique, solution de Graetz, convection libre, couche limite thermique, transferts thermiques fluides, transferts de masse,....

iv

page blanche

# Généralités, équations de la thermomécanique des fluides.

## Résumé

Dans ce chapitre nous rappelons que les équations de la dynamique et de la thermique proviennent de l'application de la "Thermodynamique des Processus Irréversibles". La T.P.I. décrit une extension de la "thermodynamique classique" aux "milieux continus". Nous nous gardons ici de faire la théorie complète "propre", nous préférons rappeler rapidement les idées qui sont utilisées. Il s'agit seulement d'introduire les quantités utiles pour établir l'"équation de la chaleur" avec ses conditions aux limites. Les conditions aux limites simplifiées pratiques mettant en jeu le coefficient d'échange seront présentées dans le chapitre suivant.

## 1 Généralités

### 1.1 Problème

Connaissant une géométrie dans laquelle s'écoule un fluide, des conditions aux limites et toutes les caractéristiques physiques du fluide et du solide, il nous faut en déduire l'élévation de température, le flux à fournir pour chauffer ou à évacuer pour refroidir...

### 1.2 Exemples

- étudiant.e.s dans un amphitheâtre (chacun.e est une source de 70W)
- chauffage central/ centrale nucléaire/ centrale thermique
- navette spatiale
- réacteurs chimiques : chauffer pour apporter l'énergie de la réaction chimique, ou au contraire refroidir une réaction exothermique.
- moteurs thermiques (voitures avions...)... car pour faire fonctionner un moteur, il faut une source chaude et une source froide...
- la cuisine, de la cuisson à la décongélation...
- processeur, échauffement des composants électroniques
- l'alternance des saisons, les moussons, El Niño..
- ...
- tout !

## 2 Cadre de la théorie :

Il s'agit en fait d'un rappel de ce que nous avons vu en thermo"statique" dans notre jeunesse, où les échanges étaient toujours produits par des suites d'états d'équilibres quasi statiques et où la dynamique était en fait absente. Notre cadre est celui de la mécanique des "milieux continus". Le milieu est dit "continu" lorsqu'il est étudié à une échelle très supérieure à celle des variations discrètes dues au caractère corpusculaire de la matière. Ces variations rapides sont lissées (une des échelles fondamentales pour un gaz est le libre parcours moyen des molécules, nous en reparlerons plus loin). Le but du jeu est d'adapter la thermostatique à un milieu qui n'est pas homogène, on va donc définir par exemple une énergie interne locale  $e(x, y, z, t)$ . Mais qui dit énergie, dit conservation ; donc il faut auparavant écrire les lois de bilan.

### 2.1 Lois de conservation

Les équations fondamentales (*Basic Equations*) de la mécanique des "milieux continus" expriment les lois générales de la physique indépendamment des propriétés "spéciales" des matériaux. Les lois de conservation (*Balance Laws*) pour un domaine  $D$  de frontière  $\partial D$  peuvent être en toute généralité écrites sous la forme :

variation temporelle = terme de flux + création intérieure

$$\frac{d}{dt} \int_D a dv = - \int_{\partial D} J_A ds + \int_D \varphi_A dv$$

$a$  est la quantité qui est conservée (par unité de masse on posera  $a = \rho A$ ), elle est d'ordre tensoriel quelconque.  $J_A$  est le flux associé,  $\varphi_A$  est le terme source volumique.

Attention on distingue cette équation, qui est une loi de bilan, de l'équation de dérivation de l'intégrale qui permet de la réécrire :

$$\frac{d}{dt} \int_D a dv = \int_D \frac{\partial}{\partial t} a dv + \int_D \nabla \cdot (a \underline{u}) dv = \int_D \left( \frac{\partial}{\partial t} a \right) dv + \int_{\partial D} (a \underline{u}) d\underline{S}.$$

Bien entendu, on passe ensuite de la conservation globale à la conservation locale, mais il faut garder à l'esprit que la forme utile pour les schémas numériques et pour la construction générale de la théorie est bien la forme globale. Cette étape de passage au local est délicate, notamment dans le cas où il y a des chocs et où des discontinuités apparaissent (voir le cours d'écoulements compressibles). L'"équation locale" associée à la loi de conservation de  $a$  est, comme, compte tenu de la conservation de la masse

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{\rho} \right) = \frac{d}{dt} a - \left( \frac{a}{\rho} \right) \frac{d}{dt} \rho = \frac{d}{dt} a + a \nabla \cdot \underline{u}$$

et compte tenu de la dérivation d'intégrale, on obtient la forme locale de conservation :

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{\rho} \right) + \nabla \cdot \underline{J}_A - \varphi_A = 0.$$

Les lois classiques de conservation de la masse de la quantité de mouvement et de l'énergie (nous anticipons en fait sur la suite pour fixer les idées) sont alors :

	$a$	$J_A$	$\varphi_A$
masse	$\rho$	0	0
qtt mvt	$\rho \underline{u}$	$-\underline{\sigma}$	$\underline{f}$
énergie	$\rho(e + \frac{1}{2}u^2)$	$\underline{q} - \underline{\sigma} \cdot \underline{u}$	$\underline{f} \cdot \underline{u} + r$

Les équations sont mises sous "forme conservative".

## 2.2 Vecteur densité flux de chaleur

Il faut ensuite exprimer les relations constitutives entre les quantités qui interviennent au bord (les flux  $J_A$ ) et les quantités internes  $a$ , les sources  $\varphi_A$  étant données : c-à-d, il faut ensuite exprimer les relations constitutives entre le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$ , le vecteur flux de chaleur  $\underline{q}$  et les champs des vitesses et de température. Les sources  $\underline{f}$  et  $r$  sont des grandeurs données. Le tenseur des contraintes nous est bien connu (nous rappellerons au passage son obtention). Ici nous nous intéressons particulièrement au vecteur  $\underline{q}$ . Par définition  $\underline{q}$  est le vecteur courant de chaleur (ou densité de flux de chaleur). Il est tel que le taux de chaleur reçu par conduction dans le domaine  $D$  est égal par définition à :

$$\dot{Q} = \int_{\partial D} -\underline{q} \cdot \underline{n} ds$$

le signe  $-$  résulte de la convention adoptée : car  $\underline{n}$  est la normale extérieure. Les unités de ce vecteur sont manifestement une puissance par une surface.

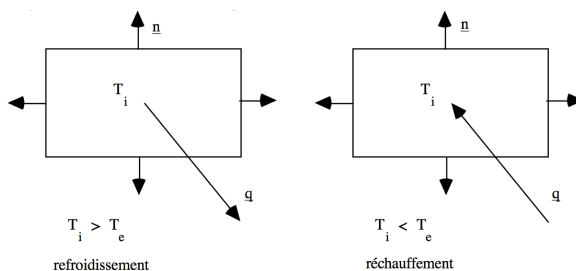


FIGURE 1 – Le flux de chaleur est dans le sens chaud/ froid.

Il s'agit maintenant d'établir la loi de comportement pour  $\underline{q}$ . Le corpus de la "thermodynamique classique" nous est connu, il traite des phénomènes à l'équilibre en temps et en espace, c'est pourquoi on désignera plutôt



la thermodynamique classique sous le nom de "thermostatique". Tout ce que l'on en sait est toujours valable, mais le problème est qu'ici le fluide s'écoule : il y a donc mouvement et donc non équilibre, on fait bien de la thermo"ynamique"... Pour lever cette difficulté, il faut introduire une hypothèse simplificatrice.

### 2.3 Thermodynamique des Processus Irréversibles

Cette hypothèse fondamentale est "l'hypothèse de l'état local associé" : bien que le système soit en mouvement (donc en déséquilibre), chaque unité de volume élémentaire peut être considérée comme approximativement en équilibre du point de vue thermodynamique. Ce qui veut dire aussi que la mécanique des milieux continus est, non seulement, l'étude des phénomènes à des échelles de longueur plus grandes que les échelles atomiques, mais encore à des échelles de temps plus longues que celles qui permettent à l'assemblée de particules contenues dans ce volume élémentaire de retourner à l'équilibre "thermostatique". Bien entendu, cette approche très puissante possède elle même des limitations. Elle est donc qualifiée de "Thermodynamique Irréversible Classique" lorsque l'on fait de la "Thermodynamique Irréversible Étendue"... Mais c'est une autre histoire!

Reprenons donc les Principes de la thermostatique et étendons les.

— **P0**

La thermostatique postule par le principe zéro la possibilité d'équilibre thermodynamique et une sorte de transitivité d'équilibre (A en équilibre avec B, B en équilibre avec C, donc A et C en équilibre). L'existence d'un transfert d'énergie d'une classe à l'autre définit ainsi la notion de température hiérarchisant les classes d'équivalence lors de leur transfert d'énergie.

— **P1**

Le premier principe définit l'énergie interne et le fait que la variation de l'énergie (interne et cinétique) d'un système est égale à la somme du travail des forces extérieures et de la quantité de chaleur reçue. En mécanique des milieux continus, cette énergie est celle contenue dans l'élément de volume considéré soit :  $\rho(e + \frac{1}{2}u^2)$ . La variation est temporelle, il s'agit donc de puissances des efforts et de taux de chaleur reçu, au final (après simplification par la conservation de quantité de mouvement et avec le tenseur des taux de déformation  $D_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}$  ou encore  $\underline{D} = \frac{\nabla \underline{u} + \nabla^t \underline{u}}{2}$ ) :

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\sigma} : \underline{D} - \nabla \cdot \underline{q} + r.$$

Le théorème de l'énergie cinétique est

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = -\underline{\sigma} : \underline{D} + \nabla \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{u}) + \underline{u} \cdot \underline{f}$$

la somme des deux est bien la forme conservative présentée dans le tableau de la page précédente. La variation d'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la somme des puissances des efforts intérieurs ( $\underline{\sigma} : \underline{D}$ ) et extérieurs ( $\nabla \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{u}) + \underline{u} \cdot \underline{f}$ ) qui s'exercent sur le volume de contrôle. La variation d'énergie interne ne tient compte que la la puissance des efforts intérieurs ( $\underline{\sigma} : \underline{D}$ ) plus les échanges de chaleur ( $-\nabla \cdot \underline{q} + r$ ).

— **P2**

Le second principe postule l'existence de l'entropie, nous utiliserons donc  $s$  l'entropie par unité de masse. Cette fonction  $s$  est une fonction d'état des variables  $e$  et  $(1/\rho)$  telle que par définition :

$$ds = \frac{de}{T} + \left( \frac{p}{T} \right) d\left( \frac{1}{\rho} \right).$$

( $-pd(1/\rho)$  est le fameux travail réversible "  $-PdV$  ").

En mécanique on écrira (puisque par conservation de la masse on peut faire disparaître  $d(1/\rho)/dt$  car :  $\rho^{-1}d(\rho)/dt + \nabla \cdot \underline{u} = 0$ ) :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + p \nabla \cdot \underline{u}.$$

L'équation issue de **P1** s'écrit donc aussi (en décomposant le tenseur des contraintes en sa partie réversible et une autre  $\underline{\sigma} = -p\underline{I} + \underline{\tau}$ ) :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \underline{\tau} : \underline{D} - \nabla \cdot \underline{q} + r.$$

On peut écrire cette équation sous une forme de variation temporelle avec flux et création intérieure (par intégration par parties) :

$$\rho \frac{ds}{dt} = (-\underline{\nabla} \cdot \frac{\underline{q}}{T} + \frac{r}{T}) + [\frac{1}{T} \underline{\tau} : \underline{D} + \underline{q} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{T}].$$

On voit que l'on peut comparer cette formule à l'inégalité fondamentale de la thermostatique qui est :

$$\Delta S \geq \frac{\Delta Q}{T}$$

où  $S = \int_D \rho s dv$  est l'entropie totale du volume considéré, et la quantité de chaleur est

$$\int_D r dv + \int_{\partial D} -\underline{q} \cdot \underline{n} ds$$

donc, on identifie la création d'entropie notée  $\rho \dot{\sigma}$  à  $[\frac{1}{T} \underline{\tau} : \underline{D} + \underline{q} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{T}]$ .

$$\rho \frac{ds}{dt} + \underline{\nabla} \cdot (\frac{\underline{q}}{T}) - \frac{r}{T} = \rho \dot{\sigma} \geq 0.$$

l'excès positif  $\dot{\sigma}$ , est le taux de production irréversible d'entropie spécifique. Parfois la variation de  $S$  est écrite sous la forme d'une somme de deux contributions, une externe et une interne :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d^e S}{dt} + \frac{d^i S}{dt}$$

avec

$$\frac{d^e S}{dt} = \int_{\partial D} (\frac{-\underline{q}}{T}) \cdot \underline{n} ds + \int_D \frac{r}{T} dv \quad \text{et} \quad \frac{d^i S}{dt} = \int_D \rho \dot{\sigma} dv$$

Bien entendu, une des dernières conséquences de l'hypothèse de l'état local est que les propriétés de convexité sont toujours vérifiées. Cela permet de retrouver que la chaleur spécifique ( $c_v$ ) est positive ainsi que le coefficient de compressibilité isotherme  $(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p})_T$ .

## 2.4 Inégalité de Clausius Duhem

En éliminant la création de chaleur volumique  $r$  avec l'équation de l'énergie et l'inégalité de l'entropie, on obtient l'"inégalité de Clausius Duhem" (Duhem 1861-1916) :

$$\rho (T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt}) + \underline{\sigma} : \underline{D} - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\nabla} T \geq 0.$$

Cette inégalité est fondamentale, elle est le socle de la thermodynamique des processus irréversibles (elle est écrite en général avec l'énergie libre (notée  $\psi$ ) et  $d\psi + s dT = de - T ds$  ce qui donne  $-\rho (\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt}) + \underline{\sigma} : \underline{D} - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\nabla} T \geq 0$ .)

En faisant apparaître dans  $\underline{\sigma}$  la partie réversible (pression)  $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \underline{\tau}$ , on en déduit que pour que le second principe soit vérifié :

$$\rho T \dot{\sigma} = \underline{\tau} : \underline{D} - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\nabla} T \geq 0.$$

Cette relation met en évidence les sources d'irréversibilité que sont la dissipation visqueuse et la dissipation thermique. Si on introduit d'autres phénomènes (auxquels seront associés des "travaux"), il faudra bien distinguer la partie réversible et la partie irréversible. La première entrera dans la définition de  $s$  (par l'introduction de nouvelles variables d'état), la seconde sera un nouveau terme source pour  $\dot{\sigma}$ . Ces sources sont absentes de la thermostatique (où les déplacements étaient quasistatiques, donc pas de  $\underline{D}$ , et où la température était toujours uniforme, donc pas de  $\underline{\nabla} T$ ).

## 2.5 Lois constitutives

On a donc plus d'inconnues que de champs, il convient de fermer le système en introduisant des relations entre  $\underline{\sigma}$  (6 inconnues),  $\underline{q}$  (3 inconnues),... et  $\rho$ ,  $\underline{u}$  et  $e$  (4 champs) car il n'y a uniquement que 5 équations. Pour ce faire, il convient alors de remarquer que le taux de création d'entropie a une structure bilinéaire :

$$\rho \dot{\sigma} = \Sigma_{\alpha} J_{\alpha} X_{\alpha},$$

où les  $J_\alpha$  sont des "flux" et les  $X_\alpha$  des "forces" (cette définition possède un certain arbitraire). Leur rang tensoriel est quelconque, et ils ont la propriété d'être nuls à l'équilibre. Dans le cas du transfert de chaleur on identifie :  $X_\alpha = \underline{\nabla}T^{-1}$  et  $J_\alpha = \underline{q}$ .

La nature est complexe, mais pas trop ! Cela nous guide pourrait choisir une forme simple de  $\underline{q}$  en fonction de l'écart de  $T$  et de la pression. Autour d'une position d'équilibre  $T = T_e$ , il n'y a pas de variations de  $1/T$ ,  $X$  est bien nul. Par développement limité au voisinage de  $X = 0$  et  $J = 0$  :

$$J = 0 + (\partial J / \partial X)_e X + O(X^2)$$

en posant  $L = (\partial J / \partial X)_e$ , on en déduit la forme  $J = LX$ . En posant  $k = \frac{L}{T^2}$ , on en déduit la forme la plus simple, parmi les formes compliquées pour l'expression du flux de chaleur :

$$\underline{q} = -k \underline{\nabla}T$$

C'est la loi de Fourier, comme cette notation est historique (1847), on lui préfère cette forme avec le gradient de la température à celle issue de la théorie (plus récente) avec le gradient de l'inverse de la température. Si  $k$  le coefficient de conductivité thermique est positif (et comme  $T$  est toujours positif), on a bien :

$$\frac{k}{T} (\underline{\nabla}T)^2 \geq 0.$$

De même (avec le même type d'arguments appliqués aux tenseurs), dans le cadre de cette théorie du premier gradient on a :

$$\underline{\tau} = \lambda \underline{\nabla} \cdot \underline{uI} + 2\mu \underline{D}$$

ou encore :

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \lambda \underline{\nabla} \cdot \underline{uI} + 2\mu \underline{D}$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les "coefficients de Lamé" du fluide,  $\mu$  est la "viscosité" (notée  $\eta$  par certains anglo-saxons), on dit aussi que  $\mu$  est la viscosité dynamique.  $K = \lambda + 2/3\mu$  est le coefficient de viscosité volumique. On note  $\nu = \mu/\rho$  la viscosité cinématique.

Un fluide qui suit cette loi est un fluide newtonien.

Pour que la dissipation  $\dot{\sigma}$  soit positive, on montre qu'il faut que  $K > 0$ ,  $k > 0$  et  $\mu > 0$ . Si ces deux dernières conditions sont bien connues, en revanche  $\lambda + 2/3\mu > 0$  l'est moins. Pour un gaz monoatomique :  $\lambda + 2/3\mu = 0$ , pour un gaz comme l'air, on prend souvent  $\lambda = -2/3\mu$ , c'est inexact, comme l'ont montré des études en acoustique, mais c'est une approximation usuelle. Ces coefficients dépendent de la température. Leur forme est obtenue expérimentalement.

Par exemple, pour l'air,  $\mu$  suit bien la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = (1.711 \cdot 10^{-5}) \sqrt{\frac{T}{273}} \left( \frac{1 + 110.4/273}{1 + 110.4/T} \right)$$

et la conductivité thermique est

$$k(T) = \frac{2.64638 \cdot 10^{-3} T^{3/2}}{T + 254.4 \cdot 10^{-12}/T}$$

et pour mémoire :

$$\lambda + 2/3\mu = (7.821 \exp(-16.8T^{-1/3}))\mu.$$

On peut envisager des complications possibles : par exemple les fluides non newtoniens ( $\mu$  dépend des invariants du tenseur  $\underline{D}$  ...), des théories du second gradient *etc.*

## 2.6 Mécanismes physiques de transferts...

La théorie précédente est indépendante de ce qui se passe à petite échelle, mais il est intéressant de repartir de la description physique microscopique, pour ensuite trouver la forme macroscopique.

### Les Gaz

Pour mémoire, on peut évaluer ces coefficients en repartant de théories microscopiques (thermodynamique statistique). Le cas des gaz monoatomiques est le plus simple, la définition de la température est liée à l'énergie cinétique moyenne ( $E_c = \frac{1}{2}m \langle u^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$ , ne pas confondre la constante de Boltzman et la constante de

Fourier), la capacité calorifique s'en déduit facilement. Pour aborder les transferts, il faut tenir compte de la taille des atomes (la "section efficace de collision", notée  $\sigma$ , ne pas confondre avec la contrainte!) et supposer que les transferts se produisent lors des chocs. Les coefficients de transport mettent en jeu le libre parcours moyen  $\lambda$  (ne pas confondre avec le coefficient de Lamé!) entre deux chocs, par exemple on peut montrer assez facilement que  $k$  est *grosso modo* proportionnel à :

$$k \simeq \rho C_v \langle u \rangle \lambda$$

$\lambda$  est le libre parcours moyen,  $\langle u^2 \rangle$  la vitesse quadratique moyenne. L'ensemble des volumes balayés par les particules dans leur mouvement est le volume entier donc :  $n\lambda\sigma \simeq 1$ , où  $\sigma$  est la section efficace  $n$  le nombre de molécules par unité de volume ( $k$  se comporte donc en  $\sqrt{T}$ ).

Dans les gaz, les coefficients de transport sont du même ordre de grandeur que ce soit pour la viscosité ou pour le coefficient de diffusivité thermique (nous en reparlerons lorsque nous discuterons le nombre de Prandtl). Les phénomènes et les équations se ressemblent beaucoup :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u.$$

on pose  $Pr = \frac{\mu c}{k}$ , nombre de Prandtl.

Dans le cas des gaz l'ordre de grandeur de un est naturel car le mécanisme de transport de chaleur et celui de quantité de mouvement est le même. Il s'agit tout simplement de chocs entre les molécules. On peut alors relier  $\mu$  à  $\rho \langle u \rangle \lambda$ ...

On peut être expliquer la différence entre les fluides simples mono ou diatomique et les macro molécules par le fait que les chocs entre macromolécules transmettent la quantité de mouvement mais qu'il est plus difficile de transmettre la chaleur car l'énergie acquise sert à déployer la molécule ou à exciter ses nombreux états internes (rotation et vibration).

### Solides/ Liquides

L'expression déduite de la mécanique statistique et de la mécanique quantique de la capacité calorifique est claire : les atomes vibrent autour de leur état d'équilibre. Au premier ordre il s'agit donc d'une assemblée d'oscillateurs harmoniques quantifiés (les fameux "phonons"). L'expression des coefficients de transport dans le cas des liquides et des solides et en revanche plus obscur. La conduction de la chaleur est très bonne car elle n'est pas du même type (il ne s'agit pas de chocs de molécules). Dans les liquides, selon l'hypothèse initiale de Debye (1912), le transfert de chaleur se fait par vibrations non linéaires des atomes autour de leur état d'équilibre (les phonons n'étant pas de vraies particules ne se "choquent" pas, les ondes linéaires se superposant). Le phénomène est en fait complexe, les premières simulations de Fermi- Pasta- Ulam puis de Kruskal et Zabusky (1965) on fait apparaître des solitons : il n'y avait donc pas de mise à l'équilibre thermique (voir Kittel). A noter qu'un deuxième mode de transfert de chaleur est possible : (sodium liquide ou mercure). Il se fait par l'intermédiaire des électrons de conduction électrique. Ce dernier processus est très efficace : ce sont de bons conducteurs thermiques qui ont une capacité calorifique élevée...

Le nombre de Prandtl n'est donc pas toujours d'ordre un.

En fait dans le cas des liquides, il faut passer à l'"*Extended Irreversible Thermodynamics*" ou plus simplement "E.T." (qui fait en plus apparaître les variations des flux par rapport au temps dans les relations constitutives), cela permet d'éviter les problèmes de vitesse infinie de propagation de la chaleur. Cattaneo a introduit un temps de relaxation :

$$\tau \frac{\partial q}{\partial t} + \underline{q} = -k \underline{\nabla} T, \quad \text{avec} \quad \tau \simeq 10^{-13} s.$$

Une théorie sophistiquée récente (Lebon 98) fait intervenir 13 coefficients.

Mais oublions ces subtilités étranges de la "thermodynamique du 3ème type" "E.T." !! (le clin d'oeil est assumé par les experts du domaine : cf. le livre de Lebon), les constantes de temps mises en jeux sont clairement hors du domaine des applications courantes (moins de la pico seconde). D'un point de vue pratique, on ne retiendra que :  $\underline{q} = -k \underline{\nabla} T$ . Avec  $k$  exprimé en  $W/m/K$

**Ordre de grandeur du nombre de Prandtl**  $Pr = \frac{\mu c}{k}$

Pour un gaz simple il est d'ordre 1

Hélium, Hydrogène Azote	$\simeq 0.7$
dioxyde de carbone	$\simeq 0.75$
vapeur d'eau	$\simeq 1.06$
air	$\simeq 0.7$
Amoniaque	$\simeq 2$

\* pour les liquides Pr est d'autant plus grand que le liquide est "huileux" :

Eau	$\simeq 7$
Glycérine	$\simeq 12.5$
verre fondu	$\simeq 100 \text{ à } 10^3$
Huile de moteur	$\simeq 10400$

\* pour les métaux liquides (ou fondus) il est très petit.

mercure	$\simeq 0.025$
sodium liquide	petit petit
soleil	$\simeq 10^{-9}$

**2.7 Quelques valeurs de  $k$**



Fourier (sic) dans la fresque "La Fée Électricité" R. Dufy (1936-1937, Paris, musée d'Art moderne de la Ville de Paris) photo PYL

La loi de Fourier

$$\underline{q} = -k \nabla T, \text{ avec } k \text{ en } W/m/K$$

$k$		matériau	$k$ en $Wm^{-1}K^{-1}$	$k/(\rho c_p)$ en $m^2s^{-1}$ .
0.01	gaz	air	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$
0.1		bois	0.13	$2.4 \cdot 10^{-7}$
1	liquides	glycérine	0.29	$0.98 \cdot 10^{-7}$
		eau	0.60	$1.44 \cdot 10^{-7}$
100	métaux	mercure	8.0	$4.2 \cdot 10^{-6}$
		granit	2.51	$1.1 \cdot 10^{-6}$
		acier	46	$1.2 \cdot 10^{-5}$
		alu	200	$0.86 \cdot 10^{-4}$
		argent	418	$1.71 \cdot 10^{-4}$

**Remarques**

- $k(T)$  croît avec la température pour les gaz
- $k(T)$  décroît avec la température pour le cuivre, le zinc, les aciers doux, le plomb, mais croît avec la température pour l'aluminium et les aciers inoxydables
- $k(T)$  est quasi constant pour les huiles de moteur
- $k(T)$  pour l'eau augmente avec  $T$ , puis diminue (culmine vers 400K)
- Tous les ouvrages de thermique ont des tables avec les valeurs des différents matériaux à différentes températures...

## 2.8 Valeurs de la capacité calorifique

Les termes de l'équation de l'énergie nous sont donc maintenant acquis :

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} + r.$$

reste l'énergie interne elle même. Nos souvenirs de thermostatique nous ont fait définir deux écritures de la différentielle  $dQ$  (coefficients de Clapeyron) ;

$$dQ = c_v dT + l dv \quad \text{ou} \quad dQ = c_p dT + h dp.$$

Donc

$$de = c_v dT + (l - p) dv$$

ou

$$dh = c_p dT + (h - v) dp$$

Par définition :  $c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v$  à volume constant et  $c_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_p$  à pression constante. Le cas d'un solide est particulièrement simple, les coefficients  $l$  et  $h$  sont très petits et  $c_v$  et  $c_p$  sont confondus. Des mesures expérimentales permettent d'obtenir les capacités calorifiques en fonction de la température. ici à 300K

	$c_p$ J/kg/K	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$k$ W/m/K (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	$(a = k/\rho c_p)$
Alu	903	2702	237	97 10 <sup>-6</sup>
brique	835	1900	0.72	
Acier	480	8000	15	
Fer	447	7870	72	
cuiivre	380	8933	400	
glace	2.0	920	1.88	
chêne	1.3	720	0.16	

...

(d'un point de vue thermodynamique statistique la capacité calorifique suit la loi de Dulong Petit)

le cas des gaz et des liquides est différent car, *a priori*, l'énergie interne  $e$  dépend de deux variables thermodynamiques (par exemple  $e(s, \rho)$ ).

Nous verrons plus en détail, en peu plus loin lors du chapitre de ce cours relatif à la "Convection Naturelle & convection libre" le calcul (classique en thermostatique à partir des relations de Clapeyron et de Maxwell) qui mène à l'expression de l'énergie suivante :

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dt}, \quad \text{avec } p(\rho, T)$$

Dans le cas d'un gaz parfait (qui est une très bonne approximation pour les gaz usuels) où  $p = \rho r T$  il reste

$$\frac{de}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} + \frac{d}{dt}(rT) \quad \text{ou encore} \quad \frac{de}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}$$

avec  $c_p - c_v = r$ ,  $\gamma = c_p/c_v$  etc, et il nous est aussi bien connu pour un gaz parfait monoatomique  $c_v = 3/2r$ , et  $c_p = 5/2r$  pour l'air  $\gamma = 1.4$ ,  $r = 286$ ,  $c_v = 715$ ,  $c_p = 1000$ .

Néanmoins, si on étudie un fluide dans l'approximation incompressible c'est le  $c_p$  qui est important.

	$c_p 10^{-3}$ J/kg/K	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$k 10^3$ W/m/K
air (250 K)	1.006	1.39	22.3
air (293K)			
air (300K)	1.007	1.16	26.3
NH <sub>3</sub> (300K)	2.158	0.69	24.7
He(300K)	5.193	0.16	152
O <sub>2</sub> (300K)	0.92	1.28	26.8
H <sub>2</sub> -Ovap(380K)	2.06	0.58	24.6

pour les liquides, les effets de la pression étant faibles, on a de même  $de \simeq c_p(T)dT$ .

	$c_p 10^{-3}$ J/kg/K	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$k 10^3$ W/m/K
eau	4.18	1000	610
fréon	0.97	1.3	73
huiles moteur	1.9	800	145

L'équation de la chaleur s'écrit alors pour ces milieux immobiles :

$$\rho c(T) \frac{\partial}{\partial t} T = \nabla \cdot (k(T) \nabla T)$$

dans ce dernier paragraphe nous avons écrit l'équation de la chaleur sans mouvement. L'art et la manière de résoudre l'équation de la chaleur sans écoulement sont supposés connus, des ouvrages entiers y sont consacrés. Quelques exemples seront vus dans le chapitre suivant et en PC.

### 3 Le problème complet

#### 3.1 Équations

Ces prémices philosophiques étant rappelés, les équations finales sont les "équations de Navier Stokes" (ici les plus générales possibles) pour un fluide Newtonien compressible :

équation de conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0.$$

équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}.$$

équation de l'énergie :

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \nabla \cdot \underline{q} + r.$$

relations constitutives :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \lambda \nabla \cdot \underline{u} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{D}}$$

$$\underline{q} = -k \nabla T.$$

loi d'état :

$$p(\rho, T)$$

coefficients :

$$c_v(T), \quad c_p(T), \quad \lambda(T), \quad \mu(T), \quad k(T) \dots$$

conditions aux limites  $T_w$  **OU**  $q_w$  imposés, adhérence à la paroi.

C'est le problème complet pour le fluide. En toute généralité, il faudrait en plus résoudre l'équation de la chaleur (problème de conduction pure) dans les parois qui le bordent, dans ce cas il faut assurer la continuité de  $T_w$  **ET**  $q_w$  (ou plus exactement de sa composante normale) entre le fluide et le solide.

Puisque l'on a toutes les relations (formes locales + équations constitutives + conditions aux limites...), il "suffit" de résoudre.

### 3.2 Différents mécanismes

Avant de résoudre plus précisément les équations, nommons rapidement chacun des différents mécanismes que l'on peut mettre en jeu. Pour cela, observons chacun des termes de variation de l'énergie interne

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} + r.$$

- on peut ne retenir que les termes du problème de conduction :

$$\rho c \frac{\partial}{\partial t}(T) = k \underline{\nabla}^2 T$$

- on peut ne retenir que les termes liés à la convection forcée par le mouvement du fluide :

$$\rho c \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T = k \underline{\nabla}^2 T$$

- il y a aussi la convection libre : pas d'écoulement imposé mais  $\rho$  varie avec  $T$ , donc par l'existence de la gravité ( $\underline{f} = \rho \underline{g}$ ), la variation de densité produit le mouvement.

- Enfin nous disons un mot très rapide sur le rayonnement. Dans ce cas il y a création volumique d'énergie par rayonnement :

$$r = K \sigma T^4$$

Le flux d'énergie du au rayonnement à la paroi est de la forme :

$$\varepsilon \sigma S T^4$$

$\varepsilon$  émissivité (caractéristique de la surface),  $K$  constante liée au caractère plus ou moins transparent du fluide...  
 $S$  aire du corps,  $T$  Température,  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ .

Les problèmes de rayonnement ne sont pas simples et nécessitent des techniques particulières faisant l'objet d'ouvrages entiers. Aux températures courantes  $\simeq 300\text{K}$  (en général en dessous de  $800\text{K}$ ) disons que le flux thermique par rayonnement est négligeable par rapport au flux de diffusion, il peut ne pas en être de même dans un réacteur chimique où l'on chauffe beaucoup ou dans une fonderie... Une première approche consiste alors à linéariser le flux de chaleur par rayonnement.

### 3.3 Exemples :

Reprenons les exemples précédents et caractérisons mieux leurs différents mécanismes :

- centrale nucléaire/ train à vapeur/ frigos/ distillation du calvados : échangeur de vapeur (convection forcée) (on notera que la technologie des fleurons de l'industrie de pointe nucléaire n'est pas si éloignée des machines à vapeur d'il y a 2 siècles, et des alambics du moyen age...)
- chauffage d'une pièce par un radiateur (rayonnement et convection libre)
- l'anémométrie à fil chaud (le moyen de mesure des vitesses en souffleries)
- moteur chaud/ à refroidir convection forcée
- panneau solaire : rayonnement, convection naturelle pour l'air (mais forcée pour le fluide calorporteur).
- four micro onde  $r = KI^2$  ( $I$  Amplitude de l'onde E.M.)
- le potiron d'Halloween
- météorologie : tous les phénomènes imbriqués !

Quel sera le régime dominant ? Quels termes faut il garder ? c'est tout le problème du cours de Thermique et tout l'art du Thermicien.



## 4 Résumé et Conclusion

- Il faut savoir que les équations de la thermomécanique sont compliquées et proviennent de considérations subtiles de thermodynamique (c'est à dire d'extension de la thermostatique à un milieu continu au cas où il y a mouvement). Leur forme générale est indiquée au § 1.4.1.

Un résumé ultime de la *Thermodynamique* sera (avec  $\frac{dW}{dt} = -P_{int}$ ) :

$$\begin{aligned} \text{premier principe :} & \quad \frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \\ \text{second principe définition de } S : & \quad dS = \frac{dE}{T} + \frac{dW_{rev}}{T} \\ \text{avec} & \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_{irrev}}{dt} + \frac{dQ_{rev}}{dt} \\ \text{et avec} & \quad \frac{dW}{dt} = \frac{dW_{irrev}}{dt} + \frac{dW_{rev}}{dt} \\ \text{second principe définition de l'irréversibilité :} & \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ_{rev}}{dt} + \dot{\sigma} \end{aligned}$$

par élimination, "l'inégalité de Clausius Duhem" :

$$\dot{\sigma} = \left( \frac{dS}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dE}{dt} \right) + \frac{1}{T} \frac{dQ_{irrev}}{dt} + \frac{1}{T} \frac{dW}{dt} > 0$$

c'est à dire

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{T} \frac{dQ_{irrev}}{dt} + \frac{1}{T} \frac{dW_{irrev}}{dt} > 0$$

- Il est bon d'avoir compris et retenu l'enchaînement logique : lois de conservation et premier principe lié aux puissances, second principe, lois de comportement. Cette démarche reservira pour les transferts de masse. Conceptuellement elle sert à construire des théories pour des matériaux compliqués.

- Ces équations ont été codées (et le seront encore) dans de nombreux codes commerciaux ou universitaires utilisés par les bureaux d'études et les centres de recherche.

- Mais, il ne faut pas céder à la facilité (c'est à dire allumer l'ordinateur et cliquer partout)!

En conséquence la résolution numérique directe (devenue incontournable) doit être épaulée par l'analyse phénoménologique, et surtout par des vérifications expérimentales... L'analyse phénoménologique, en schématisant les écoulements, permet de dégager les mécanismes principaux et sert donc de guide pour "comprendre" et "expliquer" l'écoulement : le résultat d'un calcul brut n'est rien s'il ne peut être expliqué.

## Bibliographie <sup>1</sup>

- Jean Dhombres & Jean-Bernard Robert (1998) : "Joseph Fourier", Belin : collection "Un savant, une époque"
- P. Glansdorff & I. Prigogine (1971) "Structure, stabilité et fluctuations" Masson, 288p (ISBN 2-2252-9690-1)
- P. Germain Q.S. Nguyen & P. Suquet (1983) "Continuum Thermodynamics" Transaction of the ASME, Vol 50, december, pp. 1010- 1020.
- P. Germain (1986) "Mécanique X" T I & T II, Ellipses.
- Jou D., Casas- Vasquez J. & Lebon G. (1996) "Extended Irreversible Thermodynamics", 2nd edition, Springer Berlin.
- Kittel (1985) "Physique de l'état solide" Masson.
- P.-Y. Lagrée (2018), cours ENSTA, Généralités, équations de la thermomécanique des fluides.
- G. A. Maugin (1995) "Thermomechanics of complex irreversible behaviours".
- I. Müller (1995) "Thermodynamics", Pitman Advanced Publishing Program.
- J. Padet (1997) "Principes des transferts convectifs" Polytechnica .
- J.F. Sacadura Transferts thermiques – Initiation et approfondissement. Coord., éditions Lavoisier (2015).

1. Clintro.tex OK le 25 octobre 2018

page blanche

## 2. Le coefficient d'échange, son importance dans les transferts thermiques. La conduction.

### Résumé

La connaissance des conditions aux limites est d'importance extrême pour résoudre des équations différentielles en général. Ici nous examinons l'équation de la chaleur et ses conditions aux limites. Il s'agit des trois types de conditions aux limites suivantes : température donnée, flux donné et une troisième forme qui lie les deux (condition mixte). Cette dernière forme provient de l'introduction du coefficient d'échange dont nous définissons l'expression : il provient d'une énorme simplification pour décrire le milieu environnant. Nous introduisons un nombre sans dimension fondamental en thermique, le nombre de Biot qui quantifie cette condition mixte. Son influence est examinée dans quelques exemples très classiques (ailette/ échelon de température). Les autres chapitres du cours serviront à "calculer" ce coefficient qui est ici supposé donné.

### 2.1. Coefficient d'échange

#### 2.1.1 Définition

Lorsque l'on examine (par exemple) le champ des températures dans un solide entouré par un fluide, on voit bien que l'on ne peut pas résoudre complètement le problème : il faudrait calculer l'écoulement lui même, ce qui est souvent quasi impossible. On peut, pour simplifier le problème thermique, définir le coefficient d'échange  $h$  (*heat transfer coefficient*) qui traduit de manière empirique les échanges de chaleur de l'intérieur (ici le solide) avec l'extérieur (ici le fluide). On est donc passé d'une définition très complexe de toutes les équations dans le chapitre 1, à une simplification à la serpe dans ce chapitre 2.

Par définition, du facteur  $h$ , le flux à la paroi du solide est relié à l'écart entre la température de surface du solide et la température moyenne extérieure sous la forme :

$$\underline{q}_w = h(T_w - T_f)\underline{n}.$$

Avec  $T_w$  température au point considéré de la paroi et  $T_f$  température du fluide extérieur supposée donnée (uniforme, voire lentement variable). La normale extérieure est notée  $\underline{n}$ . On peut aussi écrire (pour faire apparaître "moins l'accroissement" et rester analogue au gradient dans la loi de Fourier) :

$$\underline{q}_w = -h(T_f - T_w)\underline{n}.$$

Tout le problème est bien entendu l'évaluation de ce coefficient " $h$ " son unité :  $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ .

Ici on s'intéresse au solide baigné par le fluide, dans le solide, à la limite de la frontière le flux de chaleur est :

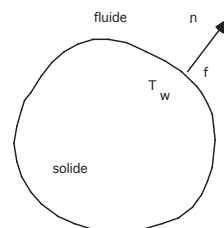
$$\underline{q}_w = -k\left[\frac{\partial T}{\partial n}\right]_w \underline{n},$$

qui est donc égal au flux emporté, modélisé par le coefficient d'échange  $h$ .

On écrira donc la condition à la limite sous la forme suivante :

$$\left(k\left[\frac{\partial T}{\partial n}\right]_w \underline{n} + h(T_w - T_f)\right) \underline{n} = 0.$$

Qui signifie que la dérivée le long de la normale est bien positive si l'extérieur est plus chaud que l'intérieur.



### 2.1.2 Expression analytique de $h$

Pour estimer la valeur du coefficient d'échange :

- soit on calcule (analytiquement ou par une méthode numérique) l'expression de  $h$  dans les cas où c'est possible ; par exemple pour la plaque plane de température uniforme de longueur  $L$  en régime laminaire de vitesse  $U$ , nous allons voir dans la suite du cours où les notations seront définies :

$$h = Nu(k/L) \text{ avec } Nu = 0.664Pr^{1/3}R_L^{1/2} \text{ et } Pr = \nu/a \text{ et } R_L = UL/\nu.$$

- soit expérimentalement on cherche à tracer le nombre de Nusselt  $Nu$  sous la forme d'un produit de nombres sans dimension :  $Nu = CRe^mPr^n$ . On trouve dans la littérature des tables exprimant ces relations. Pour la lecture des tables de coefficients  $h$  il faudra faire très attention aux températures de référence, car  $h$  dépend de la température.

Le but du jeu est de fournir des formules approchées... ou de déterminer  $h$  par des expériences et de tabuler les résultats. Ensuite, on peut faire des calculs simplifiés en veillant à ce que les hypothèses posées pour établir l'expression de  $h$  soient à peu près respectées.

### 2.1.3 Exemples de valeurs

La "gamme des valeurs" de  $h$  (unité  $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ ) est :

convection libre (air)	5-25
convection libre (eau)	100-900
convection forcée (air)	10-500
convection forcée (eau)	100-15000
convection forcée (huile)	50-2000
conv. f. (métaux fondus)	6000-120000
eau bouillante	2500-25000
vapeur d'eau se condensant	50000-100000
rayonnement (linéarisé à 300K)	1

Ce terme  $h$  peut être considéré comme le terme fondamental de la thermique. Il permet de simplifier l'extérieur, et de ne résoudre l'équation de la chaleur qu'à l'intérieur du domaine. Les chapitres suivants visent à en donner des expressions dans des cas simplifiés.

### 2.1.4 Nombre de Biot



Biot dans la fresque "La Fée Électricité" R. Dufy (1936-1937), Paris, musée d'Art moderne de la Ville de Paris (PYL)

Le nombre de Biot est un nombre sans dimension construit avec  $h$ . Le flux à la paroi s'écrit par définition du facteur d'échange :

$$\vec{q}_w = h(T_w - T_f)\vec{n}.$$

Or, la composante normale du flux à la surface est  $-k \frac{\partial T}{\partial n}$ , adimensionnons  $n$  la composante dans la direction normale avec  $L$  la taille caractéristique de l'objet (ne pas confondre  $n$ , la coordonnée normale,  $\bar{n}$ , la coordonnée normale sans dimension et  $\vec{n}$  la normale) et soit  $T_0$  la température au temps  $t = 0$  (ou une autre température pertinente du solide), et soit  $T_f$  la température du fluide extérieur :

$$dn = L d\bar{n} \quad \text{et} \quad T = T_f + (T_0 - T_f)\bar{T}.$$

d'où :

$$-\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} = \frac{hL}{k}\bar{T}$$

On pose  $Bi$ , le nombre de Biot (ses travaux sur la propagation de la chaleur datent de 1804) (Biot est aussi associé à Savart) :

$$Bi = \frac{hL}{k} \quad \text{tel que :} \quad -\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} = Bi\bar{T}.$$

- Si  $Bi$  est infini, on retrouve le cas de la plaque de température imposée  $\bar{T} = 0$ .
- Si  $1/Bi$  est infini, la paroi est adiabatique  $-\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} = 0$ .

## 2.2. Analyse globale : systèmes minces

Lorsque le nombre de Biot est petit, on peut faire une simplification qui permet de résoudre beaucoup de problèmes de manière simple, on va voir que la température est quasi constante dans le corps étudié dont la dimension caractéristique est disons  $L$ . Il s'agit des "systèmes minces" (en anglais : le terme *lumped analysis*,

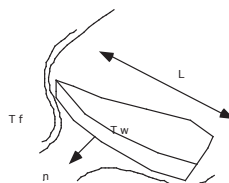


FIGURE 1 – Un objet de dimension caractéristique  $L$  dans un écoulement extérieur à la température moyenne  $T_f$ .

analyse globale, est employé, ce qui est plus clair).

On a toujours localement l'équation de la chaleur :  $\rho c_p (\frac{\partial T}{\partial t}) = -\nabla \cdot \underline{q}$ , si on intègre sur tout le volume :

$$\int_{\Omega} \rho c_p (\frac{\partial T}{\partial t}) dv = - \int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot \underline{q} dS.$$

Il s'agit du volume noté  $\Omega$  et bordé par une surface  $\partial\Omega$ , les conditions aux limites étant appliquées sur  $\partial\Omega$ . Pour la jauge de température, on a :  $T = T_f + (T_0 - T_f)$  avec  $T_0$  la température au temps  $t = 0$ . La jauge d'espace est  $L$ , soit  $\tau$ , la jauge de temps  $t = \tau$ . Le flux à la surface du domaine étant relié à l'écart de température et au facteur d'échange, on a :

$$\frac{\rho c_p L}{\tau h} (\frac{\partial}{\partial \bar{t}}) \int_{\Omega} \bar{T} d\bar{v} = - \int_{\partial\Omega} \bar{T} d\bar{S},$$

on en déduit, par moindre dégénérescence que la jauge de temps est :

$$\tau = \frac{\rho c_p L}{h} = (\frac{L^2}{a})(\frac{k}{hL}) = \frac{\tau_d}{Bi}.$$

Or, dans un problème de diffusion de la chaleur, la jauge de temps naturelle associée à l'équation de la chaleur : est la jauge associée à la diffusion  $\tau_d = L^2/a$  (avec  $a = k/(\rho c_p)$ ). On constate donc que si le nombre  $Bi$  est très petit :  $\tau_d/Bi \gg \tau_d$ , la chaleur se diffuse rapidement dans le milieu étudié par conduction ( $\tau_d$ ), le temps caractéristique d'évolution globale est lent ( $\tau_d/Bi$ ), il est contrôlé par le nombre de Biot.

Partant de la condition de flux  $-\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} = Bi \bar{T}$  à la paroi, avec  $Bi \ll 1$ , on peut en déduire (en supposant que  $\partial/\partial$  reste partout d'ordre  $Bi$  au plus) que la température varie très peu en espace dans le milieu étudié, on écrit alors un développement de Taylor en puissances du petit paramètre  $Bi$  :

$$\bar{T}(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{T}_m(\bar{t}) + Bi \bar{T}_1(\bar{r}, \bar{t}) + \dots$$

l'équation d'évolution est alors au premier ordre :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{T}_m = -D^{-1} \bar{T}_m \text{ donc } \bar{T}_m = \exp(-\bar{t}/D)$$

où  $D$  est un coefficient de forme d'ordre un (on n'étudie pas les fractals), c'est le rapport entre le volume et la surface (adimensionnés). A volume fixé plus la surface est grande plus le refroidissement est rapide.

Conclusion : dans le cas des systèmes "minces" *i.e.* caractérisés par un faible nombre de Biot, la température est constante au premier ordre en espace dans le domaine considéré et la décroissance en temps est exponentielle, le temps caractéristique est  $Bi^{-1}$  fois plus long que celui de la diffusion. *A contrario* un système est dit "épais" si  $Bi$  est d'ordre un et on ne peut plus simplifier.

### 2.2.1 formules simplifiées pour applications rapides

Le résultat précédent établi avec quelques notions d'analyse asymptotique est souvent présenté de manière globale dans les ouvrages de base sous la forme :

$$\frac{dH}{dt} = -h\Delta TS,$$

la variation d'enthalpie totale est égale au flux multiplié par la surface.

Dans le cas d'un volume fixe de température supposée uniforme, c'est ce que l'on appelle la loi de Newton (publiée anonymement en 1701) :

$$C_p \frac{dT_{int}}{dt} = -hS(T_{int} - T_{ext}).$$

(avec  $C_p$  = la capacité calorifique totale), on écrira plutôt pour un milieu fluide en mouvement :

$$\dot{m} c_p \frac{dT_{int}}{dx} = -hS(T_{int} - T_{ext}).$$

avec  $\dot{m}$  débit massique ( $\rho U \Sigma$ ).

Un exemple important que l'on peut maintenant traiter est celui du refroidissement de l'assiette de soupe :

$$C_p \frac{\partial T_s}{\partial t} = -hS(T_s - T_{air}).$$

On voit que le coefficient d'échange dû au rayonnement est faible ( $\sim 1$ ) de même la convection naturelle au dessus de l'assiette ne la refroidit pas facilement (5-25). En revanche si on souffle c'est mieux (10-500) Si maintenant on met en mouvement la soupe et avec la cuillère on prend et on verse, on égalise mieux la température dans la soupe et on augmente la surface  $S$ .

Une variété incroyable de problème d'ingénieurs peut se résoudre avec ces formules simplifiées issues des milieux minces.

## 2.3. Retour sur les conditions aux limites

### 2.3.1 décroissance de "l'énergie quadratique"

Dans ce paragraphe, nous établissons en fait que les conditions aux limites assurent un problème bien posé. Soit un milieu fixe ( $\Omega$ ), et soit  $T$  l'écart entre sa température et la température extérieure prise comme référence.

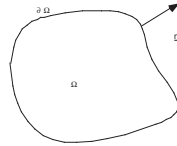


FIGURE 2 – Le milieu fixe ( $\Omega$ ) étudié.

De manière très schématique, le fait d'imposer le flux ou la température à une paroi vient du fait que pour ce milieu fixe ( $\Omega$ ) limité par sa surface fixe ( $\partial\Omega$ ), on peut construire une loi d'évolution pour la moyenne du carré de l'écart de température (une "énergie quadratique"). On l'obtient en multipliant l'équation locale par  $T$  et en intégrant sur tout le volume :

$$\int_{\Omega} (\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} T + \underline{\nabla} \cdot \underline{q} T) dv = 0.$$

Par intégration par parties :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\rho c_p \frac{T^2}{2}) dv = \int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot (\underline{q} T) dv + \int_{\Omega} k \underline{\nabla} T \cdot \underline{q} dv,$$

or

$$- \int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot (\underline{q} T) dv = \int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot \underline{q} T dS \text{ et } \int_{\Omega} k \underline{\nabla} T \cdot \underline{q} dv = - \int_{\Omega} k \underline{\nabla} T \cdot \underline{\nabla} T dv.$$

le deuxième terme, qui est volumique, est toujours négatif.

L'idée est que la décroissance du carré de la température est assurée ( $\partial_t \int_{\Omega} (\rho c_p \frac{T^2}{2}) dv < 0$ ) lorsque la frontière se décompose en des régions où  $T = 0$  et  $\underline{n} \cdot \underline{q}$  quelconque et où  $\underline{n} \cdot \underline{q} = 0$  et  $T$  quelconque (pour avoir  $\int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot \underline{q} T dS = 0$ ).

L'autre possibilité, celle du coefficient d'échange, permet de réécrire  $\underline{n} \cdot \underline{q} = hT$  sur la frontière. On a donc  $\int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot \underline{q} T dS = -h \int_{\partial\Omega} T^2 dS < 0$ . La décroissance est toujours assurée.

### 2.3.2 Traversée d'une interface

Soit deux milieux fixes ( $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ) différents, séparés par une interface : écrivons l'équation de la chaleur intégrée sur un volume  $dV$  ( $dV_1$  uni à  $dV_2$ ) dont on fera tendre l'épaisseur vers zéro, tout en entourant toujours une portion de surface  $dS$

$$\int_{dV} (\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{q}) dv = \int_{dV_1} (\rho c_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{q}_1) dv + \int_{dV_2} (\rho c_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{q}_2) dv = 0.$$

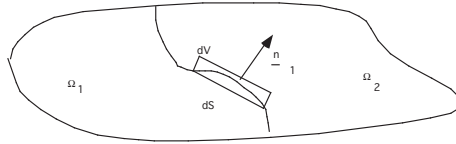


FIGURE 3 – Traversée d'une interface.

La contribution

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{dV_1} \rho c_{p1} T_1 dv + \int_{dV_2} \rho c_{p2} T_2 dv \right)$$

est nulle, tandis que la partie liée aux flux se transforme en un saut de flux :

$$\int_{dV_1} \underline{\nabla} \cdot \underline{q}_1 dv + \int_{dV_2} \underline{\nabla} \cdot \underline{q}_2 dv = \int_{dS_1} \underline{n}_1 \cdot \underline{q}_1 dS + \int_{dS_2} \underline{n}_2 \cdot \underline{q}_2 dS$$

donc

$$\underline{n} \cdot \underline{q} \text{ est continu,}$$

la composante normale du flux est continue.

Il s'agit ici d'une interface parfaite, en pratique (entre deux pièces de métal), on simplifie l'imperfection par un saut de flux normal (c'est ce que l'on appelle la résistance de contact).

### 2.3.3 Conclusion sur les conditions aux limites

Nous retiendrons que pour un milieu fixe ( $\Omega$ ) limité par une surface fixe ( $\partial\Omega$ ), pour résoudre l'équation de la chaleur les conditions aux limites sont sur chaque partie de la surface :

- soit la température est imposée (condition de Diriclet)
- soit le flux est imposé (condition de Neuman)
- soit une combinaison linéaire du flux et de la température sont imposés (condition mixte de Robin).

En général à une interface entre deux corps, le flux normal  $\underline{n} \cdot \underline{q}$  est continu et  $T$  est continue, les conditions précédentes sont des simplifications.

$$\underline{n} \cdot \underline{q} = -k^+ \frac{\partial T^+}{\partial n} = -k^- \frac{\partial T^-}{\partial n}$$



## 2.4. Conduction stationnaire pure.

Pour mémoire écrivons les équations stationnaires de la thermique dans le cas de la conduction stationnaire pure.

- équation de la chaleur dans un milieu immobile linéaire et isotrope (Laplacien avec un éventuel terme source) :

$$0 = k \nabla^2 T + r$$

- conditions aux limites (sur chaque portion de paroi, les trois cas sont possibles) :

**soit** - température pariétale imposée :

$$T = T_p$$

**soit** - flux pariétal imposé :

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = \phi_p$$

**soit** - flux pariétal relié à la température pariétale et à la température extérieure par le coefficient d'échange :

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = h(T_p - T_{ext}).$$

Ces problèmes sont maintenant résolus sans difficulté numérique (résoudre un Laplacien est devenu trivial) avec des "codes numériques" tels que FEniCS, COMSOL, ELMER, CAST3M ou FreeFEM++ par exemple. Savoir résoudre un Laplacien avec une méthode numérique "différences fines", "éléments finis" fait partie des méthodes à connaître.

Nous allons examiner des exemples simplistes en dimension 1. Ces exemples vont nous permettre de fixer les idées.

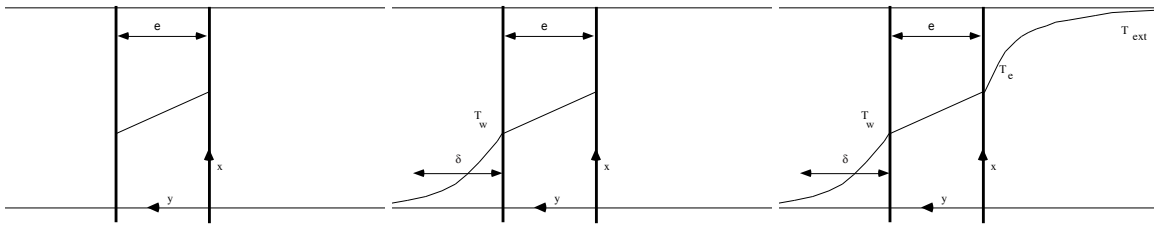


FIGURE 4 – Gauche : Un mur infini, soumis à  $T_w$  en  $y = 0$  et  $T_e$  en  $y = e$ . Centre : Le mur refroidi à gauche. Droite : Un mur baigné de deux milieux.

## 2.5. Exemple de conduction stationnaire : le problème de la température du mur

### 2.5.1 Équation de la chaleur dans un mur

Soit une paroi d'épaisseur  $e$  séparant deux milieux à température fixée et uniforme,  $T_w$  (à gauche) et  $T_e$  (à droite).

Dans ce solide, l'équation de la chaleur en stationnaire est simplement (échelle  $e$  pour  $y$ ) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

la température est linéaire et passe de  $T_e$  à  $T_w$ ,  $T = T_e + \frac{y}{e}(T_w - T_e)$  et le flux est constant dans le solide, il vaut :

$$q = -k_s(T_e - T_w)/e.$$

### 2.5.2 Analogie électrique

$\rho_s = e/k_s$  est appelé est appelé la "résistance thermique par unité de surface". Ceci est lié à l'analogie que l'on peut faire avec l'électricité. La température est l'équivalent du potentiel  $T \leftrightarrow U$ , tandis que le flux de chaleur est l'équivalent du champ électrique  $E \leftrightarrow q$ . On peut alors multiplier les milieux 1D et utiliser les loi d'Ohm et de Kirchoff. C'est ce que nous allons faire dans l'exemple suivant.

### 2.5.3 Équation de la chaleur dans le solide

**2.5.3.1. Deux milieux** En pratique, on a souvent un fluide dans un récipient. Soit donc une paroi d'épaisseur  $e$  bornant à gauche un fluide, et soit  $L$  la longueur caractéristique de variation de la température le long de la paroi ( $e \ll L$ ). Dans le fluide (il est à la température  $T_\infty$  au loin), la température varie jusqu'à la valeur  $T_w$  à la paroi en passant de  $T_\infty$  à  $T_w$  sur une échelle  $\delta$  (par exemple au travers d'une couche limite thermique). La surface extérieure à droite est à la température  $T_e$  fixée pour l'instant.

L'ordre de grandeur du flux pour le fluide :

$$-k_f(T_\infty - T_w)/\delta.$$

On note le flux sous la forme :  $-(T_\infty - T_w)/\rho_f$ . Dans le solide, la température ne varie *a priori* fortement, en traversant celui ci, que de manière longitudinale.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad \left(\frac{e}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} = 0.$$

la température est linéaire et passe de  $T_e$  à  $T_w$ , le flux est constant dans le solide, il vaut :

$$q = -k_s(T_w - T_e)/e, \quad \text{de même } \rho_s = e/k_s.$$

L'égalité des deux flux donne :

$$(T_\infty - T_w)/\rho_f = (T_w - T_e)/\rho_s = (T_\infty - T_e)/(\rho_s + \rho_f)$$

Donc :

$$T_w = \frac{T_\infty + (\rho_f/\rho_s)T_e}{1 + \rho_f/\rho_s} (T_\infty - T_w) = -\frac{\rho_f((T_\infty - T_e))}{(\rho_s + \rho_f)} \text{ et } q_w = -\frac{((T_\infty - T_e))}{(\rho_s + \rho_f)}$$

En jouant sur le rapport des résistances, on peut obtenir une condition aux limites différente pour  $T_w$  et  $q_w$ .

- si  $\rho_f/\rho_s \gg 1$  alors  $T_w \sim T_e$  et  $q_w \sim -\frac{((T_\infty - T_e))}{\rho_f}$

on peut donc "faire" une paroi de température imposée... et le flux à la paroi est un résultat du calcul.

- si  $\rho_f/\rho_s \ll 1$  alors  $(T_w - T_\infty) \ll (T_\infty - T_e)$  et  $q_w \sim -\frac{((T_\infty - T_e))}{\rho_s}$

on a construit ici une paroi de flux imposé ( $q_w \sim -\frac{((T_\infty - T_e))}{\rho_s}$ ), la valeur de  $T_w$  est un résultat du calcul.

Pour l'air ou l'eau et si le solide est un métal ( $k_s/k_f \gg 1$ ,  $(\delta/e)$  petit ou  $O(1)$ ), donc  $\rho_f/\rho_s$  est grand (les métaux conduisent bien la chaleur, leur résistance thermique est faible). En revanche si le solide est du bois ( $k_s/k_f \ll 1$ ), la chute de température du fluide est faible (le bois est un isolant thermique, sa résistance thermique est forte).

### 2.5.3.2. Trois milieux

On peut continuer en baignant la paroi extérieure par un autre fluide de température  $T_{ext}$ .

On dit par exemple que les échanges avec l'extérieur sont régis par un coefficient d'échange, et on remarque au passage que  $h$  est une conductance (inverse de la résistance).

$$\rho_f^{-1}(T_\infty - T_w) = \rho_s^{-1}(T_w - T_e) = h(T_e - T_{ext}),$$

comme  $(he/k_s) = h\rho_s$  est un nombre de Biot, ce nombre est donc aussi un rapport de résistances.

On note au passage que l'écart de température entre les deux fluides ( $T_\infty - T_{ext}$ ) et l'écart entre les deux faces du mur ( $T_w - T_e$ ) est :

$$\frac{T_\infty - T_{ext}}{T_w - T_e} = \frac{1}{1 + \rho_f/\rho_s + 1/Bi} < 1$$

Le saut de température dans le mur est toujours inférieur à l'écart total de température entre les deux milieux.

Si la résistance thermique du mur est très forte, ou si le coefficient d'échange est très faible, le saut de température dans le mur est négligeable.

On a de manière évidente les relations suivantes :

$$q_w = -\frac{(T_\infty - T_{ext})}{(\rho_s + \rho_f + 1/h)} = -\frac{(T_w - T_{ext})}{(\rho_s + 1/h)}$$

$$\frac{T_w - T_e}{T_\infty - T_{ext}} = \frac{1}{1 + \rho_f/\rho_s + 1/(h\rho_s)}$$

$$\frac{T_w - T_{ext}}{T_\infty - T_{ext}} = \frac{\rho_s + 1/h}{\rho_s + \rho_f + 1/h}$$

... à discuter dans le cas général!

A titre d'exemple, prenons une mince paroi en métal solide de résistance très faible. On voit que l'on peut discuter la condition à la paroi pour le fluide, par exemple, comme  $\rho_s \ll \rho_f$  le saut de température dans le solide est faible  $T_w \sim T_e$ ,  $q_w \sim -h(T_w - T_{ext})$  et  $\sim \frac{T_e - T_{ext}}{1 + h\rho_f}$  considérons maintenant le coefficient d'échange avec l'extérieur :

- si  $\rho_f h \gg 1$  (un grand nombre de Biot)  $T_e \sim T_{ext}$ . Dans ce cas on a imposé la température à la paroi (la distribution de flux à la paroi est un résultat du calcul) :

$$T_w \sim T_{ext}$$

- si  $\rho_f h \ll 1$ , on a pour le fluide un problème de flux imposé à résoudre (la distribution de température à la paroi est un résultat du calcul) :

$$q_w \sim -h(T_\infty - T_{ext})$$

• - si  $\rho_f h = 0(1)$  il faut résoudre avec la condition mixte (la température et le flux sont un résultat du calcul, mais leurs valeurs à la paroi sont liées) :

$$q_w \sim -h(T_w - T_{ext})$$

Ces petits exemples, triviaux, sont à garder à l'esprit lorsque l'on résout numériquement les équations (par exemple il n'est pas la peine de discrétiser une paroi métallique très mince, on dit directement que l'écart de température y est nul...).

(On discutera ici d'autres exemples comme le fond de la casserole en aluminium chauffée remplie d'eau bouillante, l'écart de températures entre les deux faces est d'à peine 0.5K, pour un mur de pierre, en revanche, l'écart de température entre les deux faces est important...).

Avec l'appliquette Java `mur.class`, on trace la distribution de température à travers un mur avec trois matériaux différents. On fait varier les coefficients  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  et les épaisseurs  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ .

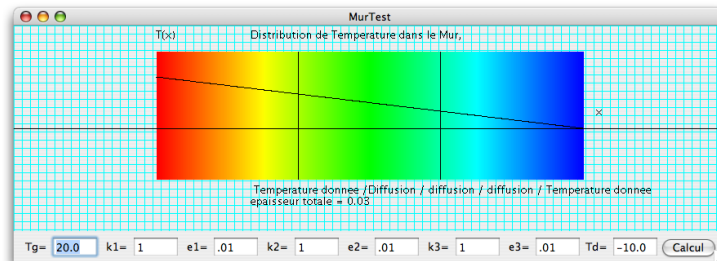


FIGURE 5 – La distribution de température  $T(x)$  dans trois milieux 1D en java [Cliquer] . Remarquer le code de couleur, Rouge chaud, bleu froid. Faire varier les épaisseurs et les conductivités thermiques

## 2.6. Exemple de conduction stationnaire : L'ailette

A titre d'illustration, nous allons résoudre un problème très classique de conduction stationnaire : l'ailette. Cet exemple est développé dans TOUS les ouvrages de "thermique" de par son caractère fondamental et simple. Il est indispensable de bien l'avoir compris.

Nous l'examinerons ici avec l'optique de l'analyse phénoménologique (utilisation de nombres sans dimensions et de petits paramètres). En fait outre son intérêt pratique, c'est le problème fondamental qui a permis à Fourier de comprendre la notion de chaleur. Il a donc d'abord résolu le problème stationnaire (1809), puis seulement ensuite le problème instationnaire. Ce dernier, que nous voyons en PC, est plus compliqué, il a nécessité l'invention des séries de Fourier (1811).

### 2.6.1 Dispositif de l'ailette

L'ailette (*fin* en anglais), comme son nom l'indique est un appendice en métal que l'on dispose sur un dispositif que l'on désire refroidir efficacement. L'idée est d'augmenter la surface d'échange.

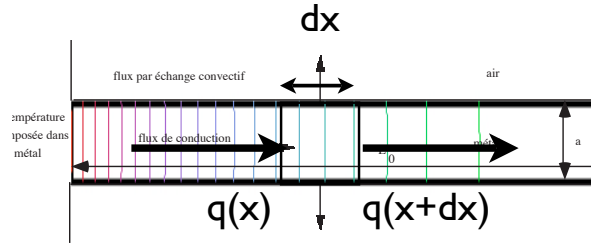
On peut voir des ailettes sur les radiateurs de la salle de cours, sur le radiateur de la voiture, une casserole et son manche sont en fait deux ailettes, sur les microprocesseurs (sur certains on met une plaque recouverte d'ailettes, ce qui augmente donc la surface, mais en plus on place un petit ventilateur, ce qui augmente le facteur d'échange)...

Dans la suite on se place en dimension 2, on peut généraliser de manière immédiate à l'ailette axisymétrique. On peut aussi étendre au cas des ailettes de section lentement variable.

### 2.6.2 Analyse

Pour analyser le problème, il faut tenir compte de la faible épaisseur  $a$  par rapport à la longueur caractéristique de variation de la température  $L$  ( $a/L \ll 1$ ) (qui est d'ordre de grandeur de la longueur  $L_0$  du dispositif) et raisonner en flux :

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0$$


 FIGURE 6 – une représentation schématique de l'ailette de longueur  $L_0$  et d'épaisseur  $a$ .

Si on prend comme échelles  $L$  en  $x$  et en  $y$ , il n'y a aucune simplification possible, on résout en fait le système complet. Prendre  $a$  comme échelle en  $x$  et  $y$  est malvenu, car on se doute que cela ne permettra qu'une étude locale. Il est donc naturel de prendre pour échelles spatiales :

$$x = L\bar{x} \text{ et } y = a\bar{y} \text{ avec } aL \ll 1$$

La température en entrée de l'ailette est  $T_0$ , la température externe est  $T_{ext}$ . Le flux aux parois est relié à la température locale par échange convectif. Prendre une même jauge pour  $q_x$  et  $q_y$  conduit alors à :

$$\frac{\partial \bar{q}_x}{\partial \bar{x}} + (L/a) \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial \bar{y}} = 0 \text{ donc, (car } a \ll L \text{ ) } \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial \bar{y}} = 0.$$

On en déduit que la température ne dépend que de  $\bar{y}$ . Arrivé là on est bloqué.

Pour sortir de l'impasse, il faut adopter deux échelles différentes pour  $q_x$  et  $q_y$ . En effet, comme  $q_y$  est connu à la paroi,  $q_y(x, \pm a/2) = \pm h(T(x, \pm a/2) - T_{ext})$  sa jauge est donc  $Q_y = h(T_0 - T_{ext})$ . En revanche  $q_x$  est de jauge  $Q_x = k(T_0 - T_{ext})/L$ .

Posons  $q_x = Q_x \bar{q}_x$  et  $q_y = Q_y \bar{q}_y$ . Avec  $\bar{q}_x$  et  $\bar{q}_y$  sans dimension.

On substitue

$$Q_x \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial \bar{x}} + Q_y (L/a) \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial \bar{y}} = 0$$

Nous voulons garder le maximum de termes, donc par moindre dégénérescence  $a/L = hL/k$ , et ainsi :

$$\frac{\partial \bar{q}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial \bar{y}} = 0$$

**attention**,  $ka/(hL^2) = 1$  signifie que si  $a$ ,  $h$  et  $k$  sont donnés, la longueur  $L$  de variation du phénomène est  $L = \sqrt{(ka/h)}$ . Or, l'ailette a une longueur physique  $L_0$ , si  $L_0$  est du même ordre de grandeur que  $L$ , l'ailette est de la "bonne longueur", si  $L_0 \gg L$ , l'ailette est trop longue.

Si  $L_0 \ll L$ , l'objet n'est pas une ailette!

Posons pour la température l'adimensionnement suivant :

$$T = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})\bar{T}.$$

donc  $q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$  devient

$$Q_y \bar{q}_y = -k \frac{(T_0 - T_{ext})}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \text{ soit : } \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = -(a/L)(hL/k) \bar{q}_y = (a/L)^2 \bar{q}_y$$

et puisque est d'ordre un par construction,  $\partial \bar{T} / \partial \bar{y} = \partial / \partial \bar{y} = O((a/L)^2)$ , on retrouve le fait que la température varie transversalement très peu (d'ordre  $(a/L)^2$ ) dans le solide. On remarque que  $(a/L)^2 \ll 1$  s'écrit aussi :  $(a/L)^2 = ah/k$  et on pose :

$$Bi = \frac{ah}{k}.$$

Le nombre de Biot ( $Bi$ ) est très petit, on note que  $L = aBi^{-1/2}$ .

On a donc par intégration en  $\bar{y}$

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{T}_p(\bar{x}) + O(Bi).$$

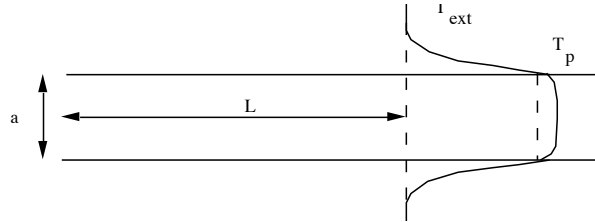


FIGURE 7 – la température varie peu transversalement dans l'ailette (de l'ordre de grandeur du nombre de Biot  $Bi$ ).

On retrouve ici ce qui est présenté comme l'hypothèse classique de distribution monodimensionnelle de température dans une ailette : la température reste peu différente de sa valeur à la paroi (notée  $\bar{T}_p(\bar{x})$ ). A l'ordre dominant :

$$\bar{q}_x = -\frac{d\bar{T}_p(\bar{x})}{d\bar{x}}$$

par intégration de la paroi (en  $\bar{y} = -1/2$  où le flux est donné  $\bar{q}_y(\bar{x}, \pm 1/2) = -\bar{T}_p(\bar{x})$ ) au centre (en  $\bar{y} = 0$  où le flux est nul par symétrie),

$$\frac{\partial \bar{q}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial \bar{y}} = 0 \text{ devient } \int_0^{1/2} \left( \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial \bar{y}} \right) d\bar{y} = 0$$

comme  $\int_0^{1/2} \left( \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial \bar{y}} \right) d\bar{y} = \bar{q}_y(\bar{x}, 1/2) - \bar{q}_y(\bar{x}, 0)$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{T}_p(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + \bar{q}_y(\bar{x}, 1/2) - 0 = 0$$

soit :

$$\frac{d^2 \bar{T}_p(\bar{x})}{d\bar{x}^2} - 2\bar{T}_p(\bar{x}) = 0,$$

(on peut enlever le facteur 2 par un choix plus subtil de la largeur de l'engin!). A l'extrémité de l'ailette (en  $\bar{x}_s = L_0/L$ ) on peut imposer soit une température d'ordre un, soit laisser l'ailette libre (ce qui est le cas le plus répandu). Le flux à l'extrémité est donc relié au coefficient d'échange, donc

$$-\frac{d\bar{T}_p(\bar{x}_s)}{d\bar{x}} = (Lh/k)\bar{T}_p(\bar{x}_s), \text{ avec } (Lh/k) = Bi^{1/2}.$$

Donc l'extrémité de l'ailette est adiabatique  $\frac{d\bar{T}_p(\bar{x}_s)}{d\bar{x}} = 0$ .

Ce résultat est déduit de la limite asymptotique  $Bi = 0$ . En fait, en pratique on se permet de garder le terme supplémentaire :  $\frac{d\bar{T}_p(\bar{x}_s)}{d\bar{x}} = Bi^{1/2}\bar{T}_p(\bar{x}_s)$ .

Remarque. On parle parfois de l'efficacité de l'ailette en faisant le rapport entre le flux ( $h\Delta T/(k\Delta T/L)$ ) =  $Bi^{1/2}$  le refroidissement est donc plus efficace avec une ailette que sans ailette...

### 2.6.3 Équation fondamentale de l'ailette

L'équation finale :

$$\frac{d^2 \bar{T}_p(\bar{x})}{d\bar{x}^2} - 2\bar{T}_p(\bar{x}) = 0.$$

Elle est à résoudre entre  $\bar{x} = 0$  où  $\bar{T}_p = 1$  et  $\bar{x}_s = L_0/(aBi^{1/2})$  qui est d'ordre un (pour une ailette bien dimensionnée) où le flux est en général  $\frac{d\bar{T}_p(\bar{x}_s)}{d\bar{x}} = Bi^{1/2}\bar{T}_p(\bar{x}_s)$ .

Les solutions sont obtenues de manière triviale (somme de sinus hyperbolique et de cosinus hyperbolique). Les coefficients dépendent des conditions aux limites par exemple :

\* si la sortie est libre ( $Bi$  n'est en fait pas pris infiniment petit)

$$\bar{T}_p(\bar{x}) = \frac{ch(2^{1/2}(\bar{x}_s - \bar{x})) + Bi^{1/2}sh(2^{1/2}(\bar{x}_s - \bar{x}))}{ch(2^{1/2}\bar{x}_s) + Bi^{1/2}sh(2^{1/2}\bar{x}_s)},$$

\* si la sortie est adiabatique (ou si  $Bi$  est assez petit)

$$\bar{T}_p(\bar{x}) = \frac{ch(2^{1/2}(\bar{x}_s - \bar{x}))}{ch(2^{1/2}\bar{x}_s)},$$

\* si l'ailette est semi infinie (très très longue), on n'a qu'une exponentielle décroissante :

$$\bar{T}_p(\bar{x}) = \exp(-2^{1/2}\bar{x}).$$

### 2.6.4 Calculs analytiques d'une configuration d'ailette

Avec l'appliquette Java `AiletTest.class`, on trace la distribution de température le long d'une ailette. On fait varier les coefficients  $k$ ,  $a$   $L$ ...

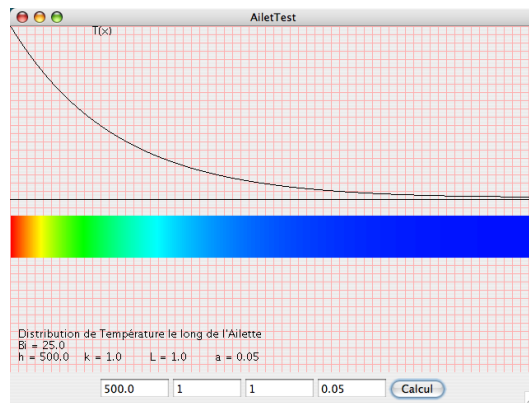


FIGURE 8 – La distribution de température le long d'une ailette.

### 2.6.5 Calculs numériques directs d'une configuration d'ailette

On montre ici quelques résolutions numériques directes avec FreeFEM (code d'éléments finis du domaine public). On se donne une géométrie fixe et on fait varier le coefficient d'échange. On se donne une longueur  $L_0=1$  et  $a = 0.05$ , en unités arbitraires. On résout :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

avec  $T(x = 0, 0 < y < a) = 1$ ,

et  $-(k/h)\frac{\partial T}{\partial n} = T$  en  $(0 < x < L_0; y = 0)$ , en  $(x = L_0; 0 < y < a)$  et en  $(0 < x < L_0; y = a)$ .

Par définition :  $Bi = (a/L_0)(hL_0/k)$ .

Après calcul, on trace ci dessous (fig 9) les lignes "iso température", on constate que plus  $Bi$  diminue, plus la température diffuse à partir de l'extrémité gauche chauffée.

Pour  $Bi = 10$ , on constate que les iso températures sont très recourbées, la distribution de température calculée sur l'axe (tracée ci dessus) est assez éloignée de la solution simplifiée (issue de l'approximation de l'ailette  $\bar{T}_p(\bar{x}) = \exp(-2^{1/2}(\bar{x}))$ ) : l'échelle  $(aBi^{1/2})$  n'est pas pertinente.

Pour  $Bi = 1$ , les iso températures sont un peu plus droites, la solution de l'ailette n'est pas trop mauvaise. Pour  $Bi = 0.1$ , les iso températures sont presque droites, la solution de l'ailette est bonne.

On voit bien que plus le nombre de Biot augmente, plus la longueur "L" diminue. Si en revanche le nombre de Biot diminue trop, l'ailette n'est plus efficace : la température y reste à peu près constante.

On constate bien que la simplification de "l'ailette" n'est valide que pour  $Bi < 1$  (en pratique  $Bi < 0.1$ ) et  $a/L_0$  petit, avec  $L_0/(aBi^{1/2})$  d'ordre un.

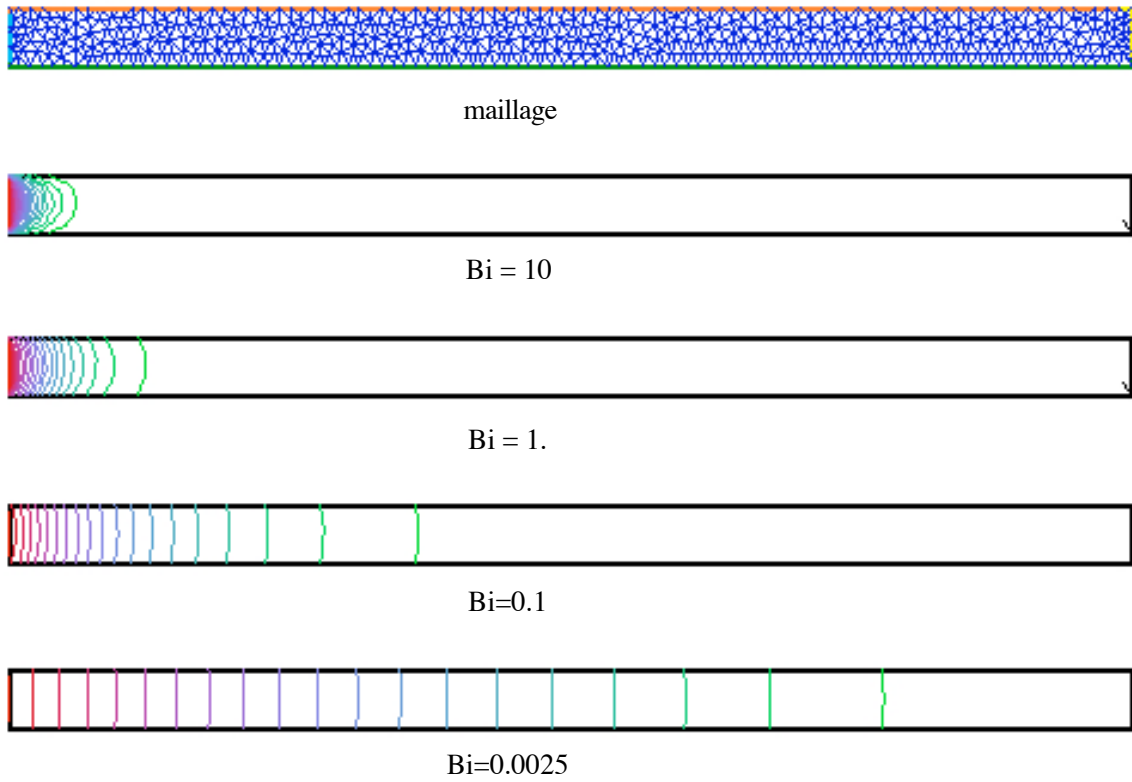


FIGURE 9 – Maillage et champs de température pour différents nombres de Biot.

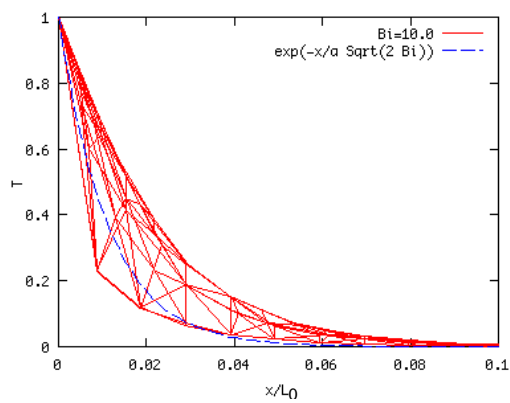


FIGURE 10 –  $Bi = 10$ , température sur l'axe comparée à la solution "ailette"

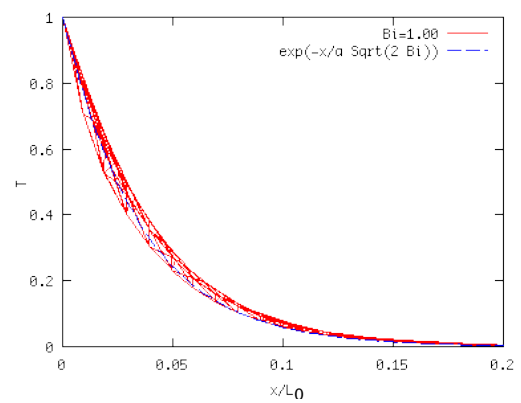


FIGURE 11 –  $Bi = 1$ , température sur l'axe comparée à la solution "ailette"



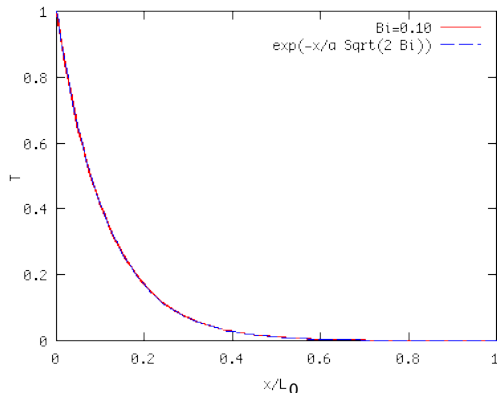


FIGURE 12 –  $Bi = 0.1$  température sur l'axe comparée à la solution "ailette"

### 2.6.6 Utilité de l'ailette

- s'il n'y a pas d'ailette le flux est  $h(T_0 - T_{ext}) = (k/a)Bi(T_0 - T_{ext})$
- s'il y a une ailette le flux est  $-k \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{k}{a} \sqrt{Bi}(T_0 - T_{ext})$

L'amplification du flux est :

$$\frac{-k \frac{\partial T}{\partial x}}{(T_0 - T_{ext})} = \frac{1}{\sqrt{Bi}} \gg 1$$

### 2.6.7 Conclusions pour l'ailette

- \* Retenons que dans les ailettes sont fines et que la distribution de température y est monodimensionnelle, les échanges ne sont importants qu'à la surface.
- \* Retenons que le nombre de Biot ( $Bi = \frac{ah}{k}$ ) est petit pour une ailette est que son efficacité est en  $1/\sqrt{Bi}$ .
- \* Retenons que la longueur caractéristique d'une ailette est  $\sqrt{(ka/h)} = a/\sqrt{Bi}$  (si elle est environ trois fois plus grande, on peut la couper, l'excédent n'a pas d'utilité, si elle est plus courte, elle ne remplit pas son rôle).

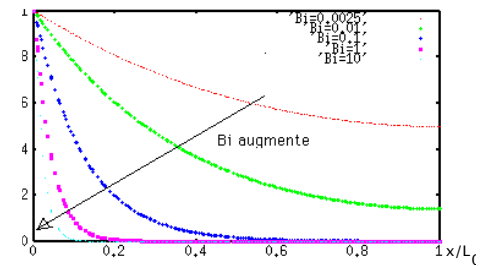


FIGURE 13 –  $T(x)$  pour différents nombres de Biot.

## 2.7. Conduction instationnaire

• équation de la chaleur dans un milieu immobile isotrope homogène, avec des coefficients thermodynamiques constants :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + r$$

• conditions aux limites (sur chaque portion de paroi) - température pariétale imposée :

$$T = T_p$$

OU - flux pariétal imposé :

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = \phi_p$$

OU - flux pariétal relié à la température pariétale et à la température extérieure par le coefficient d'échange :

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = h(T_p - T_{ext}).$$

La résolution numérique en ce nouveau siècle n'est guère plus compliquée (CAST3M, FreeFem++...).

### 2.7.1 Échelon de température

Pour mémoire, examinons un cas simple : la lamelle 1D soumise à un choc thermique (sans source de chaleur volumique). Cet exemple est développé dans TOUS les ouvrages de "thermique" : il est à connaître. On étudie donc maintenant un système épais (on comprend mieux le sens : épais, donc la température y varie spatialement).

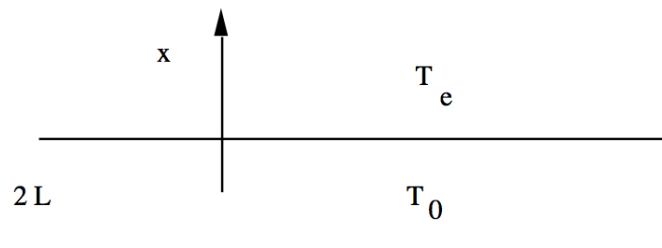


FIGURE 14 – Une lamelle infinie en  $y$  et  $z$ , de largeur  $2L$  en  $x$  de température uniforme  $T_0$  au temps initial plongée dans un milieu de température  $T_e$ .

Le problème à résoudre est :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

à  $t = 0$  on a  $T(x, t = 0) = T_0$  et pour  $t > 0$  on a  $-k \left( \frac{\partial T(x = \pm L, t)}{\partial x} \right) = \pm h(T(x = \pm L, t) - T_{ext})$

Posons,  $t = \tau \bar{t}$  et  $x = L \bar{x}$  et  $T = T_{ext} + (T_0 - T_{ext}) \bar{T}$ . La jauge de temps est obtenue par moindre dégénérescence on voit de manière simple :

$\tau = L^2/a$  avec  $a = k/\rho c_p$  ne dépend que du matériau. L'écriture de la condition de flux à la paroi permet de faire surgir le nombre de Biot. On va supposer ici qu'il est d'ordre 1 pour garder le maximum de termes. Le problème sans dimension (pour ce milieu épais) est donc :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} \right)$$

avec  $\bar{T} = 1$  en  $\bar{t} = 0$  et  $-(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}) = \pm Bi \bar{T}$  en  $\bar{t} > 0$  et  $\bar{x} = \pm 1$ .

On cherche la solution sous forme de variables séparées  $\bar{T}_k = f(\bar{t})g(\bar{x})$ . On obtient très simplement des fonctions trigonométriques en espace (c'est en fait une série de Fourier que l'on construit) et des exponentielles en temps :

$$T_k = \exp(-k^2 \bar{t}) \cos(k \bar{x} + \phi_k),$$

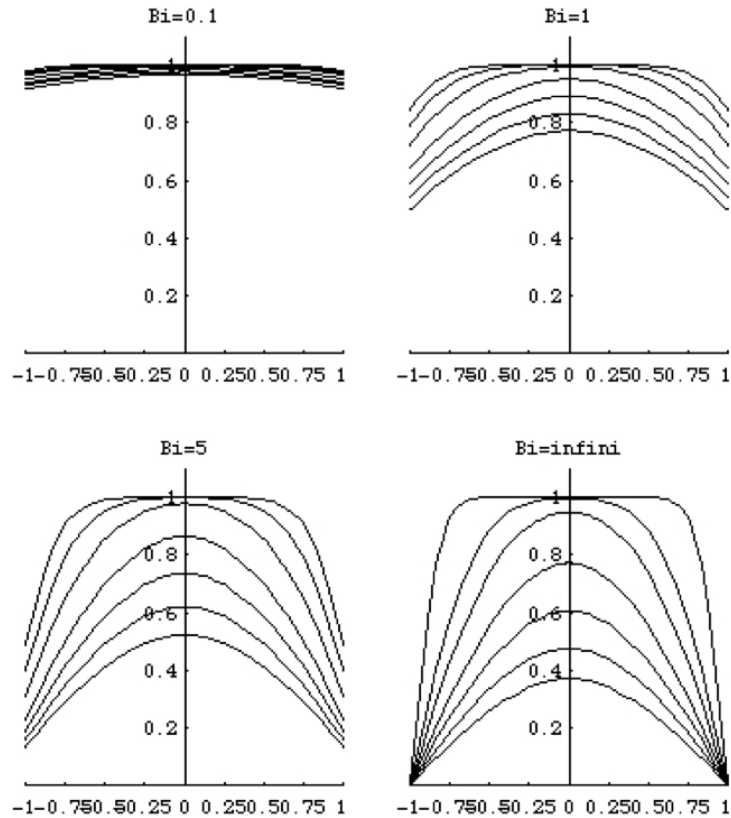


FIGURE 15 –  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{t})$  pour  $\bar{t}=0.025$  0.05 0.1 0.2 0.3 0.4 et 0.5  
 [click to launch the movie, Adobe Reader/ QuickTime required].

par symétrie par rapport au centre du milieu étudié la phase est nulle. La condition de bord s'écrit :

$$k \tan(k) = Bi.$$

On note  $k_i$  les valeurs propres croissantes avec  $i$ , la température s'écrit sous forme d'une somme de ces solutions élémentaires :

$$\sum_{i>0} A_i \exp(-k_i^2 \bar{t}) \cos(k_i \bar{x})$$

Si  $Bi = 0$ ,  $k_i = (i - 1)\pi$ .

Si  $Bi = 0.1$ ,  $k_1 = 0.311$ ,  $k_2 = 3.173$ ,  $k_3 = 6.300$ ,  $k_4 = 9.435...$

Si  $Bi = 1$ ,  $k_1 = 0.863$ ,  $k_2 = 3.4256$ ,  $k_3 = 6.4373$ ,  $k_4 = 9.5293...$

Si  $Bi = 10$ ,  $k_1 = 1.430$ ,  $k_2 = 4.306$ ,  $k_3 = 7.223$ ,  $k_4 = 10.2...$

Si  $Bi = 100$ ,  $k_1 = 1.555$ ,  $k_2 = 4.666$ ,  $k_3 = 7.777$ ,  $k_4 = 10.88...$

Si  $Bi = \infty$ ,  $k_1 = 1.57$ ,  $k_2 = 4.72$ ,  $k_3 = 7.854$ ,  $k_4 = 10.99$ ,  $k_i = (2i - 1)\pi/2$ .

Compte tenu de la condition initiale en temps 1 =  $\sum_{i>0} A_i \cos(k_i \bar{x})$ , par les propriétés de l'analyse de Fourier, les  $A_i$  s'écrivent :

$$A_i = \frac{2 \sin(k_i)}{k_i + \sin(k_i) \cos(k_i)}$$

Il serait aussi intéressant de tracer la température au centre en fonction du temps pour plusieurs  $Bi$ . On verrait alors que plus  $Bi$  est grand, moins la décroissance est rapide.

Le problème est alors résolu, des exemples d'évolution de températures dans différents cas sont présentés sur la figure . L'influence du nombre de Biot sur la solution est clairement mis en évidence.

### 2.7.2. Résolution numérique directe

On peut résoudre en direct par un calcul en différences finies l'équation de la chaleur. On change à la volée les conditions aux limites.

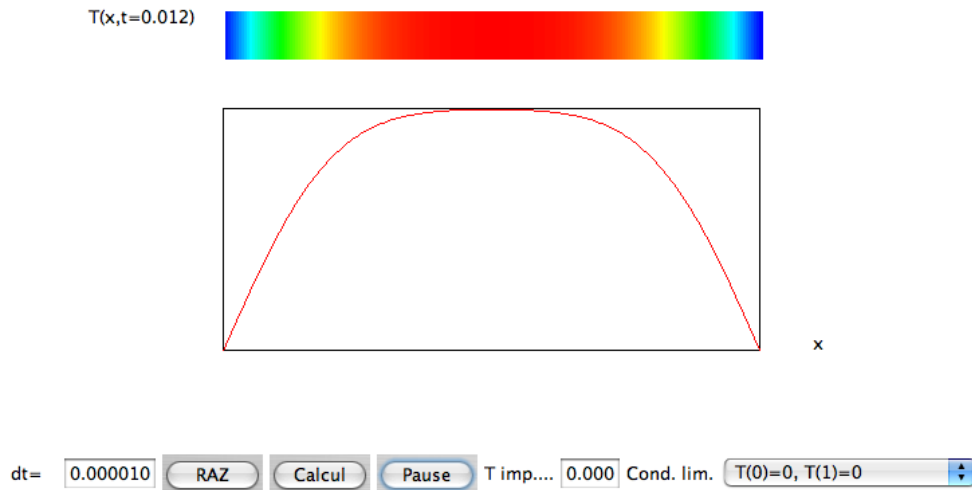


FIGURE 16 – Résolution en direct par différences finies de l'équation de la chaleur. [click to launch the Java Applet].

### 2.7.3 Remarques

i) remarque

- si  $Bi = \infty$ , il s'agit du cas de la température imposée :

$$\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \bar{t}}{4}\right) \cos((2n-1)\pi \bar{x}/2).$$

- si  $Bi = 0$ ,  $k_1 = 0$ , et  $A_1 = 1$ , les autres  $A_i$  sont 0. La température reste constante! C'est normal, le système est isolé (paroi "adiabatique", ou on dit aussi paroi "athermane").

- si  $Bi$  tend vers 0,  $k_1$  tend vers 0, et plus exactement  $k_1 \operatorname{tg}(k_1) = Bi$  donne  $k_1 \sim Bi^{1/2}$  et :

$$\bar{T} \sim \exp(-Bi\bar{t}) \cos(Bi^{1/2}\bar{x}),$$

on retrouve ce que nous avons vu auparavant, dans le cas des systèmes "minces", d'une part le temps n'est plus  $L^2/a = \rho c_p L^2/k$  mais bien  $(L^2/a)/Bi$ , d'autre part

$$\cos(Bi^{1/2}\bar{x}) \sim 1 - Bi\bar{x}^2/2 + \dots$$

la température est presque constante en espace (à l'ordre  $Bi$  près).

ii) remarque En pratique, il est usuel d'évaluer le nombre de Biot et de dire que si  $Bi > 0.1$ , on utilise la solution complète (milieu dit "thermiquement épais") et que si  $Bi < 0.1$  on utilise l'analyse du milieu dit "thermiquement mince").

iii) remarque On voit que rapidement (critère empirique usuel  $\bar{t} > 0.2$ ), il ne reste plus que le premier terme de la série :

$$\bar{T} = A_1 \exp(-k_1^2 \bar{t}) \cos(k_1 \bar{x}) + \dots,$$

le coefficient  $A_1$  varie peu avec  $Bi$ , de 1 ( $Bi = 0$ ) à 1.27 ( $Bi = \infty$ ,  $A_1 = 4/\pi$ ). Le coefficient  $k_1$  varie un peu plus : pour  $Bi = 0.1$  on a  $k_1 = 0.3$  et pour  $Bi = \infty$  on a  $k_1 = 1.57$  ( $\pi/2$ ), cette formule est utile pour avoir une bonne approximation du champ des températures. On voit que plus  $Bi$  est petit plus  $k_1$  est petit : un système qui échange peu de chaleur se refroidit lentement ( $1/k_1$  est grand).

iv) remarque

Le cas du flux constant imposé est laissé à titre d'exercice...

Le cas de la température imposée est examiné en PC, on y voit aussi la solution en *Erf*. Le cas axisymétrique peut aussi se calculer, on exhibe alors les fonctions de Bessel.

## 2.8. Conclusion

Ce chapitre était en fait un survol très rapide des différents problèmes de "conduction thermique" (*conduction*) dans leur forme la plus simple et en essayant de mettre en relief les nombres sans dimension.

Retenons l'équation de la chaleur (dans un milieu immobile isotrope homogène, avec des coefficients thermodynamiques constants, sans source volumique) :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T$$

et la variété de possibilités de ses conditions aux limites :

- soit  $T$  est donnée sur la paroi,

$$T = T_w$$

- soit le flux normal est donné sur la paroi,

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = \phi_p$$

- soit une combinaison des deux est donné sur la paroi,

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \underline{n} = h(T_p - T_{ext}) \underline{n}.$$

L'important facteur d'échange  $h$  est une simplification de TOUT l'extérieur,  $h$  est obtenu expérimentalement ou par l'analyse qui est présentée dans les chapitres suivants de ce cours dans les cas de la convection forcée et naturelle.

Retenons l'expression du nombre de Biot  $Bi = hL/k$ , et que :

- si  $Bi \ll 1$ , la température varie peu dans le domaine (milieu "mince"), l'échange est faible et  
 - si  $Bi \gg 1$ ,  $h$  est très grand, l'échange est très fort, la température est imposée aux bords.

L'étape suivante dans l'analyse pour un solide, consiste à tenir compte des déformations induites par le chauffage : il s'agit de la "thermoélasticité".

## 2.9. Bibliographie <sup>1</sup>

Y. Çengel (1998) "Heat transfert, a practical approach", Mc Graw Hill.

J. Dhombres J.-B. Robert (1998) "Fourier créateur de la physique-mathématique", coll un savant une époque, P.-Y. Lagrée, cours ENSTA, Conduction.

L. Landau & E. Lifshitz (1989) "Mécanique des fluides" ed MIR.

A. Leontiev (1985) "Théorie des échanges de chaleur et de masse" ed. MIR.

B. Lucquin & O. Pironneau (1996) "Introduction au calcul scientifique", Masson.

J.F. Sacadura (1993) "Initiation aux transferts thermiques", Lavoisier Tec & Doc.

---

1. fichier C2condu.tex cours complet sur <http://www.ida.upmc.fr/~lagree/COURS/ENSTA>

## 2.10. utilisation de FreeFem++

### Formulation variationnelle :

FreeFem++ est un code aux éléments finis permettant de résoudre facilement des problèmes du type  $\nabla^2 T + a \frac{\partial T}{\partial x} + b \frac{\partial T}{\partial y} = f$ . Ce programme est du domaine public et on peut le télécharger sur [www.freefem.org/ff++/](http://www.freefem.org/ff++/). On consultera la doc et l'ouvrage Lucquin & Pironneau (96) et celui de Danaila, Hecht & Pironneau (03). On peut aussi utiliser CAST3M, voire COMSOL, pour ce genre de problème.

Le principe est d'écrire les équations sous la forme faible, on multiplie donc l'équation de la chaleur ( $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ ) = 0 par une fonction test  $T^t$ , et on intègre sur tout le volume  $\int \int (\cdot) T^t dx dy$ . Par intégration par parties :

$$\int \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} T^t dx dy = - \int \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T^t}{\partial x} dx dy + \int \left[ \frac{\partial T}{\partial x} T^t \right] dy$$

$$\int \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} T^t dx dy = - \int \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial T^t}{\partial y} dx dy + \int \left[ \frac{\partial T}{\partial y} T^t \right] dx$$

sur les parois on a soit une température donnée, soit un flux, soit une condition mixte  $\frac{\partial T}{\partial n}|_p = -(h/k)(T_p - T_{ext})$ . donc comme  $\int \left[ \frac{\partial T}{\partial x} T^t \right] dy + \int \left[ \frac{\partial T}{\partial y} T^t \right] dx = \int \left[ \frac{\partial T}{\partial n} T^t \right] ds$ . au total, on va avoir

$$0 = - \int \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T^t}{\partial x} dx dy - \int \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial T^t}{\partial y} dx dy - (h/k) \int [(T_p - T_{ext}) T^t] ds$$

### Mise en oeuvre :

La définition du domaine se fait simplement, par exemple avec des portions de droites, la syntaxe sera par exemple :

```
// geometrie du rectangle longueur L0, epaisseur a, a/L0<<1
real a=.1;
real L0=1;
// definition des cotes Maillage
border b(t=0,1) { x= t;          y = 0 ;          };
border d(t=0,1) { x= L0;         y =a * t;       };
border h(t=0,1) { x= L0*(1 - t); y = a ;         };
border g(t=0,1) { x= 0;          y =a * (1-t) ;   };
int n=5;
mesh Th = buildmesh(b(15*n)+d(n)+h(15*n)+g(n));
```

`border` est le mot clef de définition du bord frontière, on appelle `b`, `d`, `h`, `g` respectivement le bas la droite, le haut et la gauche (remarquer que l'on tourne dans le sens trigonométrique), on explicite la frontière sous forme paramétrée, avec `t` le paramètre qui varie de 0 à 1.

`espace Vh2(Th,P2)`;

`Vh2 T,Tt`;

définit l'espace de résolution, ici P2. `T` et `Tt` sont les variables  $T$  et  $T^t$ . `mesh` construit le maillage avec le nombre de points choisis sur les frontières.

Le problème est posé avec `problem`

```
//Temperature en entree
real T0 =1;
//Nombre de Biot: Bi = a h/k
// c'est lui que l'on se donne car on veut jouer avec lui
// normalement c'est h qui est donne.
real Bi=1;
// H coefficient d'echange reduit H=hL0/k:      donc H = h L0/k = Bi L0/a
// la longueur L/L0 est      (a/L0)*Bi^(-1/2)
real H= Bi*L0/a;
// resolution
problem ailette(T,Tp)=
  int2d(Th) (dx(T)*dx(Tp)+ dy(T)*dy(Tp))
  + int1d(Th,1,2,3) (H*T*Tp)
  + on(4,T=T0) ;
```

Deux exemples simples sont proposés : celui de l'ailette et l'effet d'entrée thermique dans les tubes (chapitre suivant). On peut construire à loisir d'autres exemples plus ou moins simples de conduction thermique stationnaire et instationnaire. Le fichier précédent est sur <http://www.ida.upmc.fr/~lagree/COURS/ENSTA/HTMLPC/PC1/index.html>

### 2.10.1 exemple : l'ailette

```
// On veut resoudre par FreeFem++ :
//          d^2 T/dx^2 + d^2 T/dy^2 = 0
// dans un rectangle fin , T impose=1 sur la face de gauche (notee 4),
// sur les autres faces (notees 1,2,3) -k dT/dn = h T
// geometrie du rectangle longueur L0, epaisseur a, a/L0<<1
real a=.1;
real L0=1;
// definition des cotes Maillage
border b(t=0,1) { x= t;          y = 0 ;          };
border d(t=0,1) { x= L0;         y =a * t;        };
border h(t=0,1) { x= L0*(1 - t); y = a ;          };
border g(t=0,1) { x= 0;          y =a * (1-t) ;    };
int n=5;
mesh Th = buildmesh(b(15*n)+d(n)+h(15*n)+g(n));
plot(Th,wait=1);
fespace Vh2(Th,P2);
Vh2 T,Tt;
//Temperature en entree
real T0 =1;
//Nombre de Biot: Bi = a h/k
// c'est lui que l'on se donne car on veut jouer avec lui
// normalement c'est h qui est donne.
real Bi=100;
// H coefficient d'echange reduit H=hL0/k:   donc H = h L0/k = Bi L0/a
// la longueur L/L0 est      (a/L0)*Bi^(-1/2)
real H= Bi*L0/a;
// resolution
problem ailette(T,Tt)=
  int2d(Th)(dx(T)*dx(Tt)+ dy(T)*dy(Tt))
  + int1d(Th,1,2,3) (H*T*Tt)
  + on(4,T=T0) ;

for(int i=0;i<7;i++)
{ cout << "coef d echange H=" << H << "   Bi=" << Bi
  << " L/L0:=" << (a/L0)*Bi^(-1/2) << endl ;
  ailette;
  plot(T,fill=1,cmm="H="+H + " , min=" + T[].min + " , max=" + T[].max,wait=1);
  Bi=Bi/10;
  H= Bi*L0/a;
  { ofstream gnu("plot.gp");
    int nx=50;
  for (int i=0;i<=nx;i++)
  { real x=i*1./nx;
    gnu << x << " " << T(x,a/2) << endl;
  } }
}
```

### 2.10.2 exemple : effet d'entrée dans un tube.

Cet exemple est examiné dans le chapitre suivant.

```
/* New ++ 01/07 */
int nmx=10;
int nmy=10*2; //multiplier par 4 les deux
wait=1;
```

```

real L=15;
real L1=3;
/* effet d'entree dans un tube */
border b1(t=0,1) {x=-L1; y=1-t; };
border b2(t=0,L1) {x=-L1+t; y=0; };
border b3(t=0,L) {x=t; y=0; };
border b4(t=0,1) {x=L; y=t; };
border b5(t=0,L) {x=L-t; y=1; };
border b6(t=0,L1) {x=-t; y=1; };
/* fin de la definition de la geometrie */
mesh sh =
  buildmesh(b1(nmy)+ b2(L1*nmx)+b3(L*nmx)+
            b4(nmy)+ b5(L*nmx)+b6(L1*nmx));
plot(sh);
/* construction du maillage */
fespace Vh2(sh,P2);
/* Temperature en entree */
real T0 =1;
/* construction du maillage */
/* vitesse de Poiseuille entre deux plans */
func u0=(1.-y)*y;
/* derivee vitesse de Poiseuille */
func du02=(1-2*y)*(1-2*y);
/* inverse de Peclet */
real invP=1./1000;
/* nombre de Eckert et Peclet unis */
real Ep=0.1*invP;
Vh2 T,Tp;

problem therm(T,Tp) =
  int2d(sh)(dx(T)*dx(Tp)*invP + dy(T)*dy(Tp)*invP)
  + int2d(sh)(dx(T)*Tp*u0)
  + int2d(sh)(Tp*Ep)
  + on(b2,T=0)
  + on(b3,T=T0)
  + on(b5,T=T0)
  + on(b6,T=0) ;

therm;

plot(sh,cmm=" Pe=" + 1/invP ,T,fill=1);
{ ofstream ff("T"+ 1/invP+".txt");
  real x,y;
  int i,np=100;
  for (i=0;i<np;i++)
    { x=-L1+ i*(L+L1)/np;
      y=T(x,0.5);
      ff << x<< " " << y <<endl;}
}

{ ofstream ff("ture"+ 1/invP+".txt");
  real x,y,eta;
  int i,np=100;
  for (i=0;i<np;i++)
    { x=L/2; y=i*0.5/100 ;
      eta= y/pow(x,(1./3.));
      ff << y << " " << T(L/32,y) << " " << " " << T(L/16,y) << " "
        << " " << T(L/8 ,y) << " " << " " << T(L/4 ,y) << " "
        << " " << T(L/2 ,y) << endl;}
}

{ ofstream ff("leveq"+ 1/invP+".txt");
  real x,y,eta;

```



```
int i,np=100;
for (i=0;i<np;i++)
  { x=L/2;      y=i*0.5/10 ;
    eta= y/pow(x,(1./3.));
    ff <<  y/pow(L/16*invP,1./3) << " " << T(L/16,y) << " "
      <<  y/pow(L/8 *invP,1./3) << " " << T(L/8 ,y) << " "
      <<  y/pow(L/4 *invP,1./3) << " " << T(L/4 ,y) << " "
      <<  y/pow(L/2 *invP,1./3) << " " << T(L/2 ,y) <<  endl; }
}
```

### Biblio

Lucquin B. & Pironneau O. (1996). "Introduction au calcul scientifique", Masson.  
Danaila, Hecht & Pironneau (2003) "Simulation numérique en C++", Masson  
<http://www.asci.fr/Christophe.Prudhomme/freem/doc/gfemdoc.toc.html> Sur cette page, MacGfem et PCG-fem (versions graphiques) sont maintenant disponibles.  
<http://www-rocq.inria.fr/Frederic.Hecht/FreeFemPlus.htm> la nouvelle version !  
F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric & K. Ohtsuka, freefem++ : <http://www.freefem.org>

page blanche

### III. Convection Forcée

#### Résumé

Dans ce chapitre, nous allons voir comment un courant de fluide s'écoulant sur une paroi chaude va refroidir celle-ci. C'est la convection forcée (*Forced convection*, *convezione forzata* en italien, *convecção forçada* en portugais). D'abord nous simplifions les équations en nous plaçant dans le cadre incompressible, cela permet de découpler les équations thermiques et dynamiques. Nous introduirons les nombres sans dimension de la thermique (Péclet, Eckert, Prandtl et Nusselt) et nous examinerons leur influence par analyse phénoménologique. Le cas des tubes (problème de Graetz, problème de Lévêque en PC) et le cas de la plaque plane sans gradient de pression (problème de Blasius) seront étudiés, ce sont les archétypes de tous les problèmes thermiques internes (Graetz) et externes (Blasius). A l'issue de chaque analyse (convection interne ou externe), on trouve le flux d'énergie à la paroi si la température est imposée ou la température si le flux est imposé, puis on construit le nombre de Nusselt et le coefficient d'échange.

#### 3.1. Problème général de thermique (fluide incompressible)

##### 3.1.1. Le problème complet simplifié :

Le problème général pour un fluide compressible a été posé au chapitre premier. Toutes les équations étaient à résoudre simultanément. Le chapitre second nous a fait comprendre l'importance de l'estimation des transferts aux bords du domaine. La suite du cours est principalement consacrée (sauf mention contraire) à la résolution des équations de la thermique pour un écoulement de fluide incompressible newtonien.

Cela nous permet de simplifier drastiquement les équations.

On introduit l'hypothèse d'incompressibilité qui est une hypothèse dynamique :  $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ , la conservation de la masse nous dit alors que la densité est constante le long d'une ligne de courant.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Cette simplification est valide dans le cas des liquides, dans le cas des gaz en revanche, elle est plus restrictive : il est en effet très intuitif que si on chauffe un gaz à pression constante sa densité décroît. L'effet du chauffage sur la variation de densité et le mouvement éventuel associé sera examiné dans un chapitre ultérieur (convection naturelle).

La viscosité est prise constante par rapport à la température, on peut donc faire apparaître le Laplacien de la vitesse dans la divergence du tenseur des contraintes :

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \underline{f}.$$

comme  $\underline{\underline{\tau}} = \lambda \nabla \cdot \underline{u} \underline{I} + 2\mu \underline{D}$ , le tenseur des contraintes visqueuses  $\tau_{ij}$  se réduit à  $2\mu D_{ij}$ ; la divergence  $\tau_{ij,j}$  (convention d'Einstein) devient simplement  $\mu u_{i,jj}$ . On reconnaît la viscosité multipliée par le Laplacien de la vitesse :

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \underline{f}.$$

On rappelle que la variation d'énergie interne ne tient compte que la puissance des efforts intérieurs ( $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{D}$ ) plus les échanges de chaleur ( $-\nabla \cdot \underline{q} + r$ ) :

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \nabla \cdot \underline{u} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{D} - \nabla \cdot \underline{q} + r.$$

et le théorème de l'énergie cinétique est la variation d'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la somme des puissances des efforts intérieurs ( $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$ ) et extérieurs ( $\underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) + \underline{u} \cdot \underline{f}$ ) qui s'exercent sur le volume de contrôle.

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = p \underline{\nabla} \cdot \underline{u} - \underline{\tau} : \underline{\underline{D}} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) + \underline{u} \cdot \underline{f}$$

la somme des deux est bien la forme conservative présentée dans le tableau du chapitre 1.

On va supposer aussi que  $k(T)$  est une constante donc, l'opposé de la divergence du flux de densité de chaleur  $\underline{q}$  se réduit au Laplacien

$$-\underline{\nabla} \cdot (-k \underline{\nabla} T) = k \underline{\nabla}^2 T$$

On a par définition de la variation de l'énergie interne par les apports de chaleurs de dissipation visqueuse, de diffusion thermique et de travail mécanique : (avec  $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \lambda \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{D}}$  et  $\underline{q} = -k \underline{\nabla} T$ )

$$\rho \frac{de}{dt} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} + r \text{ soit } \rho \frac{de}{dt} = k \underline{\nabla}^2 T + \lambda (\underline{\nabla} \cdot \underline{u})^2 - p \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + 2\mu (\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}) + r.$$

Nous étudions ici pour commencer des fluides homogènes de densité constante, l'énergie interne ne dépend donc que de la température et on écrira :

$$de \simeq c_p(T) dT.$$

Cette **approximation** sera discutée dans le cas de la couche limite compressible et dans le cadre du chapitre sur la convection libre du prochain chapitre. Nous y établirons la relation suivante qui est l'équation de la chaleur en tenant compte d'effets de compressibilité :

$$\rho c_p \frac{d}{dt} T + \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{d}{dt} p = k \underline{\nabla}^2 T + \lambda (\underline{\nabla} \cdot \underline{u})^2 + 2(\mu \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}) + r.$$

Disons simplement pour l'instant que l'écart entre le  $c_p$  et le  $c_v$  est lié à la compressibilité du fluide, et que pour un liquide incompressible  $c_p$  est environ égal à  $c_v$ . On simplifie encore davantage en supposant que  $c_p(T)$  est constant sur la plage de température étudiée.

### 3.1.2. Le problème de la convection forcée

Soit donc un solide contenu dans fluide, les deux ont des caractéristiques qui sont supposées constantes. Le problème de la "convection forcée" à résoudre est :

- équations dynamiques (Navier Stokes)

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0.$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} \right) = -\underline{\nabla} p + \underline{f} + \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u}.$$

- équation de la chaleur en incompressible

$$\rho c_p \left( \frac{\partial}{\partial t} T + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T \right) = k \underline{\nabla}^2 T + 2(\mu \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}) + r.$$

- équation de la chaleur dans le solide

$$\rho c_s \left( \frac{\partial}{\partial t} T \right) = k_s \underline{\nabla}^2 T.$$

- conditions aux limites

adhérence à la paroi, vitesse imposée au loin.

égalité des températures et des flux normaux aux parois

C'est le système complet à résoudre... Il est remarquable que les problèmes dynamiques et thermiques sont **découplés**. La température n'influence pas la vitesse. C'est pour cela que l'on peut résoudre les équations de Navier Stokes incompressibles sans se soucier de la température.

Malgré la perte de généralité introduite par l'hypothèse d'incompressibilité (on se restreint aux liquides et au gaz à faible vitesse avec un chauffage faible), et malgré le fait que les coefficients soient pris constants par rapport à la température, ces équations restent très difficiles à résoudre. On peut considérer que ces équations suffisent pour résoudre de nombreuses situations physiques; en fait, leur analyse servira pour dimensionner un problème, extraire une description simple pour ensuite guider la résolution numérique qui se fera avec un code performant.

### 3.1.3. Le problème de convection forcée pour le fluide sans conduction dans le solide

Si on oublie le solide, il faut résoudre les équations pour le fluide en imposant la température **ou** le flux **ou** une condition liant les deux à la paroi.

- équations dynamiques

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0.$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} \right) = -\underline{\nabla} p + \underline{f} + \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u}.$$

- équation de la chaleur en incompressible

$$\rho c_p \left( \frac{\partial}{\partial t} T + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T \right) = k \underline{\nabla}^2 T + 2(\mu \underline{D} : \underline{D}) + r.$$

- conditions aux limites pour la vitesse
  - un écoulement au loin imposé
  - adhérence à la paroi.
- conditions aux limites pour la température

**soit**

- température imposée à la paroi,

**soit**

- flux imposé à la paroi.

**soit**

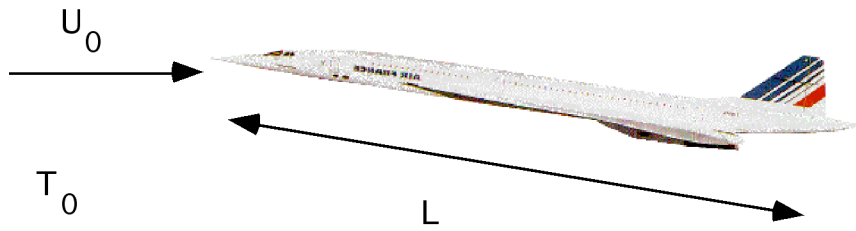
- condition avec le flux et le coefficient d'échange

Il y a découplage entre le fluide et le solide, la résolution de l'équation de la température est aussi découplée de la résolution dynamique. Ces équations sont les **équations de la convection forcée**.

## 3.2. Analyse de l'équation de la chaleur

### 3.2.1. Température adimensionnée

Prenons les différents termes des équations et évaluons leur poids relatif pour simplifier encore. Pour cela on adimensionne, on fait apparaître des groupements sans dimension puis on interprète chaque terme; certains de ces nombres sont assez grands (ou assez petits), on se pose ensuite la question : que se passe-t-il si un des nombres est très très grand grand : infini (ou très très petit : nul)... ? On obtient le comportement asymptotique qui donne des indications fondamentales. C'est la bonne démarche pour simplifier les équations.


 FIGURE 1 – Un objet de taille  $L$  dans un écoulement uniforme de vitesse  $U_0$ .

On se donne donc une vitesse  $U_0$  et une longueur  $L$ , *a priori* les mêmes dans toutes les directions :

$$u = U_0 \bar{u} \quad \text{et} \quad v = U_0 \bar{v}$$

$$x = L \bar{x} \quad \text{et} \quad y = L \bar{y}$$

$U_0$  sera la vitesse du fluide considéré ou de la paroi...  $L$  est la taille pertinente du système. La subtilité du choix de  $L$  et  $U_0$  a déjà été discutée lors de l'introduction des nombres sans dimension (en couche limite). Le premier problème est celui du choix de la jauge de la température  $T$ , *a priori* on pense l'écrire sous la forme :

$$T = T_0 \bar{T},$$

où  $T_0$  est (par exemple) la température du fluide loin de la paroi (ou au contraire la température de la paroi, au choix). Or les hypothèses dans lesquelles nous nous plaçons sont telles que la variation de température n'est pas trop forte (pour respecter entre autre l'incompressibilité). On va donc écrire de manière générale que la température est de la forme :

$$T = T_r + (\Delta T) \bar{T},$$

où  $T_r$  est une température de référence (par exemple  $T_0$ , la température du fluide loin de la paroi qui serait disons à la température  $T_w$ , "w : wall" bien entendu  $T_p$  avec "p : paroi" va très bien aussi) et  $\Delta T$  un écart de température tel que  $\Delta T/T_r$  ne soit pas trop grand (si  $(\Delta T)/T_r$  est au final grand, il faut résoudre Navier Stokes compressible complet). La jauge de la température sera par exemple construite avec l'écart de température entre le fluide  $T_0$  et la paroi  $T_w$ .

$$T = T_0 + (T_w - T_0) \bar{T} \quad \text{avec} \quad \bar{T}_{paroi} = 1.$$

Mais on n'est pas obligé de privilégier  $T_0$ , on peut donc poser :

$$T = T_w + (T_0 - T_w) \bar{T} \quad \text{et avec} \quad \bar{T}_{paroi} = 0 \quad \text{ou} \quad T = T_w + (T_w - T_0) \bar{T} \quad \text{et attention} \quad \bar{T}_{paroi} = -1.$$

Lorsque le flux est imposé à la paroi ( $q_w$ ), il sera en revanche plus judicieux de construire  $(\Delta T)$  avec cette expression, une possibilité simple serait :

$$(\Delta T) = (q_w) L / k.$$

Anticipons sur la suite : la température variera dans l'épaisseur de la couche limite thermique, si elle existe, le bon dimensionnement sera donc  $(\Delta T) = k^{-1} (q_w \delta_{Thermique})$ . Remarquons que si le flux à la paroi est nul, ce qui est le cas de la paroi athermane (parfaitement isolée), l'ordre de grandeur de  $(\Delta T)$  est imposé par l'analyse phénoménologique (*c.f.* le § suivant et la définition du nombre d'Eckert). Il y a donc au moins trois possibilités de définition de la température.

### 3.2.2. équation de la chaleur sans dimension :

Ayant posé l'échelle ( $\Delta T$ ) (c.f. plus haut), l'équation de l'énergie s'écrit en variables extérieures :

$$S \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + (\bar{\underline{u}} \cdot \bar{\underline{\nabla}}) \bar{T} = \frac{1}{Pe} \bar{\underline{\nabla}}^2 \bar{T} + 2 \frac{E}{Re} \bar{\underline{\underline{D}}} : \bar{\underline{\underline{D}}}.$$

et on veut trouver la température ou le flux en particulier à la paroi, on cherchera à déterminer le nombre de Nusselt  $Nu$  qui est un résultat du calcul puisque c'est l'ordre de grandeur du flux final sans dimension.

- $S$  est le nombre de Strouhal, c'est le rapport entre le temps "convectif"  $L/U_0$  et un temps caractéristique dépendant par exemple des conditions aux limites (si on fait varier la température de la paroi).

- $Re = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$  est le nombre de Reynolds, il nous est bien connu, (d'autres nombres sans dimension de la dynamique que nous connaissons déjà peuvent intervenir dans l'équation de la quantité de mouvement comme le nombre de Froude...). On écrit aussi le nombre de Reynolds avec la viscosité dynamique :  $Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$ .

- $Pe$  est le nombre de Péclet, c'est le pour ainsi dire le "frère" de Reynolds  $Pe = \frac{\rho c U_\infty L}{k}$ , si on pose  $a = k/(\rho c)$  la diffusivité thermique alors  $Pe = \frac{U_\infty L}{a}$ .

$$Pe = Re P_r$$

où  $P_r$  est le nombre de Prandtl  $P_r = \mu c/k = \nu/a$ . C'est un nombre intrinsèque qui ne dépend que du fluide considéré. Le nombre de Péclet est en facteur du terme de diffusion. S'il est grand il va nous poser des problèmes tout comme le nombre de Reynolds lorsqu'il est grand... On conçoit que certains fluides (très particuliers) se prêteront à des simplifications ( $P_r \gg 1$  ou  $P_r \ll 1$ ).

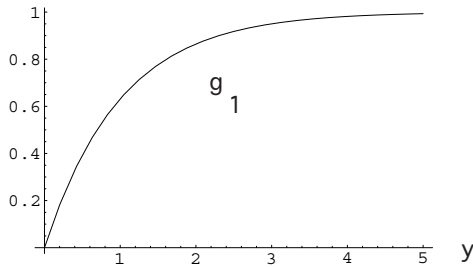
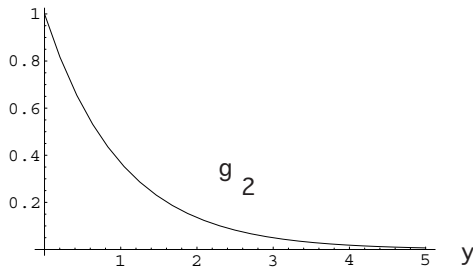
- $E = \frac{U_\infty^2}{c(\Delta T)}$ , est le nombre d'Eckert. Il est en terme de source,  $E/Re$  est le nombre qui jauge la contribution relative d'élévation de ture par dissipation, c'est aussi  $EPr/Re$ . On remarque qu'il est le seul à dépendre de la jauge de température.

Si ( $\Delta T$ ) est connu  $E$  est connu.

Si en revanche ( $\Delta T$ ) n'est pas connu, ce terme est celui qui "échauffe" il permet donc de déterminer ( $\Delta T$ ) par moindre dégénérescence (c'est principalement le cas quand la paroi est adiabatique, voir aussi le début de la PC 2).

Remarquons que si on choisit comme jauge  $T_\infty$ , la température loin de l'obstacle, et que l'on travaille avec un gaz compressible à divergence non nulle, (il faut résoudre  $\partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0...$ ) on peut faire apparaître le nombre de Mach :  $M_\infty^2 = \frac{U_\infty^2}{\gamma r T_\infty} \dots$

- $Nu = \frac{\phi}{k(T_w - T_\infty)}$  est le nombre de Nusselt avec  $\phi = -k \frac{\partial T}{\partial n}$  la valeur du flux de chaleur à la paroi. C'est le résultat du calcul.



Pour lever l'ambiguïté du choix de la température de référence  $T_w$  ou  $T_\infty$ , soit on choisit l'une ou l'autre, cela donne deux descriptions pour la température :

$$T_1 = T_w + (T_\infty - T_w)g_1$$

$$T_2 = T_\infty + (T_w - T_\infty)g_2$$

Le Nusselt est

$$-L \frac{\partial T_1}{\partial y} / (T_w - T_\infty) = L \frac{\partial g_1}{\partial y} > 0$$

$$-L \frac{\partial T_2}{\partial y} / (T_w - T_\infty) = -L \frac{\partial g_2}{\partial y} > 0$$

il est bien positif dans les deux cas!

### 3.2.3. Quelques conclusions faciles :

- $S$  : on le suppose égal à un pour un maximum de généralité. Le prendre très grand va faire disparaître les dérivées spatiales ( $\underline{\bar{u}} \cdot \underline{\bar{\nabla}}$ ) le fluide se transforme en solide ce qui n'est pas l'objet de ce cours! On supposera souvent l'écoulement stationnaire  $S = 0$  : ce qui veut dire que le temps d'établissement est très court par rapport au temps de transport.

- si  $Pe \ll 1$  et  $EP_r \ll 1$ , on est dans un cas où le transfert de chaleur se fait comme dans un solide (stationnaire si  $S < 1$ , instationnaire si  $SPe \sim 1$ ) : la vitesse du fluide est trop faible. La résolution est facilitée. Si  $EP_r \sim 1$ , il y a un terme source en plus.

- $P_r \gg 1$  le fluide est mauvais conducteur (l'équation de la chaleur en  $(P_r Re)^{-1}$  diffuse moins que l'équation dynamique en  $Re^{-1}$ ).

- $P_r \ll 1$  le fluide est bon conducteur  $(P_r Re)^{-1} \gg Re^{-1}$ .

- Si  $E \ll 1$ , il y a entraînement et diffusion sans source volumique. Souventes fois  $E$  sera pris petit et négligeable quand la température est imposée au loin et à la paroi car les vitesses sont faibles, et  $c$  est "grand". Mais attention, dans le cas de l'huile visqueuse (pour les huiles  $P_r$  est très grand), entre des paliers ce terme peut être important car la vitesse est faible, Donc  $EP_r$  peut être suffisant pour que la température passe par un maximum entre les paliers.

Ce terme de dissipation visqueuse est aussi fondamental lorsque la paroi est adiabatique puisque c'est ce terme qui dimensionne l'élévation de la température.

- Soit  $Pe$  est petit, et dans ce cas  $EP_r$  doit être d'ordre un, ce qui veut dire que l'élévation de température est liée à la diffusion visqueuse, en posant  $EP_r = 1$  :

$$(\Delta T) = \frac{\mu U_0^2}{k}$$

ce cas peut intervenir entre deux paliers en écoulement interne.

- Soit  $Pe$  est grand, le terme de diffusion est négligeable. Dans ce cas la chaleur créée par la dissipation visqueuse (qui est d'ordre  $E/Re$ ) est convectée (ordre 1) par l'écoulement, en posant



$$\frac{U_\infty^2}{c(\Delta T)Re} = 1 :$$

$$(\Delta T) = \frac{\nu U_\infty}{cL}$$

- si  $Pe$  est très grand ( $E$  petit pour fixer les idées), le terme de dérivée élevée disparaît : la conduction n'a pas le temps de jouer son rôle, la température n'est pas modifiée lorsque le fluide rencontre l'obstacle. On retrouve la problématique des écoulements de fluide parfait (la vitesse n'a pas le temps de varier de  $U_0$  à 0 lorsqu'elle passe sur l'obstacle). Il y a alors un problème grave : on ne peut plus satisfaire toutes les conditions aux limites... Il va falloir introduire une couche limite dans laquelle la température varie très vite.

### 3.3. Convection forcée interne

#### 3.3.1 Observations d'une couche limite dans un tuyau

On va traiter du problème d'entrée qui est fondamental en plomberie : comment varie la température dans une canalisation qui passe du sol froid à une pièce chaude, l'eau sera-t-elle trop chaude pour être bue au robinet bleu ? Plus généralement, il s'agit d'une première approche du problème de l'échangeur thermique : quelle doit être la longueur minimale de refroidissement pour baisser la température d'un fluide (par exemple la vapeur dans un échangeur de centrale nucléaire...)

Soit donc un tuyau assez long pour que le régime d'entrée soit hydrodynamiquement établi en un régime d'écoulement de Poiseuille de vitesse caractéristique  $U_0$ . Soit  $D$  le diamètre qui est choisi comme unité de longueur caractéristique. Le nombre de Péclet sera  $\rho c_p U_0 D / k$ . Le tuyau est maintenu à une température  $T_0$  avant une certaine section choisie comme origine des abscisses  $x$  puis à une température  $T_1$  au delà.

Pour résoudre, il se pose le problème des conditions aux limites autres qu'à la paroi. A l'entrée, on peut penser imposer  $T = T_0$ , ce qui traduirait un équilibre de température entre la paroi et le fluide. C'est en fait faux lorsque le nombre d'Eckert n'est pas nul : il y a un terme source volumique. Nous imposons donc plutôt l'invariance par translation du profil de température  $\partial T / \partial x = 0$ , cela signifie que l'écoulement est établi depuis une longue distance, ce qui revient à dire que la température a oublié les détails de son histoire. à la sortie, nous imposons aussi l'invariance par translation :  $\partial T / \partial x = 0$  (le régime est ré établi en température, il a oublié la variation brusque de température).

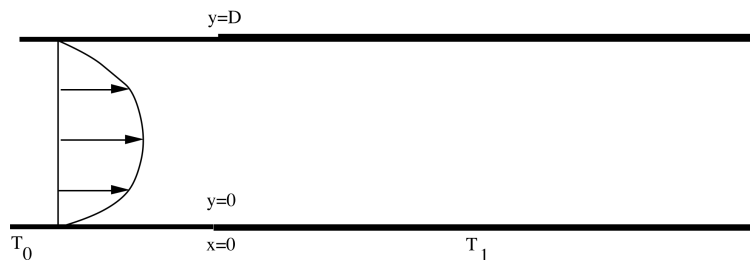


FIGURE 2 – écoulement 2D de Poiseuille entre deux plaques plane, l'écoulement est le même partout, la température de la paroi est discontinue en  $x = 0$ .

Examinons cet exemple très simple avec FreeFEM, trichons un peu en examinant non pas un tuyau, mais deux plaques parallèles. Un programme typique de résolution est donné dans l'Annexe du chapitre 2.

En faisant varier le poids relatif des différents paramètres on retrouve les différents régimes évoqués plus haut, visibles sur les lignes iso températures.

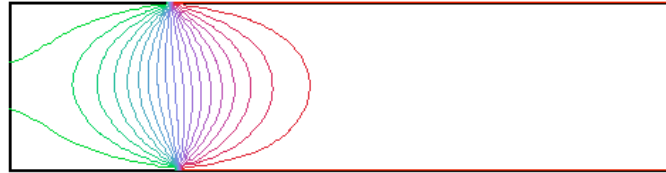


FIGURE 3 – • Si Eckert est petit et si  $Pe$  est très petit : Le fluide est un "solide", le résultat est symétrique (à l'effet de bord près la condition  $\partial T/\partial x=0$  qui déforme les isothermes car l'accident est trop près de l'entrée).

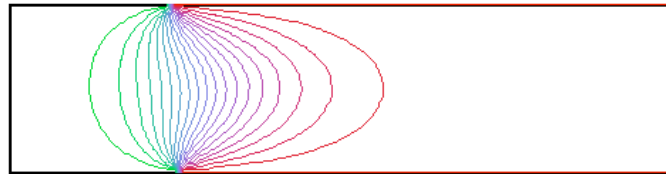


FIGURE 4 – • Si Eckert est petit, on a augmenté  $Pe$  : La vitesse est suffisante pour convecter légèrement la température vers la droite...

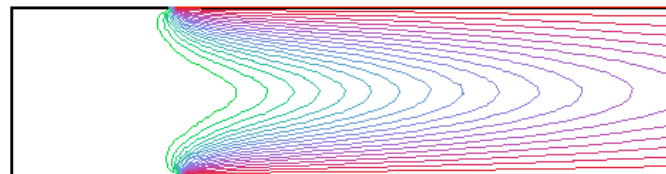


FIGURE 5 – • Si Eckert est petit et  $Pe$  encore plus grand : La convection est de plus en plus forte...

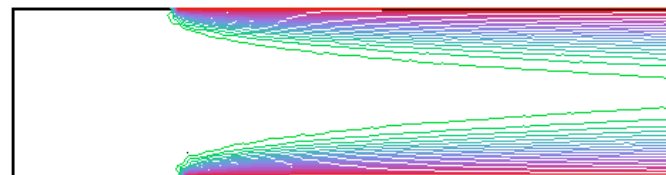


FIGURE 6 – • Si Eckert est petit et  $Pe$  de plus en plus grand : Deux belles couches limites se dégagent... L'effet de la condition de sortie n'est pas visible, mais on se doute que cette condition  $\partial T/\partial x = 0$  n'est pas la bonne puisque les deux couches limites ne se sont pas encore réunies...

### 3.2.4. Conclusion de ces observations

Nous venons d'observer que l'augmentation du nombre de Péclet  $Pe$  finit par provoquer des couches limites d'épaisseur  $\delta_{th} \ll L$ . Cette épaisseur est une nouvelle longueur qui dépend des nombres sans dimension caractérisant l'écoulement. Il s'agit de régions de fort gradient près des parois. Retenons dès à présent qu'il existe au moins trois jauges de température :

- soit  $(T_w - T_0)$
- soit  $(q_w)\delta_{th}/k$
- soit  $\frac{\nu U_0}{cL}$ .

Examinons de manière plus complète le problème d'entrée dans un tuyau (problème de convection forcée interne), puis nous examinerons le cas de la plaque plane (problème de convection forcée externe).

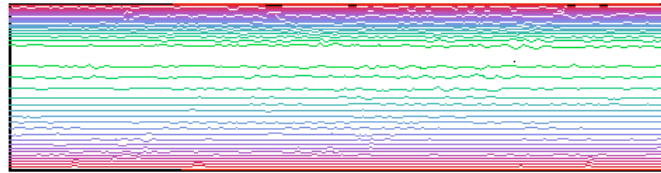


FIGURE 7 – • si  $Pe$  trop grand : ça ne marche plus ! Les couches limites sont noyées dans l'épaisseur de maille... Le résultat, même s'il est "calculé", n'a pas de sens...

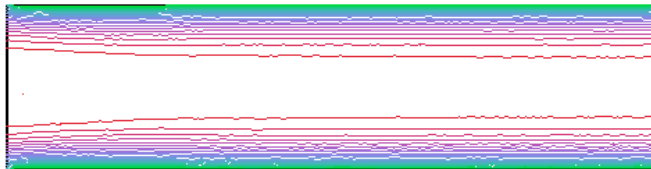


FIGURE 8 – • Si Eckert est important et si  $Pe$  est  $0(1)$ . L'élévation de température est due au terme de dissipation visqueuse, si cette dissipation est très importante, le saut de température de paroi est noyé... (on distingue un léger décalage vers les parois du bas et du haut des isos en  $x < 0$ )

### 3.2.4 Le problème asymptotique d'entrée dans les tubes, problème de Graetz (à nombre d'Eckert nul).

Dans un tube, loin de l'entrée le régime est établi suivant le profil de Poiseuille (*c.f.* PCn° 2), la température est uniforme et vaut  $T_0$  (on a  $E = 0$ ). On pose :

$$u = U_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right), \quad T = T_0 + (T_p - T_0)\bar{T}.$$

L'ordre de grandeur des distances est  $R$  le rayon du tuyau, en prenant ces échelles on a :

$$x = R\bar{x}, \quad r = R\bar{r}, \quad u = U_0\bar{u}.$$

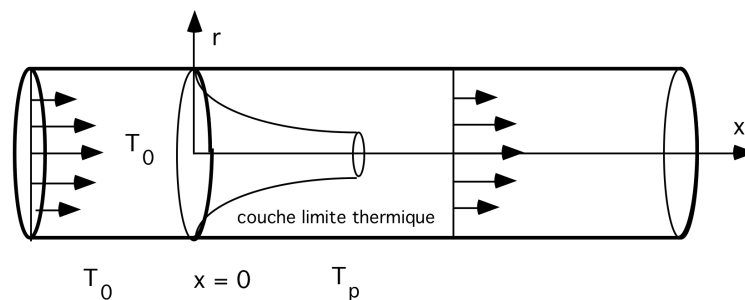


FIGURE 9 – Le tuyau

- Le problème sans dimension à résoudre dans la conduite annulaire est :

$$(1 - \bar{r}^2) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \right).$$

$\bar{T}(\bar{x} < 0, \bar{r} = 1) = 0$ ,  $\bar{T}(\bar{x} > 0, \bar{r} = 1) = 1$ , on a besoin d'imposer la symétrie au centre  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} = 0$   
 Bien entendu

$$Pe \gg 1.$$

• Pour passer la discontinuité longitudinale en  $\bar{x} = 0, \bar{r} = 1$ ; on va focaliser sur ce point en prenant (c'est ce qu'il y a de plus naturel une échelle identique longitudinalement et transversalement) :  $\bar{x} = \varepsilon \tilde{\xi}$  et  $\bar{r} = 1 - \varepsilon \tilde{\zeta}$  au voisinage du point de changement de température, et on pose  $T = T_0 + (T_p - T_0)\tilde{\theta}$ . Pour  $\varepsilon = Pe^{-1/2}$ , on garde des termes de dérivées seconde :

$$\tilde{\zeta} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{\zeta}} = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{\xi}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{\zeta}^2},$$

$$\tilde{\theta}(\tilde{\xi} < 0, 0) = 0, \tilde{\theta}(\tilde{\xi} > 0, 0) = 1, \tilde{\theta}(\tilde{\xi}, \infty) \rightarrow 0.$$

La résolution numérique nous montre des lignes iso température ayant la forme suivante :

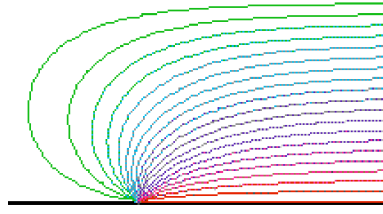


FIGURE 10 – au voisinage de  $x = 0$ , à l'échelle de la longueur visqueuse.

On observe donc bien la remontée de l'information en avant de la discontinuité. Pour mémoire, sachons que l'on peut résoudre ce problème par transformation de Fourier ( $e^{ik\tilde{\xi}}$ ). La solution (après beaucoup de calculs) se développe, pour  $\tilde{\xi} \rightarrow 0$  (i.e.  $k$  grand) en :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{\xi}, 0)}{\partial \tilde{\xi}} \sim 3^{1/3} \Gamma(2/3) / \Gamma(1/3)^{3/4} (\pi \tilde{\xi})^{-1/2},$$

et pour  $\tilde{\xi} \rightarrow \infty$  (i.e.  $k$  petit) en :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{\xi}, 0)}{\partial \tilde{\xi}} \sim (3^{5/6}) \Gamma(2/3) (2\pi \tilde{\xi})^{-1/3}.$$

On retrouve la solution de Lévêque loin de la discontinuité de température que nous développons au point suivant et que nous avons déjà vue en PC!

• Dans le problème sans dimension à résoudre :

$$(1 - \bar{r}^2) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right).$$

si  $Pe$  tend vers l'infini, il ne reste que :

$$(1 - \bar{r}^2) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = 0.$$

La température reste constante le long d'une ligne de courant : elle reste nulle. Il faut donc introduire une couche limite. Posons  $\tilde{r} = (1 - \bar{r})/\varepsilon$ . Après choix de  $\varepsilon = (2Pe)^{-1/3}$  par moindre dégénérescence et réduction on a :

$$\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{r}^2} \right).$$

avec  $\tilde{T}(\tilde{x} > 0, 0) = 1$ ,  $\tilde{T}(\tilde{x} < 0, \tilde{r}) = 0$ ,  $\tilde{T}(\tilde{x} > 0, \infty) = 0$ . C'est une équation de type parabolique, la solution a été vue en PC :

$$\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3}, \frac{\tilde{r}^3}{9\tilde{x}})}{\Gamma(\frac{1}{3})}$$

Ce problème est le problème de Lévêque (1921).

• Observons maintenant ce qui se passe en aval lorsque la couche limite envahit toute la conduite, si on est loin en aval, soit  $X$  la nouvelle variable longitudinale de travail,  $X = \epsilon\tilde{x}$  est d'ordre un car  $\tilde{x}$  est grand. On pose classiquement  $T = T_p + (T_0 - T_p)\theta$ , (ce choix est plus judicieux que  $T = T_0 + (T_p - T_0)\theta$  car il permet d'avoir des conditions nulles sur la paroi ce qui simplifie la résolution en variables séparées) d'où, si  $\epsilon = 1/Pe$  :

$$(1 - \bar{r}^2) \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \bar{r} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}}.$$

avec les conditions aux limites :

$$\theta(X > 0, \bar{r} = 1) = 0, \theta(X = 0, \bar{r}) = 1 \text{ et } \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}}(X, 0) = 0.$$

Il s'agit du problème de Graetz (1883) dont la résolution (par W. Nuβelt) est un morceau de bravoure de la "Thermique". Le calcul est développé en annexe. L'idée simplement à retenir est qu'il faut passer par une somme de solutions en variables séparées :

$$\theta = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \theta_n(\bar{r}) \Phi_n(X).$$

La méthode est exactement la même que pour l'équation de la chaleur dans un solide, mais le terme de dérivée temporelle  $\partial_t$  est transformé en un terme de dérivée spatiale  $(1 - \bar{r}^2)\partial_X$ . Par séparation des variables  $\Phi_n$  est une exponentielle en  $X$  de la forme  $\Phi_n = \exp(-\lambda_n^2 X)$ , tandis que  $\theta_n$  vérifie une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \theta_n}{\partial \bar{r}} \right) + \lambda_n^2 (1 - \bar{r}^2) \theta_n = 0, \quad \theta_n(\bar{r} = 1) = 0$$

qui pour une fois ne permet pas de retomber sur des cosinus ou des Bessels mais sur des fonctions spéciales (mettant en jeu des polynômes de Laguerre)...

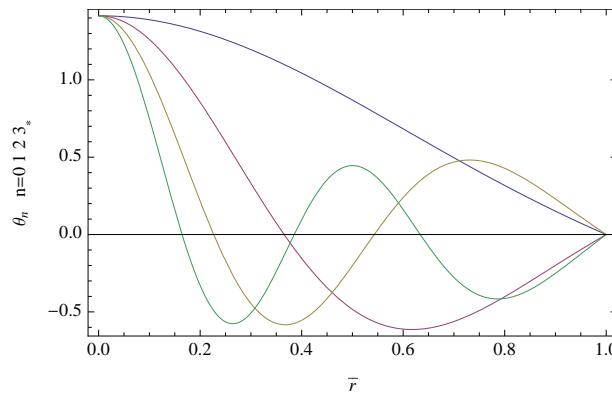


FIGURE 11 – Les quatre premiers modes de la série de fonctions de Graetz

Tous calculs faits on peut montrer que la température moyenne sur la section en fonction de  $X$  est :

$$\theta_m = -4 \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n T_n' \lambda_n^{-2} \exp(-\lambda_n^2 X/2).$$

Dans cet exemple on définit classiquement le nombre de Nusselt avec la température moyenne dans le tuyau, par cette définition de la relation liant le flux à la paroi, et le nombre de Nusselt :

$$\phi = Nu_x \frac{k}{2R} (T_0 - T_p) \theta_m,$$

le Nusselt local est donc de la forme :

$$Nu_X = -2 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n T'_n \exp(-\lambda_n^2 X/2)}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n T'_n \lambda_n^{-2} \exp(-\lambda_n^2 X/2)}$$

avec les valeurs suivantes issues de la résolution numérique de la série d'équations différentielles :

$n$	$\lambda_n$	$c_n$	$T'_n$
0	2.704	0.75	-1.01
1	6.6779	-0.81	1.35
2	10.67	0.59	-1.57
3	14.67	-0.48	1.74
4	18.67	0.41	-1.90
...	...	...	...

de manière approchée pour  $n$  assez grand on a environ

$$\lambda_n \sim 4n + 8/3, \quad c_n \sim (-1)^n 2.85 \lambda_n^{-2/3}, \quad T'_n \sim (-1)^{n+1} 0.711 \lambda_n^{1/3}$$

Pour  $X \rightarrow \infty$ , on voit que seul le rang  $n = 0$  est dominant, donc  $Nu_X \rightarrow (1/2)\lambda_1^2 \sim 3.66$ , on peut considérer que le régime est établi ( $Nu_X$  est à 1% de la valeur finale) pour une longueur :

$$L = 0.11 RPe \quad (i.e. X = .11).$$

Pour  $X \rightarrow 0$ , on devrait retrouver la solution de Lévêque (cf PC), c'est effectivement ce que l'on observe lorsque l'on fait tendre  $X$  vers 0, on compare favorablement à :

$$Nu_x = 1.71 \frac{1}{(2xPe_D)^{1/3}}.$$

Ces deux comportements s'observent bien sur la figure suivante où sont tracés (la variable en abscisse est logarithmique) la solution de Graetz, la solution de Lévêque et la valeur ultime de  $Nu = 3.66$ .

Une bonne formule approchée est (à 4% près pour  $L/(Pe_D R) > 500$ ), en remettant les dimensions ( $L$  longueur à laquelle on se place et  $R$  rayon du tube) :

$$Nu_{approx} = 3.66 + \frac{0.127}{2L/(Pe_D D) + 0.0635(2L/(Pe_D D))^{1/3}}$$

• Finalement il reste aussi à étudier le cas trivial  $\epsilon \ll 1/Pe$ , on est loin en aval,  $\partial_r^2 \theta = 0$  et  $\theta$  est trivialement constante car l'écoulement a oublié l'accident. Le fluide est à la température de la paroi.

**En résumé :**

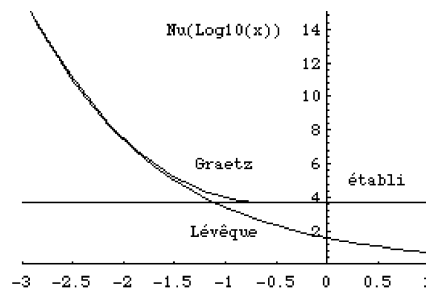


FIGURE 12 – Le nombre de Nusselt fonction de  $Log_{10}(x)$ , les trois régimes.

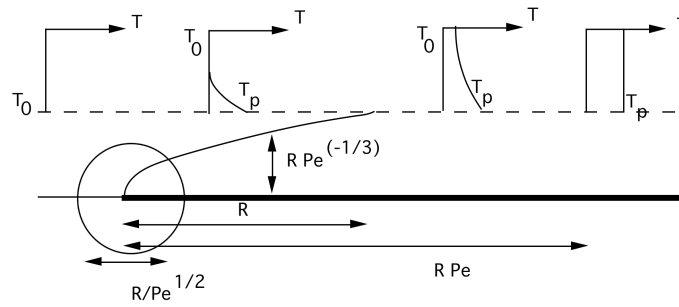


FIGURE 13 – les différentes échelles en jeux.

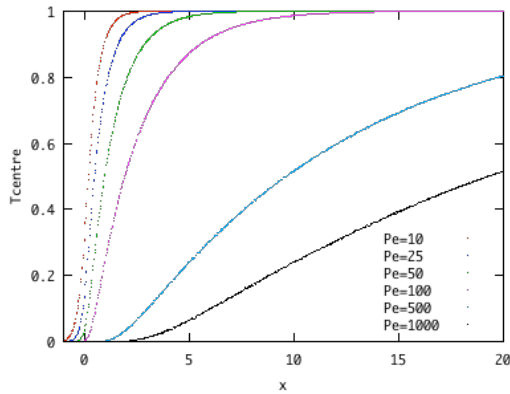


FIGURE 14 – température au centre pour différents Péclets fonction de  $x$ .

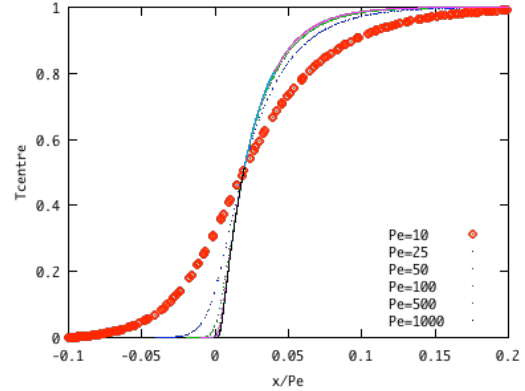


FIGURE 15 – la température au centre pour différents Péclets en fonction de  $x/Pe$ .

On voit bien que pour  $x < 10^{-2}$ , la solution complète (du problème de Graetz) et la solution asymptotique (du problème de Lévêque) sont confondues. On voit aussi que pour  $x$  peu supérieur à  $10^{-1}$  on est presque arrivé au régime établi (Nusselt constant).

De manière schématique, les différentes régions sont :

On retiendra que pour un tube, assez loin de l'entrée le Nusselt est de 3,66 si la température est imposée.

#### Retour sur le calcul numérique.

Traçons la température au centre du tuyau pour  $Pe = 10, 25, 50, 100, 500$  et  $1000$  (à gauche).

Sur la figure précédente (à droite), on a tracé la température au centre du tuyau pour différents nombre  $Pe$  mais on a changé l'échelle en  $x$  (en la divisant par  $Pe$ ). On retrouve bien que les courbes "collapsent" en une courbe unique pour  $Pe$  assez grand (environ  $Pe = 75$ ).

#### Pour aller plus loin :

- Dans le cas du flux imposé, on peut montrer facilement que la température finit par être linéaire... et on aura assez loin (*i.e.* après une distance d'environ  $PeR$ )  $Nu = 4,36$ .

- On vient de chauffer le fluide, donc  $\rho$  et  $\mu$  vont varier et donc modifier le champ des vitesses! c'est la rétroaction de la température sur le fluide  $\mu(T)$ . On peut facilement voir que si on suppose que l'élévation de température est faible ( $O(\epsilon)$ ), et que si on pose un développement de la forme :

$$\mu = \mu_0 + \epsilon\mu_1 + \dots$$

que l'on substitue dans les équations, puis on développe en puissances de  $\epsilon$ ... On obtient à l'ordre  $\epsilon^0$  le problème de Poiseuille précédent.

On en déduit que la perturbation introduite par le chauffage est une perturbation régulière...

- On note la liaison avec la PC 1, et la PC 2 : dans la PC 1, on étudie la solution générale de l'équation de la chaleur (ici la solution de Graetz), on observe la "couche limite temporelle" pour les temps courts (ici la solution de Lévêque, vue en PC 2 dans le cas plan).

### 3.4. Convection forcée externe

Nous venons de voir la convection forcée dans des tubes ou entre des plans, comme l'écoulement est confiné, cette convection forcée est qualifiée de "convection forcée interne". De même, s'il y a juste un obstacle autour duquel le fluide s'écoule, en étant libre de le contourner sans confinement, cette convection forcée est qualifiée de "convection forcée externe". Nous allons donc examiner l'écoulement le plus simple correspondant à cela, il s'agit de l'écoulement sur une plaque plane.

#### 3.4.1 Couche limite thermique incompressible sur une plaque plane à température imposée

##### 3.4.1.1. Equations

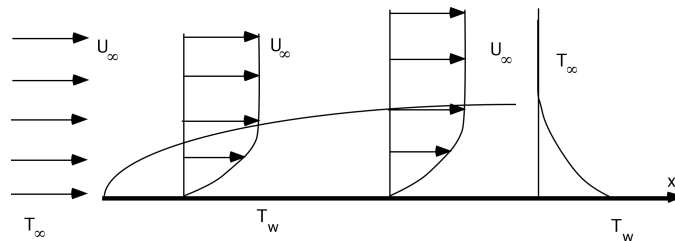


FIGURE 16 – La plaque

Un cas "simple" est celui de la plaque plane maintenue à la température uniforme  $T_w$  plongée dans un écoulement uniforme de vitesse  $U_\infty$  et de température  $T_\infty$  au loin, on suppose que le régime stationnaire est obtenu. On définit le nombre de Reynolds par  $Re = U_\infty L / \nu$ . Il est grand.

On se place à la distance  $L$  du bord d'attaque. Le problème thermique est alors :

$$(\bar{\underline{u}} \cdot \bar{\underline{\nabla}}) \bar{T} = \frac{1}{Pe} \bar{\underline{\nabla}}^2 \bar{T} + 2 \frac{E}{Re} \bar{\underline{D}} : \bar{\underline{D}},$$

et  $T$  connue sur la paroi ( $T_w$ ) et au loin en amont et au loin tout en haut ( $T_\infty$ ). Si  $Pe \rightarrow \infty$ , à  $Pr$  fixé, il ne reste que :

$$(\bar{\underline{u}} \cdot \bar{\underline{\nabla}}) \bar{T} = 0$$

La température de la paroi n'échauffe pas le fluide. On avait le même problème avec l'équation de la dynamique, pour lever ce paradoxe, on avait introduit une couche limite  $\delta = L / \sqrt{Re}$ . On garde toujours la même échelle en  $x$ , mais on agrandit l'échelle transverse en  $y$ .

#### équations dynamiques

Les équations de la dynamique devenaient :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0,$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$$



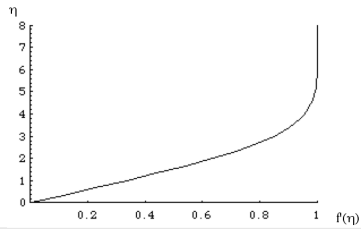


FIGURE 17 –  $f'(\eta)$  profil de vitesse :  $f'$  en abscisse,  $\eta$  en ordonnée.

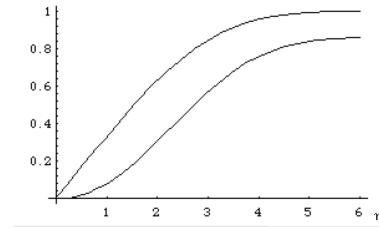


FIGURE 18 – vitesse longitudinale et transversale.

Avec pour conditions aux limites  $\tilde{u}(\bar{x}, 0) = 0$ ,  $\tilde{u}(\bar{x}, \infty) = 1$ . On en trouvait une solution semblable pour la fonction de courant  $\psi$  :

$$\psi = \bar{x}^{1/2} f(\eta), \quad \xi = \bar{x}, \quad \eta = \tilde{y}/\sqrt{\bar{x}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\tilde{u} = f'(\eta), \quad \tilde{v} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}(\eta f' - f)$$

La partie dynamique admet donc la solution de Blasius bien connue :  $\tilde{u} = f'(\eta)$ , avec  $\eta = \tilde{y}/\sqrt{\bar{x}}$  et telle que :

$$2f''' + f f'' = 0 \quad \text{avec} \quad f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(\infty) = 1.$$

La résolution numérique par une méthode *ad hoc* de cette équation donne  $f''(0) = 0.332$ , et le profil de vitesse a l'allure suivante figure 17. On trace sur la figure 18 les vitesses  $u(\eta) = f'(\eta)$  et  $(\eta f' - f)$ . On constate que la vitesse transverse à l'infini n'est pas nulle, il y a soufflage... la plaque perturbe le fluide parfait :  $v \rightarrow 0.8604U \frac{1}{\sqrt{Re}} \bar{x}^{-1/2}$ .

On en déduit l'épaisseur de déplacement  $\delta_1$  et le frottement à la paroi :

$$\delta_1 = 1.7208 \frac{L}{\sqrt{Re}} \bar{x}^{1/2}, \quad \text{et} \quad \tau = 0.332 \rho U^2 \frac{1}{\sqrt{Re}} \bar{x}^{-1/2},$$

Ce sont en fait les ordres de grandeur fondamentaux à retenir.

### équation de la chaleur

Pour ce qui est de l'équation de la chaleur, il faut calculer  $\underline{\underline{D}}$ . Il n'y reste que les termes dominants en  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}$ , puis après contraction :

$$\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} = \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2.$$

Comme on a posé  $T = T_\infty + (\Delta T)\tilde{T}$ , et  $(\Delta T) = T_w - T_\infty$ , l'équation de l'énergie s'écrit avec les variables de couche limite dynamique :

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + E \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2.$$

$$\tilde{T}(\bar{x}, 0) = 1, \quad \tilde{T}(\bar{x}, \infty) = 0.$$

Cette équation est en fait plus générale qu'il n'y paraît. Elle peut être appliquée pour un corps quelconque dès lors que la courbure de la paroi n'est pas trop forte. La coordonnée longitudinale  $x$  est alors l'abscisse curviligne  $s$ , la coordonnée  $y$  est prise le long de la normale locale (l'équation

dynamique est en revanche différente, car il faut ajouter le terme de gradient de pression lié à la forme du profil).

3.4.1.2. résolution cas  $E=0$  Les vitesses s'exprimant avec  $\eta$ , il est raisonnable de penser que s'exprime en fonction de  $\eta$ , posons  $\tilde{T} = g(\eta)$ . On a alors :

$$2g'' + Prfg' + 2EPrf'^2 = 0.$$

Une solution évidente de cette équation est obtenue pour le jeux de paramètres suivants :  $Pr=1$  et  $E = 0$  ! Elle devient  $2g'' + fg' = 0$ , qui est l'équation de Blasius si  $g' = Kf''$ , la solution est évidente :

$$g = 1 - f'.$$

Si on garde encore  $E = 0$ , mais  $Pr$  quelconque,  $2g'' + Prfg' = 0$ , on intègre, après avoir remarqué que  $2f'''/f' = -f$  :

$$g''/g' = Prf'''/f' \text{ donc } g' = K(f'')^{Pr}.$$

une seconde intégration, en tenant compte de la condition en 0 :

$$g(\eta) = \frac{\int_{\eta}^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} d\zeta}{\int_0^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} d\zeta}$$

Ce qui permet de tracer  $g$  pour différents Prandtl  $Pr$  à  $E = 0$  (en fait il est plus simple de résoudre directement que de faire ce calcul d'intégrale!).

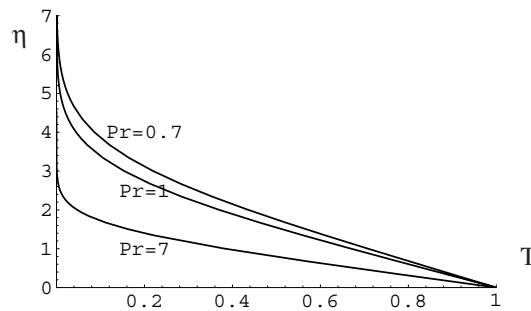


FIGURE 19 – Profils  $g(\eta)$  à différents nombres de Prandtl.

à  $Pr=0.7$   $g'(0)=-0.293$

à  $Pr=1$   $g'(0)=-0.332$

à  $Pr=7$   $g'(0)=-0.646$

3.4.1.3.  $Pr$  petit

Si le nombre de Prandtl est petit, l'épaisseur thermique est plus grande que l'épaisseur dynamique : le fluide est bon conducteur de la chaleur. Changeons l'échelle de  $\eta$  en  $\eta=Y\zeta$ ,  $Y \gg 1$ , comme l'équation est linéaire  $G(Y) = g(\eta)$ .

$$2g'' + Prfg' = 0 \text{ devient } 2Y^{-2}G'' + Y^{-1}PrfG' = 0$$

mais attention loin de la paroi  $f \sim \eta$  ( $\eta$  est grand) donc  $f \sim Y\zeta$  ( $\zeta$  est d'ordre un). Par moindre dégénérescence  $Y = Pr^{-1/2}$ . On peut ensuite montrer, après résolution, que :  $g'(0) \sim 0.564Pr^{1/2}$ .

3.4.1.4.  $Pr$  grand

Si le nombre de Prandtl est très grand, l'épaisseur thermique est plus petite que l'épaisseur dynamique : le fluide est mauvais conducteur de la chaleur. Changeons l'échelle de  $\eta$  en  $\eta=Y\zeta$ ,  $Y \ll 1$ , comme l'équation est linéaire  $G(Y) = g(\eta)$ .

$$2g'' + Prfg' = 0 \text{ devient } 2Y^{-2}G'' + Y^{-1}PrfG' = 0$$

mais attention près de la paroi  $f \sim$  donc  $f \sim (0.33/2)(\zeta^2)Y^2$ . Par moindre dégénérescence  $Y = Pr^{-1/3}$ . On peut alors montrer, après résolution, que  $g'(0) = -0.332Pr^{-1/3}$

### 3.4.1.5. Nusselt

Un grand miracle fait que cette expression (qui est normalement uniquement valide pour  $Pr$  grand) est valide dans la plage "utile" (eau - air).

Le flux à la paroi est (compte tenu de l'approximation précédente).

$$\phi = 0.332Pr^{1/3}kL^{-1}R_\infty^{1/2}\frac{T_w - T_\infty}{\bar{x}^{1/2}}$$

Le nombre de Nusselt est :

$$Nu = \frac{\phi L}{k(T_w - T_\infty)}$$

Pour les nombre de  $Pr$  supérieurs à environ 0.5, on a donc, pour le nombre de Nusselt à la position  $x$  (la dépendance est plutôt en  $Pr^{-1/2}$  pour les petits Prandtl) et avec  $R_x = U_\infty x/\nu$ , on retiendra donc que :

$$Nu_x = 0.332Pr^{1/3}R_x^{1/2}.$$

Le nombre de Nusselt moyen pour une plaque de longueur  $L$  ( $Re$  et  $R_L$  sont identiques), est alors :

$$Nu = 0.664Pr^{1/3}R_L^{1/2}.$$

### 3.4.2. Flux imposé, $E=0$

Une variante de ce problème est cette fois d'imposer le flux à la paroi. Il est clair que si le flux est constant, on impose :  $\phi = -k\frac{\partial T}{\partial y}$ , donc  $-k(\Delta T)L^{-1}Re^{1/2}[\bar{x}^{-1/2}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta}]$  doit être constant à la paroi, donc varie comme la racine de  $\bar{x}$ . La jauge de température est liée à  $\phi$  par  $\Delta T = \frac{\phi L}{kRe^{1/2}}$  et la température est de la forme

$$T = T_\infty + \Delta T \bar{x}^{1/2}g(\eta),$$

donc  $\phi = -g'(0)k(\Delta T)L^{-1}Re^{1/2}$ , il y a une constante de trop, on peut choisir  $g'(0) = -1$ . L'équation de l'énergie s'écrit

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{y}^2}$$

d'où :

$$2g'' + Pr(fg' - f'g) = 0.$$

avec  $g'(0) = -1$ .

(exercice : on peut définir une variante, toute distribution de la forme

$$T = T_\infty + \Delta T \bar{x}^n g(\eta),$$

conduit à une équation du type  $2g'' + Pr(fg' - 2nf'g) = 0$ ... le cas 1/2 est celui de la paroi à flux imposé)

Après résolution de

$$2g'' + Pr(fg' - f'g) = 0, \quad g'(0) = -1, g(\infty) = 0.$$

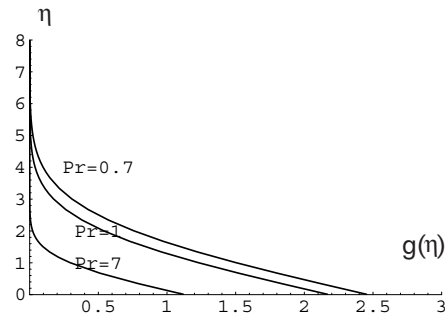
Ce qui permet de tracer  $g$  pour différents  $Pr$  à  $E = 0$ .

à  $Pr=0.7$   $g(0)=2.464$

à  $Pr=1.0$   $g(0)=2.1789$

à  $Pr=7$   $g(0)=1.13$

*grosso modo*  $g(0) \sim 2.18 Pr^{-1/3}$  (formule obtenue par interpolation)


 FIGURE 20 – Profil réduit de température  $g(\eta)$  à différents  $Pr$ .

On en déduit la distribution (ici approximative) de température le long de la paroi soumise à un flux constant  $\phi$  :

$$T = T_{\infty} + \frac{\phi}{k} 2.18 Pr^{-1/3} \bar{x}^{1/2}.$$

et le Nusselt :

$$Nu = Re^{1/2} (0.46 Pr^{1/3}) \bar{x}^{1/2}.$$

### 3.4.3. Cas $E \neq 0$

Le cas de la paroi athermane est un peu plus délicat. Il peut être résolu par une formulation englobant le cas de la paroi de température constante. Il nous faut résoudre :

$$g'' + \frac{Pr}{2} f g' + E Pr f'^2 = 0.$$

La solution générale est de la forme : solution particulière  $g_2$  de l'EASM + solution générale  $g_1$  de l'ESSM.

$$g = g_1 + E g_2$$

par variation de la constante, on obtient  $g_2 = Pr \int_{\eta}^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} ( \int_0^{\zeta} [f''(\xi)]^{Pr} d\xi ) d\zeta$ , on constate que  $g_2'(0) = 0$  et on a au final :

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} = (1 - E g_2(0)) + \frac{\int_{\eta}^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} d\zeta}{\int_0^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} d\zeta} + E Pr \int_{\eta}^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} ( \int_0^{\zeta} [f''(\xi)]^{Pr} d\xi ) d\zeta$$

$$g_2(0, Pr=0.7) = 0.42$$

$$g_2(0, Pr=1.0) = 0.50$$

$$g_2(0, Pr=7.0) = 1.25$$

Pour  $(1 - E g_2(0)) = 0$ , on a la température de paroi adiabatique :

$$T_w = T_{aw} = T_{\infty} + \frac{U_{\infty}^2}{c_p} g_2(0).$$

Ce qui permet de tracer  $g$  à  $Pr = 1$  (pour fixer les idées) et à  $E$  non nul.

Sur la figure ci dessus, on trace plusieurs profils de température correspondant à différentes températures de paroi. En "points", le cas  $T = T_{aw}$ . On voit que si  $T < T_{aw}$  le fluide fournit un flux à la paroi de par l'élévation de température causée par la dissipation volumique. Donc même si le fluide est plus froid que la paroi, la paroi est "réchauffée". Souvenons nous que cet effet est très faible (il intervient de manière non négligeable dans le cas compressible où les équations sont plus compliquées).

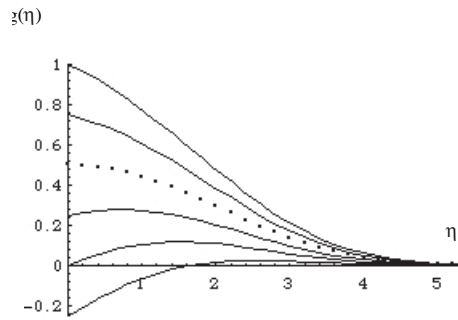


FIGURE 21 – la température fonction de la variable de similitude (le cas en pointillé est le cas adiabatique, ici comme  $Pr=1, T_{aw}=0.5$ ).

### 3.5. Coefficient d'échange

#### 3.5.1 Définition

Dans les paragraphes précédents, on a calculé pour des cas simples l'écoulement et la température autour d'un solide (convection forcée externe) ou entre deux solides (convection forcée interne). A température fixée on a trouvé la valeur du flux à la paroi du solide, et à flux fixé, on a trouvé la distribution de température sur la paroi du solide. On a introduit le nombre de Nusselt (flux sans dimension). On rappelle que le but du jeu était de trouver la valeur du coefficient d'échange  $h$ , qui rappelle constitue, une simplification de l'extérieur (donc le fluide) pour le solide. Par définition, on avait posé que le coefficient d'échange est tel que

par définition de  $h$  on a

$$\underline{q}_w = h(T_w - T_f)\underline{n}.$$

or par définition du flux à la paroi (dans le fluide)

$$\underline{q}_w = -k\left[\frac{\partial T}{\partial n}\right]_w \underline{n},$$

et par définition du Nusselt

$$Nu = \frac{-Lk\partial T/\partial n}{k(T_w - T_f)}$$

$h$  peut être local ( $h(x)$ ) ou global (sur toute la longueur  $L$ ). On peut donc relier  $Nu_x$  et  $h(x)$  :

$$\text{par définition } h(x) = \frac{kNu_x}{L}.$$

Pour la plaque plane, par exemple, on a vu que le Nusselt moyen  $\int_0^L Nu_x dx/L$  est  $0.664Pr^{1/3}R_L^{1/2}$ . il n'est pas toujours possible de calculer  $Nu$ . Expérimentalement on cherche à tracer  $Nu$  sous la forme  $Nu = CRe^m Pr^n$ . On définit ainsi parfois le nombre de Stanton :

$$St_x = Nu_x/(Re_x Pr),$$

on remarque que pour  $Pr$  assez grand on a approximativement  $St_x Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$ . C'est ce que l'on appelle l'analogie de Reynolds : on peut faire un calcul dynamique, puis ayant le frottement à la paroi on en déduit tout de suite le Nusselt.

### 3.5.2 Exemples de valeurs

Le coefficient d'échange moyen pour une plaque de longueur  $L$  sera donc (en laminaire  $R_L < 10^5$ ) :

$$h = \frac{k}{L} 0.664 Pr^{1/3} R_L^{1/2}.$$

Dans le tuyau on a pour le coefficient d'échange (approché  $L/(RPe) > 1/500$ ) :

$$h_{moyen} = Nu_{moyen} \frac{k}{2R} \sim \frac{k}{2R} \left( 3.666 + \frac{0.127(PrR/L)}{1 + 0.0635(PrR/L)^{1/3}} \right).$$

etc.

### 3.5.3. première entorse et problème "final" :

Nous venons de voir la forme des transferts de chaleur dans le problème assez simple du tuyau et de la plaque plane. Le flux calculé va en fait échauffer (ou refroidir) les parois dont la température va graduellement changer. Nous entrevoyons la difficulté du couplage thermique fluide/solide et ce pour un quelconque problème de plomberie : tout écoulement est contenu dans une conduite, cette conduite est elle même dans l'usine, qui est elle même dans l'atmosphère...

Il faut donc connaître la température au centre du soleil pour obtenir la température de l'écoulement du sang dans le petit orteil d'un esquimau dans son igloo. En fait on peut (et on doit) simplifier et considérer les échanges avec l'extérieur (assez) lointain grâce aux coefficients d'échange. La description de l'écoulement interne sera laissée la plus complexe possible, mais l'extérieur sera modélisé par les coefficients d'échange.

Au travers de la paroi, le flux est conservé, or le flux extérieur est modélisé par un coefficient d'échange, si de plus la paroi est de faible résistance thermique, son écart de température est faible, le flux à imposer est donc tel que :

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h_e (T - T_e).$$

Cette relation a le bon goût si  $T_e \gg T$  de dégénérer en  $-k \frac{\partial T}{\partial y}$  imposé, ou si  $h_e$  est grand ( $Bi \gg 1$ ) de dégénérer en  $T$  imposée, ou si  $h_e$  petit ( $Bi \ll 1$ ) en une paroi athermane...

**Au final**, on peut résoudre (bonne approximation si on ne chauffe pas trop) les équations de Navier Stokes incompressibles pour un fluide newtonien :

#### Convection Forcée

- équations dynamiques

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0.$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -\nabla p + \underline{f} + \mu \nabla^2 \underline{u}.$$

- équation de la chaleur en incompressible

$$\rho c_p \left( \frac{\partial}{\partial t} T + \underline{u} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + 2(\underline{\mu} \underline{D} : \underline{D}) + r.$$

- conditions aux limites

adhérence à la paroi,  
condition mixte du type :

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h_e (T - T_e).$$

qui peut dégénérer en  $T$  imposée ou  $-k\frac{\partial T}{\partial y}$  imposé suivant les valeurs de  $h_e$  et  $T_e$ .

La complication suivante est de prendre en compte la conduction dans la paroi et de modéliser l'extérieur par un coefficient d'échange *etc*

### 3.6. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre la forme des transferts de chaleur dans le problème assez simple du tuyau et de la plaque plane. Ces deux problèmes sont fondamentaux car ils sont les archétypes de tous les problèmes possibles de transfert thermique : le problème de la convection forcée interne et celui de la convection forcée externe. Si on se donnait une température à la paroi, on en déduisait le flux, quand on s'est donné un flux, on a trouvé l'élévation de température. Cela donne le nombre de Nusselt comme résultat de l'analyse. Puis les coefficients d'échanges moyens ont été calculés.

Il faut bien distinguer les différents niveaux d'approximation de l'équation de la chaleur, par ordre de simplification croissante :

- Navier Stokes complet compressible
- Navier Stokes incompressible
- l'Analyse Phénoménologique épaulée par les Développements Asymptotiques Raccordés (Apédar) qui mène à des problèmes simplifiés mais cohérents
- l'utilisation des coefficients d'échanges qui simplifie trop mais permet de dimensionner rapidement un dispositif.

Il faut ensuite jongler avec les différents niveaux compte tenu de la puissance de calcul disponible.

On retiendra qu'il est impossible de résoudre "tout", on simplifiera l'influence de l'"extérieur" en utilisant les coefficients d'échange, et on essaiera de résoudre le mieux possible l'"intérieur".

Il faut toujours contrôler son degré d'approximation des mécanismes, en se servant de l'Apédar pour faire l'aller et retour entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux. Autrement dit l'analyse phénoménologique des équations permet de vérifier si les ordres de grandeurs issus du calcul sont réalistes ou non, elle prédit l'existence des couches limites et donc les endroits où il faut raffiner le maillage.

### 3.7. Bibliographie<sup>1</sup>

- R.B. Bird, W.E. Stewart & E. N. Lightfoot (1960) "Transport phenomena", ed J. Wiley & sons.  
 H. Gersten & H. Herwig (1992) "Strömungsmechanik", Ed. Viewig.  
 W. M. Kays, M. E. Crawford Convective Heat and Mass Transfer Mc Graw Hill 1993.  
 A. Giovannini & B. Bédard (2012) "Transfert de Chaleur" Cépaduès Ed.  
 P.-Y. Lagrée, "Transferts Thermiques et Massiques dans les fluides", cours ENSTA, Convection Forcée.  
 A. Leontiev (1985) "Théorie des échanges de chaleur et de masse", ed. MIR.  
 J. Padet (1997) "Principes des transferts convectifs", Polytechnica.  
 L. Persen (1972) "Boundary layer theory", Tapir Verlag.  
 T.J. Pedley (1980) "The fluid mechanics of large blood vessels" (Annex : A hot-film in reversing flows) Cambridge Univ. Press.  
 J.F. Sacadura (2015) "Transferts thermiques – Initiation et approfondissement.", éditions Lavoisier.  
 H. Schlichting (1987) "Boundary layer theory", Mac Graw Hill.

---

1. fichier C3cvf.tex 25 octobre 2018

page blanche



## 4. "Convection Libre" ou "Convection Naturelle"

### Résumé

La "Convection Libre" (*Free Convection*), ou "Convection Naturelle" (*Natural Convection*; *freie oder natürliche Konvektion*; *convezione naturale*; *convecção natural*) est le régime d'écoulement obtenu lorsque l'on chauffe un fluide sans qu'il n'y ait d'écoulement "extérieur" imposé. Cet écoulement est inexplicable dans le cadre précédent car aucun mouvement ne serait possible de par le découplage entre les équations de la dynamique et de la thermique. Pour lever ce paradoxe, on tient compte d'un phénomène que l'on avait négligé : la légère dilatabilité du fluide. C'est donc la force d'Archimède provoquée par les variations de densité induites par le chauffage qui fait se déplacer le fluide. La "thermique" et la "dynamique" sont alors très fortement couplées.

Nous allons donc discuter cette approximation dite "de Boussinesq" (~1872) et établir les équations afférentes. Nous introduirons le nombre sans dimension de la convection naturelle, le Grashof. Nous examinerons le problème classique de l'écoulement le long d'une plaque plane créé par son chauffage. Puis nous dirons un mot sur le problème fondamental de Rayleigh Bénard : le passage d'un régime de conduction à un régime de convection lorsqu'un nombre sans dimension passe un certain seuil (il s'agit en fait d'une introduction à la stabilité hydrodynamique).

### 4.1. équations du problème.

#### 4.1.1. Variations de $\rho$

*A priori*  $\rho$  la densité est fonction de la température et de la pression par la loi d'état (pour un gaz mais aussi pour un liquide). Il est donc naturel de penser que si l'on chauffe une paroi, la température du fluide environnant augmente par diffusion. La stratification de pression s'en trouve changée, le gradient de pression crée le mouvement.

Dans le cours nous avons jusqu'à présent négligé toute variation de  $\rho$ . Cela permettait de découpler les équations : la "thermique" ne rétroagissait pas sur la "dynamique". Manifestement, le découplage n'est plus valable ici puisque c'est le chauffage qui provoque le mouvement. On va donc permettre une variation de la densité avec le chauffage en supposant cependant que cette perturbation est petite. Il faut donc ici réintroduire une variation de  $\rho$  autour d'une position d'équilibre : le repos. En revanche la viscosité reste toujours constante.

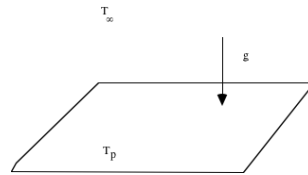


FIGURE 1 – plaque, dans un champ de pesanteur, soumise à une température différente de son environnement. Il n'y a pas d'écoulement imposé.

Soit donc un fluide au repos et à la température  $T_\infty$  au loin, il est en présence d'une paroi chauffée à la température  $T_p$ .

Pour obtenir la dépendance de  $\rho$ , rappelons les coefficients thermodynamiques classiques, respectivement le coefficient de dilatation à pression constante, le coefficient d'augmentation de pression à volume constant, le coefficient de compressibilité à température constante :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad \beta = \frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho, \quad \chi = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T.$$

Le développement de Taylor de la densité au voisinage de  $T = T_\infty$ , et  $p = P_\infty$  :

$$\rho = \rho_\infty (1 - \alpha(T - T_\infty) + \chi(p - P_\infty) + \dots)$$

Eau  $\alpha = 5.810^{-4} K^{-1}$ ,  $\chi = 5.25 \cdot 10^{-5} \text{Atm}^{-1}$ . Air  $\alpha = 3.310^{-4} K^{-1}$ ,  $\alpha = T^{-1}$  et  $\chi = p^{-1}$  (pour un gaz parfait). Anticipons le fait que les variations de pression sont négligeables et écrivons simplement que  $\rho$  ne dépend que de  $T$  (posons  $\epsilon = \alpha(T_p - T_\infty)$ ) :

$$\rho = \rho_\infty (1 - \epsilon \bar{T} + \dots)$$

Nous reviendrons plus loin sur le bien fondé de cette hypothèse.

#### 4.1.2. équation de continuité

L'équation de continuité  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0$ , devient donc :

$$-\rho_\infty \varepsilon \frac{dT}{dt} + \rho_\infty (1 - \varepsilon \bar{T}) \nabla \cdot \underline{u} = 0,$$

au premier ordre en  $\varepsilon$  (en première approximation), le fluide est incompressible :

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{u} = 0,}$$

Retenons qu'en première approximation le fluide est incompressible.

#### 4.1.3. équation de quantité de mouvement

Le tenseur des contraintes pour un fluide newtonien :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \lambda (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}} + 2 \mu \underline{\underline{D}}$$

Au vu du paragraphe précédent, et sachant que  $\lambda$  et  $\mu$  sont du même ordre de grandeur, on écrira en première approximation que le tenseur des contraintes n'est pas affecté par la compressibilité :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2 \mu \underline{\underline{D}}$$

Comme on étudie un écoulement en présence de gravité, il est judicieux de poser :

$$p = p_0 - \rho_\infty g z + (\delta p) \bar{p}$$

et donc de ne s'intéresser qu'aux variations autour de la position d'équilibre hydrostatique

Lorsqu'il n'y a pas de mouvement ( $\underline{u} = 0$ ), les équations de quantité de mouvement deviennent suivant la direction  $\underline{e}_z$  (celle de  $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ ) :

$$-\frac{\partial}{\partial z} p_{hyd} - \rho_\infty g = 0,$$

la pression est  $p_{hyd}$  telle que :  $p_{hyd} = p_0 - \rho_\infty g z$ . Lorsqu'il y a mouvement, la projection suivant  $z$  fait apparaître (entre autres termes) :

$$-\frac{\partial}{\partial z} p - \rho g \text{ que l'on réécrit } -(\delta p) \frac{\partial}{\partial z} \bar{p} - (\rho - \rho_\infty) g$$

puisque  $(\rho - \rho_\infty) = -\rho_\infty \varepsilon \bar{T}$ , il va rester une force de "flottabilité" (*buoyancy force*) dirigée vers le haut. La variation de la densité dans le produit  $\rho d\underline{u}/dt$  sera négligée ( $\rho d\underline{u}/dt \simeq \rho_\infty d\underline{u}/dt$ ) puisque la vitesse est petite et en supposant comme de coutume que  $\mu$  varie peu avec la température, l'équation dynamique s'écrit :

$$\rho_\infty \left( \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -(\delta p) \nabla \bar{p} + \rho_\infty g \varepsilon \bar{T} \underline{e}_z + \mu \nabla^2 \underline{u}.$$

L'écoulement est produit par la force d'Archimède ("*buoyancy force*").

#### 4.1.4. équation de l'énergie

Son établissement est un peu délicat, il passe par des transformations de la thermostatique et ces considérations subtiles de compressibilité. C'est pour cela que nous sommes passés rapidement au chapitre sur les "Généralités, équations de la thermomécanique des fluides"

On a par définition de la variation de l'énergie interne par les apports de chaleurs de dissipation visqueuse, de diffusion thermique et de travail mécanique :

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \nabla \cdot \underline{q} \text{ soit } \rho \frac{de}{dt} = k \nabla^2 T + \lambda (\nabla \cdot \underline{u})^2 - p \nabla \cdot \underline{u} + 2\mu (\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}).$$

Or on ne peut pas utiliser  $de = c_v dT$  car le volume change lorsque l'on chauffe (*cf* la remarque plus loin qui montre que l'on ne peut pas simplifier en posant  $p \nabla \cdot \underline{u} = 0$  car dans  $\rho \frac{de}{dt}$  il y a un terme justement du même ordre de grandeur). On va donc réécrire de manière différente cette équation, pour ce faire, rappelons

les relations de thermostatique bien connues (et valables en mécanique des fluides de par l'hypothèse de l'état local, en fait on va retrouver la relation de Meyer  $C_p - C_v = T(\frac{\partial P}{\partial T})_V(\frac{\partial V}{\partial T})_P$ ) :

Le premier principe : 
$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\sigma} : \underline{D} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$$

Le second principe : 
$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + p \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

d'où l'équation générale du transfert thermique (voir Landau & E. Lifshitz (1989)) :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = k \underline{\nabla}^2 T + \lambda \underline{\nabla} \cdot \underline{u}^2 + 2\mu(\underline{D} : \underline{D}),$$

sans dissipation, l'entropie est constante. Revenons à la thermostatique pour écrire  $s$  en fonction des variations de  $T$  et  $p$ , par définition de la fonction d'état  $s(p, T)$  : (variables naturelles  $s(e, 1/\rho)$ )

$$ds = (\frac{\partial s}{\partial p})_T dp + (\frac{\partial s}{\partial T})_p dT$$

on a besoin des dérivées partielles de  $s$  (ce sont les relations de Maxwell), or, sachant :

$$dh = de + d(p/\rho) = (Tds - pd(\rho^{-1}) + d(p/\rho)) = Tds + \rho^{-1}dp$$

on en déduit  $Tds = -\rho^{-1}dp + (dh/dT)dT$

$$T(\frac{\partial s}{\partial T})_p = (\frac{\partial h}{\partial T})_p = c_p \text{ et } dg = dh - d(Ts) = -sdT + \rho^{-1}dp$$

donc comme  $s$  est une différentielle totale exacte

$$-(\frac{\partial s}{\partial p})_T = (\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T})_p$$

d'où l'expression de la différentielle  $ds$  en fonction de  $dT$  et  $dp$

$$\rho T ds = \rho c_p dT + \frac{T}{\rho} (\frac{\partial \rho}{\partial T})_p dp.$$

Et finalement, on obtient l'équation que l'on va simplifier :

$$\rho c_p \frac{d}{dt} T + \frac{T}{\rho} (\frac{\partial \rho}{\partial T})_p \frac{d}{dt} p = k \underline{\nabla}^2 T + \lambda (\underline{\nabla} \cdot \underline{u})^2 + 2\mu(\underline{D} : \underline{D})$$

dans cette expression, où on a fait apparaître les termes faibles, on peut maintenant négliger  $\frac{T}{\rho} (\frac{\partial \rho}{\partial T})_p = -\alpha T$  ainsi que  $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}$  et obtenir l'équation finale utile :

$$\rho c_p \frac{d}{dt} T = k \underline{\nabla}^2 T + 2\mu(\underline{D} : \underline{D}).$$

L'équation de la chaleur s'écrit bien avec  $c_p$ .

#### 4.1.5. Remarques...

\* Reprenons l'expression complète :

$$\rho = \rho_\infty (1 - \varepsilon \bar{T} + \chi(\delta p)(\bar{p} + \dots))$$

vérifions que  $\chi(\delta p) = \chi(\rho L g \epsilon) \ll \epsilon$  car  $\chi \sim P_\infty^{-1}$  pour un gaz, dans le cas d'un liquide la compressibilité est effectivement très faible.

\* Si on dit :  $\rho c_v \frac{d}{dt} T = k \underline{\nabla}^2 T + 0 + 2\mu(\underline{D} : \underline{D})$ , on commet une erreur : en effet on a  $c_p - c_v = r$ . Le terme négligé  $-p \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$  est d'ordre de grandeur  $-p_\infty u_\infty \alpha (T_p - T_\infty)/L$ , mais  $\alpha \sim T_\infty^{-1}$  (car  $\partial \rho / \partial T = \rho/T$ ) donc :  $p_\infty u_\infty \alpha (T_p - T_\infty)/L = O(r \rho_\infty (u_\infty/L))$ . Or  $\rho c_v T$  est lui aussi d'ordre  $O(r \rho_\infty (u_\infty/L))$ . On a donc bien négligé

un terme du même ordre de grandeur que les autres.

\* dans l'équation de la chaleur :

$$\rho \frac{d}{dt} c_p T = k \nabla^2 T + 2\mu(\underline{D} : \underline{D})$$

le terme  $2\mu(\underline{D} : \underline{D})$  sera encore négligeable dans la plupart des cas.

\* attention rappelons que nous supposons que la dépendance des coefficients de transport est négligeable en température. S'il n'y a pas de gravité, on pourrait imaginer que le mouvement est créé par la variation de  $\mu$  avec la température, le résultat est très très petit. Si  $(\delta p) = O(\epsilon\mu)$ , alors  $u = 0((\delta p)^{1/2})$ , la vitesse est donc très faible si la viscosité est elle même faible.

\* on évitera de confondre  $\alpha$  avec  $a = k/(\rho c_p)$ , (et  $Pr = \nu/a$ ) qui est parfois noté  $\alpha$  dans la communauté thermicienne (d'ailleurs le  $\alpha$  coefficient thermodynamique est souvent noté  $\beta$ ,  $\alpha$  est la notation internationale.)

\* L'approximation date de 1901 est dans son livre "Théorie analytique de la Chaleur". La formule, qui n'est pas encore de "Boussinesq" est introduite par la phrase en page VII de l'avertissement : "il fallait encore observer que, dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à très peu près, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité  $g$ , tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci. Grâce aux simplifications alors obtenues, la question, encore très difficile et presque toujours rebelle à l'intégration n'est plus inabordable". Page 174/175, la formule est dite ainsi : "Et le poids  $\rho g$  de l'unité de volume (...) aura décri sensiblement de  $\rho g \alpha \theta$ , comme s'il était adjoint, au poids primitif ou normal de l'unité de volume, la petite force antagoniste, c'est à dire *ascensionnelle*,  $\rho g \alpha \theta$ ."

#### 4.1.6. Résumé : équations finales

Compte tenu de l'hypothèse de Boussinesq :  $\rho = \rho_\infty(1 - \alpha(T - T_\infty))$ ,  $\mu$  constant et de l'élimination de la pression hydrostatique, on obtient le système couplé suivant régissant les écoulements de convection libre laminaire :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{u} = 0 \\ \rho_\infty (\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) = -(\delta p) \nabla \bar{p} + \rho_\infty g \varepsilon \bar{T} \underline{e}_z + \mu \nabla^2 \underline{u}, \\ \rho_\infty c_p (\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla) T = k \nabla^2 T + 2\mu(\underline{D} : \underline{D}), \end{cases}$$

plus les conditions aux limites d'adhérence pour la vitesse, et de température :

$$\underline{u}|_w = 0, \text{ puis } (T|_w = T_p \text{ ou } -k\partial_n T|_w = q_p \text{ ou } h\partial_n T|_w + (T|_w - T_p) = 0.)$$

## 4.2. Analyse phénoménologique sommaire des équations

### 4.2.1. Le système

Nous connaissons la température du corps, et soit  $L$  sa dimension caractéristique. La jauge de la vitesse est inconnue *a priori*, adimensionnons :

$$\underline{u} = U_0 \underline{\bar{u}}, \quad T = T_\infty + (T_p - T_\infty) \bar{T}, \quad x = L \bar{x}, \quad y = L \bar{y} \dots$$

et enlevons les barres (on est maintenant sans dimension) :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{\delta p}{\rho_\infty U_0^2} \nabla p + \frac{Lg\alpha(T_p - T_\infty)}{U_0^2} T \underline{e}_z + \frac{\nu}{U_0 L} \nabla^2 \underline{u}.$$

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla})T = \frac{k}{\rho_\infty c_p U_0 L} \underline{\nabla}^2 T + 2 \frac{\nu U_0}{c_p L (T_p - T_\infty)} (\underline{D} : \underline{D})$$

Bien entendu  $U_0$  est inconnu. Nous allons voir que plusieurs points de vue sont possibles.

#### 4.2.2. Une possibilité

Il est clair que le terme  $\frac{Lg\alpha(T_p - T_\infty)}{U_0^2}$  est indispensable pour coupler thermique et dynamique. S'il existe un écoulement imposé supplémentaire de vitesse  $U_\infty$ , on utilise cette vitesse comme jauge, le nombre précédent est le nombre de Richardson :

$$Ri = \frac{g\alpha(T_p - T_\infty)L}{U_\infty^2}$$

Il s'agit du problème fort délicat de la convection mixte... En fait si  $U_\infty = 0$ ,  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont mesurés avec un  $U_0$  inconnu pour l'instant. La perturbation de température est mesurée par  $\Delta T$ . Si on chauffe la diffusion est le mécanisme qui transmet la température, donc :

$$\frac{k}{\rho_\infty c_p U_0 L} = 1, \text{ donc } U_0 = \frac{\nu}{PrL},$$

serait un bon choix (on rappelle que  $Pr = O(1)$ ). On préfère généralement prendre (de manière équivalente, au lieu d'avoir un Péclet unité, c'est le Reynolds qui vaut 1)  $U_0 = \frac{\nu}{L}$ . On a  $(\delta p) = \rho_\infty U_0^2$ . Le terme moteur qui fait changer la vitesse est  $-\alpha \Delta T g$  le frein est  $\nu L^{-2} U_0$ . Il apparaît donc le nombre sans dimension suivant en facteur du terme moteur :

$$\alpha \Delta T g L / (U_0^2) = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\nu^2} = G.$$

C'est le nombre de Grashof  $G$ . Si on avait gardé pour la vitesse  $\nu / (PrL)$  on aurait introduit ,

$$Bo = \frac{\alpha g \Delta T Pr^2 L^3}{\nu^2},$$

le nombre de Boussinesq. Les équations, sans dimension et en supposant que  $(\frac{\nu U_0}{c_p L \Delta T})$  est très petit (ce qui est souvent le cas mais qui mériterait une plus ample discussion), deviennent :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} &= 0 \\ (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\underline{u} &= -\underline{\nabla} p + G T \underline{e}_z + \underline{\nabla}^2 \underline{u}. \\ (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})T &= Pr^{-1} \underline{\nabla}^2 T \end{aligned}$$

On remarque qu'il existe donc une longueur  $L = [\frac{\nu}{\alpha g \Delta T}]^{1/3}$  telle que le problème est complet ( $G = 1$ ).

Ce point de vue est en fait assez adapté au cas où on chauffe de plus en plus un corps, partant de l'écoulement de repos. On voit en effet que si le nombre  $G$  augmente, le terme source devient de plus en plus grand, et provoque le mouvement (*c.f.* le problème de Rayleigh Bénard en fin de chapitre, on remarquera dans ce cas qu'il est alors plus judicieux d'utiliser le nombre de Rayleigh  $Ra = \frac{\alpha g \Delta Pr L^3}{\nu^2}$  (mais la démarche est complètement équivalente).

#### 4.2.3. Une autre possibilité

Une manière différente aurait été de poser que le terme  $\frac{Lg\alpha(T_p - T_\infty)}{U_0^2}$  qui est indispensable pour coupler thermique et dynamique est égal à 1. Ce point de vue est plus adapté au cas où on observe un écoulement établi (car c'est le terme moteur).

Les équations sans dimension seraient alors devenues :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} &= 0 \\ (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\underline{u} &= -\underline{\nabla} p + T \underline{e}_z + G^{-1/2} \underline{\nabla}^2 \underline{u}. \\ (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})T &= Pr^{-1} G^{-1/2} \underline{\nabla}^2 T \end{aligned}$$

Cette dernière forme est plus adaptée au point de vue couche limite. Nous allons l'examiner maintenant

### 4.3. Exemples de couche limite laminaire sur un plan

#### 4.3.1. Cas vertical, température imposée

On se donne un plan vertical, semi infini, porté à une température différente de  $\Delta T$  de la valeur loin à l'infini... C'est le problème du radiateur.

Les équations précédentes nous montrent qu'à grand nombre de Grashof :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla p + T \underline{e}_z, \text{ et } (\underline{u} \cdot \nabla) T = 0,$$

le mouvement ne se produit pas : la paroi est une couche singulière. On voit directement que les termes à récupérer étant en  $G^{-1/2} \nabla^2(\cdot)$  la couche limite sera en  $(G^{-1/2})^{1/2} = G^{-1/4}$ . Plutôt que d'adopter cette démarche, nous réanalysons le problème.

#### 4.3.2. Analyse

Reprenons le problème complet pour bien voir les mécanismes induits par ce phénomène. Le problème complet, s'écrit ici en tournant les axes :  $x$  est vertical (en variables dimensionnées) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \alpha g (T_p - T_\infty) \bar{T}, \text{ et } u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\rho \partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Il s'analyse comme suit :

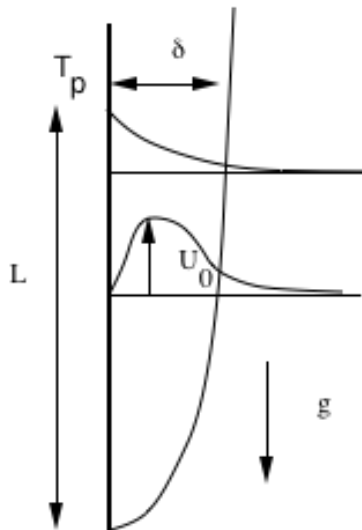


FIG. - la plaque verticale chauffée.

Comme il ne se passe rien si on ne tient pas compte de la viscosité, c'est qu'il existe une couche limite tenue près de la paroi, soit  $\delta$  son épaisseur et plaçons nous à la distance  $L$  du bord d'attaque. Manifestement, le terme moteur est la force d'Archimède,  $\rho g \alpha \Delta T$  qui intervient dans le gradient longitudinal, si  $P$  est la jauge de pression, l'équilibre longitudinal donne :

$$\frac{P}{L} \sim \rho g \alpha \Delta T,$$

cette pression fait se développer une vitesse longitudinale dont l'ordre de grandeur est  $U_0$  :

$$\rho U_0 \frac{U_0}{L} \sim \frac{P}{L}$$

Donc :  $U_0 \sim (L g \alpha \Delta T)^{1/2}.$

Cette vitesse doit être annulée à la paroi par les effets visqueux, donc :

$$U_0 \frac{U_0}{L} \sim \nu \frac{U_0}{\delta^2}$$

ce qui permet d'éliminer  $U_0$  et de trouver  $(\delta/L)$  :

$$\frac{\delta}{L} = G^{-1/4}$$

avec le nombre de Grashof :

$$G = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\nu^2}$$

### 4.3.3. Problème sans dimension :

Au final en posant :

$$x = L\bar{x}, y = LG^{-1/4}\tilde{y}, u = (Lg\alpha\Delta T)^{1/2}\tilde{u} \text{ etc}$$

les équations deviennent :

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}} = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2} + \tilde{T}, \quad \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{y}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\tilde{y}^2},$$

avec les conditions aux limites

$$\tilde{u}(\bar{x}, 0) = \tilde{v}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \tilde{T}(\bar{x}, 0) = 1, \quad \text{et} \quad \tilde{u}(\bar{x}, \infty) = 0, \quad \tilde{T}(\bar{x}, \infty) = 0.$$

Note, on aurait pu directement en partant du système sans dimension et en posant  $\tilde{y} = y/\varepsilon$  trouver que  $\varepsilon = G^{-1/4}$ .

### 4.3.4. Solutions semblables

L'analyse de l'adimensionnement fait double emploi : si  $L$  est changé en  $LL^*$ , on voit qu'alors  $\delta$  est changé en :  $\delta L^{*(1-3/4)} = \delta L^{*1/4}$ , ce qui conduit à la variable de similitude  $\eta = \frac{\tilde{y}}{\bar{x}^{1/4}}$ , et la forme suivante pour la fonction de courant :

$$\psi = \bar{x}^{3/4}f(\eta) \text{ et } \tilde{T} = g(\eta).$$

On pose pour les variables de similitude :

$$\xi = \bar{x}, \quad \eta = \tilde{y}/\bar{x}^{1/4} \text{ et donc } \frac{\partial}{\partial\bar{x}} = \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\eta}{4\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial\tilde{y}} = \frac{1}{\xi^{1/4}}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

soit pour les vitesses  $\tilde{u} = \xi^{1/2}f'(\eta)$ ,  $\tilde{v} = \frac{1}{4\xi^{1/4}}(\eta f' - 3f)$ , donc comme

$$\tilde{u}\frac{\partial}{\partial\bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}} = \xi^{1/2}f'\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{3}{4\xi^{1/2}}f\frac{\partial}{\partial\eta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial\tilde{y}^2} = \frac{1}{\xi^{1/2}}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},$$

le problème autosemblable est :

$$4f''' + 3ff'' - 2f'^2 + 4g = 0;$$

$$4g'' + 3Prfg' = 0;$$

La résolution par une méthode de tir donne :

pour  $Pr=0.7$ ,  $f''(0) = 0.9571$ ,  $g'(0) = -0.3534$   
 pour  $Pr=1.$ ,  $f''(0) = 0.9069$ ,  $g'(0) = -0.4008$   
 pour  $Pr=7.$ ,  $f''(0) = 0.6371$ ,  $g'(0) = -0.7450$

Sur la figure suivante on représente les profils de  $f'$  et de  $g$  en fonction de  $\eta$  pour ces 3 nombres de Prandtl représentatifs.

### 4.3.4. Finalement, valeur de Nusselt

La valeur pratique du nombre de Nusselt local pour l'air est donc :

$$Nu_x = 0,35Gr_x^{1/4}.$$

La valeur moyenne pour une longueur  $L$  est alors :

$$\langle Nu \rangle = 0.478Gr_L^{1/4}.$$

Pour des nombres de Grashof environ égaux à  $10^8$  on quitte le régime laminaire. Il est communément admis qu'en régime turbulent le nombre de Nusselt varie expérimentalement comme  $Gr_L^{1/3}$  (voire  $2/5$  car  $1/3 \sim 2/5$ !!!). Ces valeurs permettent de compléter notre tableau sur les coefficients d'échange.

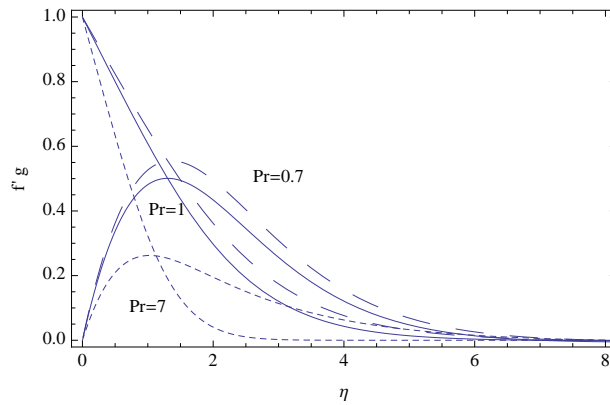


FIGURE 2 – trait plein  $Pr = 1$ , petit pointillé  $Pr = 7$ , gros  $Pr = 0.7$ ;  $f'$  varie de 0 à 0 et  $g$  varie de 1 à 0.

### 4.3.5 Mise en oeuvre numérique

Cet exemple est en fait plus complexe qu'il n'y paraît à résoudre numériquement avec un solveur Navier Stokes. En effet, il a été montré récemment par Le Quéré 08 que les écoulements de convection naturelle dans des domaines partiellement clos posaient de graves questions d'implémentation de conditions aux limites. Par exemple, pour le problème de la plaque verticale, seules les conditions sur la plaque sont claires. Mais que se passe-t-il au loin? Quelles conditions mettre sur les trois autres bords? Une idée simple serait de mettre une condition de Neumann pour toutes les quantités sur les trois bords. Le problème est que la solution est déterminée alors à un demi Poiseuille près (qui est une valeur propre du problème). Le Quéré propose donc de calculer cette fonction propre (qui dépend de la géométrie) et d'ajuster une combinaison linéaire de cette solution et de la solution calculée de manière à faire disparaître le gradient de pression entre le bas et le haut. En pratique, nous avons utilisé le Solveur Gerris et nous avons annulé la pression à chaque pas de temps de manière à ne pas avoir cet écoulement superflu.

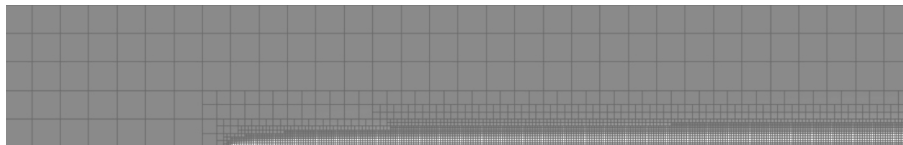


FIGURE 3 – Calcul à Prandtl unitaire. Calculs numériques avec Gerris dans un domaine de taille  $4*1$ , en haut partout on se donne des conditions de Neumann. Le premier quart du domaine est la zone amont, on se donne  $v = 0$  Neumann en  $u$  et  $T$ . A gauche, l'entrée  $p = 0$   $v = 0$  et Neuman pour  $u$  et  $T$ . Puis sur la plaque Dirichlet en bas  $u = v = 0$ ,  $T = 1$ . À la sortie Neumann pour  $u$   $v$  et  $T$ . Remarquer le maillage adapté à la couche limite.

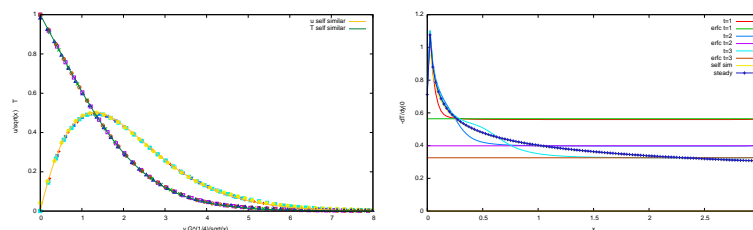


FIGURE 4 – Calcul à Prandtl unitaire. A gauche, les calculs numériques dans un domaine de taille  $4*1$ , en trois coupes  $x = 1, 1.5, 2$  et 3 on trace en fonction de la variable de similitude et on superpose à la solution autosemblable. A droite, le flux à la paroi aux temps 1 2 et 3. On passe de la solution en  $\sqrt{(\sqrt{G}\pi t^{-1})}$  (droites horizontales aux temps 1 2 et 3) à la solution autosemblable  $0.4 * G^{1/4} \sqrt{x}$



### 4.3.5. Cas vertical, flux imposé

Soit une plaque verticale, on la chauffe en imposant maintenant le flux et non plus la température.

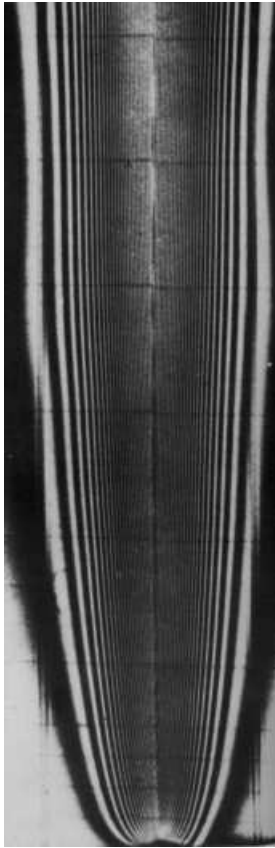


FIG - interférogramme montrant les lignes iso densité (photo Van Dyke 82)

On vérifiera facilement que si le flux est imposé, soit  $q_w$  sa valeur constante à la paroi, la jauge de l'épaisseur de couche limite est :

$$\frac{\delta}{L} = G_q^{-1/5}, \text{ avec } G_q = \frac{\rho\alpha q_w L^4}{\nu^2}.$$

(pour y parvenir, il ne faut noter que cette fois la jauge de la pression est

$$\frac{P}{L} \sim \rho g \alpha q_w \delta,$$

etc.

L'image ci contre (extraite de Van Dyke 82) représente la convection libre issue d'une feuille de métal (chauffée électriquement dans une enceinte de remplie d'oxyde d'azote à 17 atmosphères. La plaque fait 19 cm et le nombre de Grashof de flux ( $G_q$ ) vaut  $5 \cdot 10^{11}$ . La couche limite a été épaissie 6 fois (transversalement) par un procédé optique.

La planche suivante représente l'évolution en fonction du temps de l'épaisseur de couche limite, après un chauffage impulsif. L'écoulement final stationnaire étant celui de la figure de gauche. Pour les temps courts on observe, qu'à position fixée, l'épaisseur croît en  $\sqrt{t}$ , jusqu'à ce que l'information de l'existence du nez soit parvenue... La couche limite est alors stationnaire et se développe en  $x^{1/5}$ . Cet exemple sera examiné en PC dans le cas de la plaque horizontale.

### 4.3.6. Cas horizontal, température imposée

L'analyse est sensiblement la même, comme l'écoulement sur les plaques chauffées est très instable, on étudie ici la plaque refroidie par rapport au fluide...

Bien entendu cela revient au même d'étudier le plafond chauffé par rapport au fluide en inversant la gravité :

Cette fois le terme moteur d'Archimède  $\rho g \alpha \Delta T$  provoque une variation transverse de pression :

$$\frac{P}{\delta} \sim \rho g \alpha \Delta T.$$

Donc l'ordre de grandeur de  $U_0$  vérifie par l'équilibre inertie-gradient de pression :

$$\rho U_0 \frac{U_0}{L} \sim \frac{P}{L}$$

L'échelle de vitesse est  $U_0 \sim (\delta g \alpha \Delta T)^{1/2}$ . Cette vitesse doit être annulée à la paroi par les effets visqueux, donc l'équilibre inertie-viscosité donne :

$$U_0 \frac{U_0}{L} \sim \nu \frac{U_0}{\delta}$$

ce qui permet d'éliminer  $U_0$  et de trouver ( $\delta/L$ ) :

$$\frac{\delta}{L} = G^{-1/5}$$

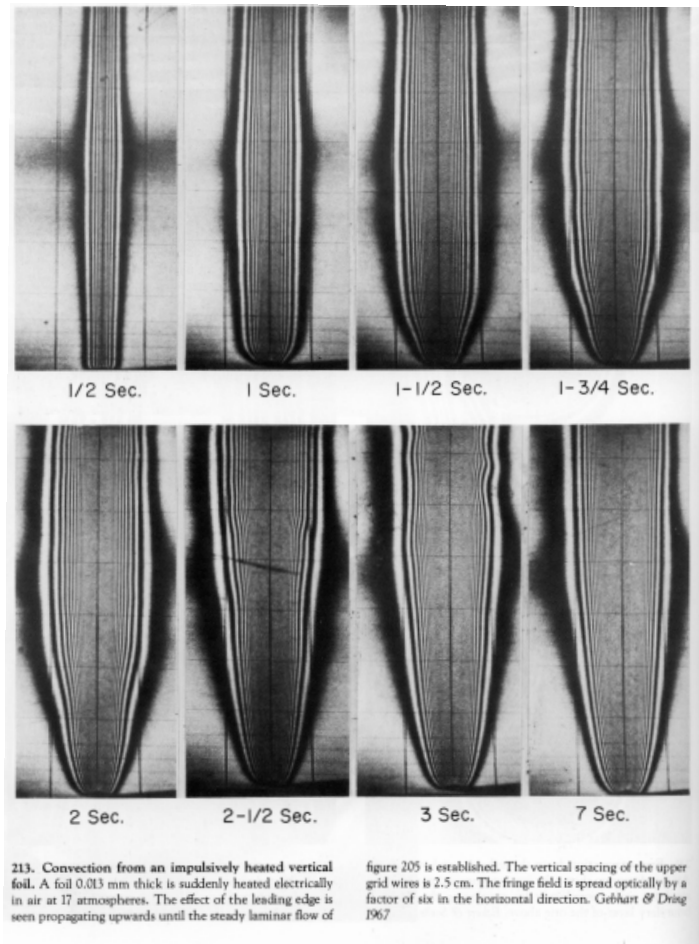


FIGURE 5 – Développement temporel d'une couche limite de convection libre à grand nombre de Grashof (planche extraite de Van Dyke 82).

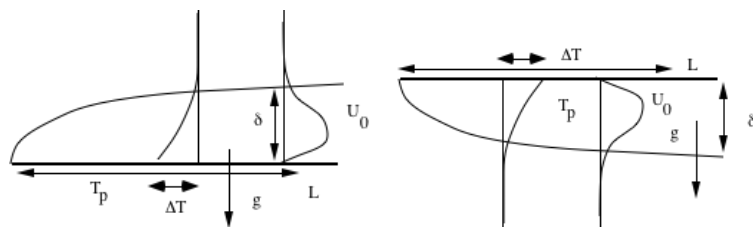


FIGURE 6 – Gauche plaque horizontale refroidissant le fluide, droite Plaque chaude, gravité inversée.

avec le nombre de Grashof :

$$G = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\nu^2}$$

Au final en posant :

$$x = L\tilde{x}, y = LG^{-1/5}\tilde{y}, u = (Lg\alpha\Delta T)^{1/2}G^{-1/10} \text{ etc}$$

les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{T}, \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\tilde{u}(\tilde{x}, 0) = \tilde{v}(\tilde{x}, 0) = 0, \tilde{T}(\tilde{x}, 0) = 1, \text{ et } \tilde{u}(\tilde{x}, \infty) = 0, \tilde{T}(\tilde{x}, \infty) = 0.$$

etc.

Pour un Prandtl unité on trouve après avoir posé le système semblable avec comme variable de similitude :

$$\eta = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}^{2/5}},$$

pour Pr=0.7, la solution de similitude donne  $f''_0 = 0.97, g'_0 = -0.35$

$$Nu_x \sim 0.35 Gr_x^{1/5}.$$

Qui est une nouvelle formule utile pour calculer les coefficients de transferts. On peut varier les configurations, et incliner la plaque...

On retiendra que le Nusselt de la plaque horizontale est inférieur au Nusselt de la plaque verticale. ( $Nu_{vertical} > Nu_{horizontal}$ ).

#### 4.4. Le problème de Rayleigh Bénard

##### 4.4.1. équations

Pour mémoire examinons rapidement le problème de Rayleigh Bénard (dont les images sont dans le livre Darrozès & François page 251, et dans l'ouvrage de Van Dyke 82).

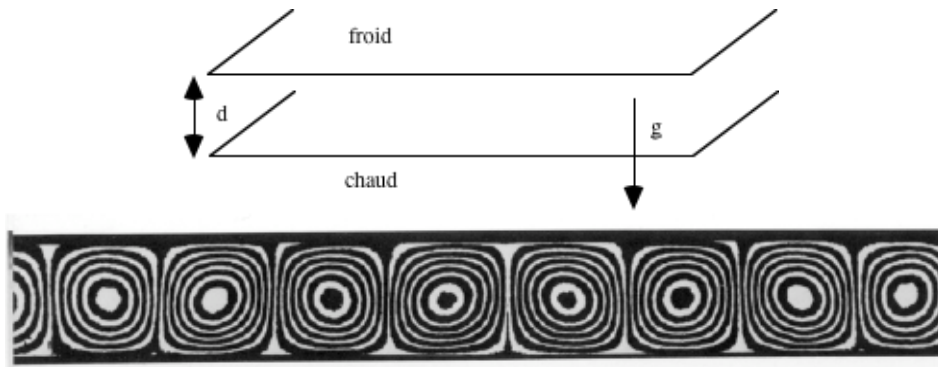


FIGURE 7 – Haut : dispositif schématique, deux plaques limitant un fluide, celle du bas est plus chauffée que celle du haut. Bas : rouleaux vus de côté (plaque en haut et en bas) Van Dyke 82

On peut observer des rouleaux longitudinaux parallèles dans un film de fluide visqueux (huile de silicone) maintenu entre deux plaques à une température chaude en bas et froide en haut.

Si la surface supérieure est libre, on observe surtout des hexagones (cette forme est causée par les effets de la tension de surface).

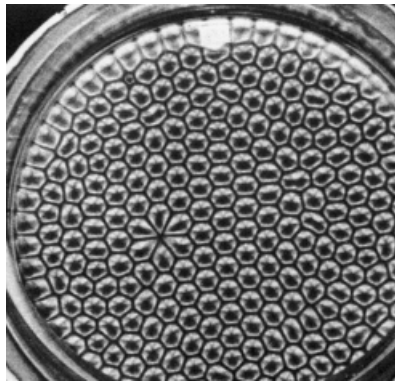


FIGURE 8 – dans le cas où la surface est libre et où le fond est chauffé : on voit (en vue de dessus) des hexagones (Van Dyke).

Il s'agit d'un problème de convection naturelle : le fluide chauffé en bas se dilate et remonte entraîné par la force d'Archimède, arrivé en haut il se refroidit et retombe. C'est ce mouvement qu'il faut expliquer. écrivons les équations pour un fluide newtonien compressible caloriquement parfait avec l'approximation de Boussinesq et en négligeant la dissipation visqueuse ( $E=0$ ) :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} &= 0 \\ \rho_\infty \left( \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} \right) &= -\underline{\nabla} p + \rho_\infty g (1 - \alpha(T - T_0)) \underline{e}_z + \mu_\infty \underline{\nabla}^2 \underline{u}. \\ \rho_\infty c_p \left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \right) T &= k \underline{\nabla}^2 T \end{aligned}$$

#### 4.4.2. état de base

L'état de base (ou état initial vérifiant les équations) est celui de conduction pure : la conduction au travers d'un milieu fixe, c'est le problème du mur. Il ne reste que l'équation de la chaleur sous la forme simple :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0;$$

d'où

$$u = v = w = 0, \quad T = T_0 - \Delta z/d,$$

et pour la pression :

$$p = p_0 - \rho_0 g d (z/d + 1/2 \alpha \Delta T z^2/d^2).$$

Il existe donc une solution stationnaire des équations, c'est la solution de conduction. Cet état est appelé "état de base", on va maintenant le perturber et voir si des perturbations vont croître ou s'atténuer.

#### 4.4.3. Adimensionnement des équations.

Par l'analyse phénoménologique adimensionnons les équations obtenues pour les écarts à la solution de base définie plus haut. On a  $d$  l'écartement des plaques comme quantité évidente d'adimensionnement (du moins pour un premier essai),  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont mesurés avec un  $U_0$  inconnu pour l'instant. L'analyse effectuée plus haut s'applique en prenant  $L = d$ . On prend aussi en compte le caractère instationnaire. Si on chauffe en bas, le temps de réponse de la température est :

$$\tau = \rho_0 c_p d^2 / k = d^2 P_r / \nu.$$

On a bien  $U_0 = d/\tau = \nu/(P_r d)$ . Mais attention, il y a aussi le terme  $w \partial T / \partial z$  qui va jouer, il serait donc bon qu'il soit du même ordre de grandeur que  $\partial T / \partial t$ . Les équations, sans dimension, deviennent pour les écarts à la solution de base

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial x} + Pr \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial y} + Pr \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial z} + Pr \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - Pr Ra \Theta \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} - w &= \frac{\nu}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Il apparaît donc le nombre sans dimension suivant en facteur du terme moteur :

$$\alpha \Delta T g / (U_0 / \tau) = Pr = Ra Pr \text{ avec } Ra = \frac{\alpha g \Delta T Pr d^3}{\nu^2}$$

C'est en fait  $Pr^2$  fois Grashof, la raison du choix du nombre  $Ra$  pour caractériser cet écoulement est simplement due au fait qu'il est le rapport entre le terme moteur ( $\theta$ ) et le terme de freinage ( $\nabla^2 v$ ), ceci ne remet pas en cause l'adimensionnement avec le nombre de Grashof. On conçoit donc que si ce nombre de Reynolds est assez grand, il va finir par créer un mouvement...

Il s'agit du système précédent (§4.2) aux différences près de l'existence d'un gradient imposé de température (d'où le "-w" dans l'équation de la chaleur) et d'un choix différent de la jauge de vitesse (facteur  $Pr^{-1}$ ).

#### 4.4.4. Conditions aux limites

Nous nous restreignons au cas où on met des parois rigides :

$$u = v = w = 0 \text{ sur } z = 0 \text{ et } 1$$

On remarque que cela donne (à cause de l'invariance par translation sur les parois) :

$$\partial w / \partial z = 0 \text{ sur } z = 0 \text{ et } 1$$

Pour la température, elle est imposée :

$$\Theta = 0 \text{ sur } z = 0 \text{ et } \Theta = 0 \text{ en } z = 1$$

#### 4.4.5. Linéarisation

La suite de la résolution est très technique et n'est ici que rapidement déflorée. On linéarise les équations autour de l'état de base qui est le repos. Puis par manipulations on peut éliminer  $u$  et  $v$  et ne garder que  $w$ . On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 w) &= Ra Pr \left( (\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \Theta + Pr \nabla^2 \nabla^2 w \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \Theta - w &= \nabla^2 \Theta \end{aligned}$$

avec comme conditions :

$$w = 0, \partial w / \partial z = 0, \Theta = 0 \text{ sur } z = 0 \text{ et } z = 1$$

La couche de fluide est supposée latéralement illimitée (invariances par translations en  $x$  et  $y$ ), on cherche donc des solutions avec  $e^{imx+ily}$ , le système est du genre  $\partial_t U = AU$ , on cherche donc des solutions avec  $e^{-i\omega t}$ , on pose souvent  $\sigma = -i\omega$ . On cherche la solution sous forme de "modes propres" (au sens des vecteurs propres) comme nous l'avons vu pour la stabilité des écoulements parallèles :

$$(w, \Theta) = (W(z), T(z)) e^{imx+ily} e^{\sigma t}.$$

Les perturbations harmoniques introduites (en  $\cos(mx+ly)$ ) seront atténuées si  $\text{Re}(\sigma) < 0$  ou au contraire amplifiées si  $\text{Re}(\sigma) > 0$ ,  $\text{Re}$  désignant la partie réelle. Une subtilité de cette configuration est que l'on peut chercher un mode "marginalelement stable" ( $\sigma = 0$ ). C'est une solution stationnaire "propre". Cette propriété est assez rare en général. Il est remarquable que le nombre de Prandtl en facteur du terme instationnaire disparaît, d'où le choix de  $Ra$ . D'où si  $k = \sqrt{m^2 + l^2}$  :

$$(D^2-k^2)^2W = k^2 Ra T; (D^2-k^2) T = -W;$$

$$\text{soit } (D^2-k^2)^3T = -k^2 Ra T;$$

Cette équation différentielle est particulièrement simple et a des solutions en  $e^{iqz}$ . La solution est la somme des 6 exponentielles complexes (avec 6 coefficients pour l'instant inconnus).

$$(q_m^2+k^2)^3 -k^2 Ra = 0.$$

$\pm q_m$  avec :  $q_m^2 = -k^2 + j^m(Ra k^2)^{1/3}$ , et  $m=0,1,2$  et  $j=-1/2 + i \sqrt{3}/2$ .

Il reste à écrire les 3 conditions en  $z=0$  et les 3 conditions en  $z=1$ . En écrivant que le déterminant 6x6 est nul, on obtient la courbe de stabilité marginale si dessous.

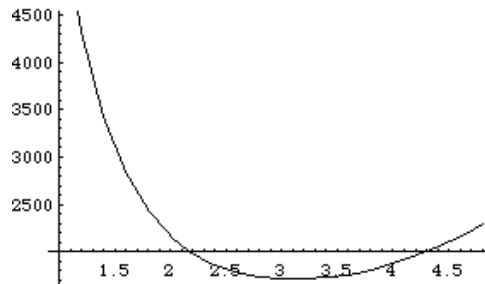


FIGURE 9 – Ra fonction de k.

La valeur minimale est  $Ra_c \sim 1707,76$ . Le nombre d'onde critique est  $k_c \sim 3,1$ .

La valeur minimale paraît "grande" (ce qui semble infirmer toute notre démarche où le nombre sans dimension devait être d'ordre unité), mais en fait comme d'après l'équation  $(D^2 - k^2)^3T = -k^2 RaT$ , donc  $k \sim O(Ra^{1/4})$ . Le vrai paramètre est donc  $Ra^{1/4}$ , soit  $1707,76^{1/4} = 6.4$  qui n'est pas "grand". Tant que  $Ra < Ra_c$ , il n'y a aucun mouvement. Lorsque  $Ra = Ra_c$  on observe des structures périodiques (rouleaux : en prenant la partie réelle de la solution en  $e^{ikr}$ ) de fréquence égale à  $3,1/2\pi$ . Si on augmente encore Ra plusieurs longueurs d'ondes sont excitées et les structures sont déformées.

#### 4.4.6. Conclusion

Ce problème est théoriquement très important, il est de plus assez simple à observer (avec de la margarine dans une poêle).

On notera la stratification de température de "base". Il en est de même en météorologie : il existe un gradient de température entre le sol et la limite de l'atmosphère.

Du point de vue du thermicien, on retiendra que le Nusselt vaut 1, pour  $Ra < 1708$ , puis qu'il augmente fortement dès que l'on passe ce seuil (qui correspond à la mise en mouvement du fluide), *grosso modo* il finit par croître en  $Ra^{1/3}$ . La valeur 1/3 est approximative et provient de mesures expérimentales, on constate donc que la turbulence favorise fortement les échanges de chaleur !

#### 4.5. Panaches..

C'est un cas facilement observable dans la nature (cheminées...). Tout comme le jet est la contrepartie de l'écoulement de plaque plane, le panache ("*plume*") est la contrepartie de l'écoulement de convection libre sur une plaque plane. De même que loin de l'orifice on peut dire qu'un jet 2D est issu d'une ligne qui est source de quantité de mouvement, il s'agira d'une source de chaleur. On a alors conservation du transport de chaleur le long de l'axe vertical  $x$  :

$$\frac{d}{dx} \int u \Delta T dy = 0$$

En revanche le flux de quantité de mouvement augmente de par l'action de la poussée d'Archimède. Tout comme les jets, les panaches sont très instables et n'existent pratiquement que sous forme turbulente.

## 4.6. Conclusion

À retenir : l'approximation de Boussinesq. Grâce à elle, on transforme un fluide faiblement dilatable en un fluide incompressible mais avec un terme de force d'Archimède. Le nombre sans dimension pertinent est le nombre de Grashof 1826-1893 (ou son faux jumeau le nombre de Rayleigh). Les équations sans dimension (en négligeant la dissipation visqueuse) à résoudre sont couplées (au sens où la dynamique et la thermique sont liées et qu'il faut connaître les conditions aux limites en vitesse et en température pour résoudre).

Cette approximation n'est pas mauvaise pour les liquides mais est à manier avec précautions pour les gaz. Dans tous les cas on ne chauffera pas trop !

Des phénomènes très variés peuvent se produire : écoulements pariétaux ou rouleaux ou hexagones...

## 4.7. Bibliographie <sup>1</sup>

- J. Boussinesq, (1901-03): "Théorie analytique de la chaleur", Gauthier Villars.  
 Adrian Bejan (2013) "Convection Heat Transfer, Fourth Edition" Willey  
 H. B. Callen (1960) "Thermodynamics", J Wiley & sons.  
 S. Chandrasekhar (1961) "Hydrodynamic and hydromagnetic Stability" Dover.  
 J.S. Darrozès & C. François (1996) "Mécanique des fluides incompressibles" Ed ENSTA.  
 P.G. Drazin and W.H. Reid (1981) "Hydrodynamic Stability", Cambridge University Press.  
 H. Gersten & H. Herwig (1992) "Strömungsmechanik" Ed. Viewig.  
 A. Giovannini & B. Bédard (2012) "Transfert de Chaleur" Cépaduès Ed.  
 P.-Y. Lagrée, cours ENSTA, Convection Naturelle.  
 L. Landau & E. Lifshitz (1989) "Mécanique des fluides" ed MIR.  
 A. Leontiev (1985) "Théorie des échanges de chaleur et de masse" ed. MIR.  
 P. La Quéré (2008) "On the computation of some external or partially enclosed natural convection flows" The 19th International Symposium on Transport Phenomena  
 P. Manneville (1990) "Structures dissipatives chaos & turbulence", Aléa Saclay.  
 F. Sacadura (1993) "Initiation aux transferts thermiques", Lavoisier Tec & Doc.  
 H. Schlichting (1987) "Boundary layer theory" Mac Graw Hill.  
 M. Van Dyke (1982) "An album of fluid motion", Parabolic Press.

---

1. 25 octobre 2018

page blanche



# Conclusion

On aura compris au long de ce cours l'importance de bien analyser les équations et de comprendre l'importance de chaque terme. Cette compréhension des équations et de leurs effets prépondérants est fondamentale pour bien analyser les résultats numériques qui vont sortir des amas de fermes d'ordinateurs. La connaissance et la compréhension des phénomènes s'organisent autour de la compréhension qui passe par une étape de simplification. Le cours présente quelques exemples utilisant des logiciels libres comme `FreeFem++`, `Gerris/Basilisk` ou `Cast3M`, dont l'usage doit toujours se faire en ayant ce cours en tête.

C'est pour cela que nous avons d'abord présenté "toutes les équations" en insistant sur leur construction qui doit vérifier les principes de la Thermodynamique (des processus irréversibles, la T.P.I.) dans le (premier chapitre).

Puis, nous avons abordé rapidement la conduction stationnaire simple dans un milieu au repos dans le deuxième chapitre. Nous avons ainsi écrit l'équation de la chaleur la plus simple lorsque seule la conduction est présente :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Mais nous avons vu que la résolution de cette équation est fortement dominée par les conditions aux limites à la paroi où la température est notée  $T_w$ . Ces conditions peuvent être de trois sortes : soit la température est imposée, soit le flux est imposé, soit une combinaison des deux. C'est en fait cette dernière condition qui est la plus générale :

$$k \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_w \underline{n} + h(T_w - T_f) \underline{n} = 0.$$

Elle fait apparaître le coefficient d'échange  $h$  qui traduit une modélisation simplifiée de tout l'extérieur du domaine considéré.

Les deux chapitres suivants sont consacrés à l'estimation de ce facteur  $h$  dans le cas de la convection forcée (l'objet est placé dans un écoulement qui le refroidit ou le réchauffe), en interne ou en externe et dans le cas de la convection libre ou naturelle (l'objet en changeant de température va mettre en mouvement le fluide légèrement dilatable). Il est plusieurs fois rappelé que l'équation de la chaleur s'écrit avec la dérivée totale et qu'elle contient éventuellement des termes sources supplémentaires.

Le chapitre suivant (sur internet) porte sur les modifications apportées lorsque l'écoulement est turbulent. La structure de la couche limite est particulière avec sa couche logarithmique, mais les idées utilisées sont issues de celles présentées jusque là.

Le chapitre (sur internet) méthodes intégrales porte sur une méthode approchée mais utile et liée aux équations de Saint Venant. Enfin, le dernier chapitre (sur internet) porte sur le transfert de masse en introduisant la loi de Fick (dans le cadre toujours de la TPI). Les similitudes entre l'équation de la diffusion de la concentration et de la chaleur sont rappelées.

Les Petites Classes permettent de manipuler les équations (mise sans dimension, simplification) et de terminer des calculs à la main (les solutions sont souvent autosemblables), toutes les hypothèses

semblent tirées dans ce sens. Mais, cette démarche n'est pas du tout réductrice, car localement, dans n'importe quel problème pratique, on peut toujours se ramener à des configurations classiques. Par ailleurs, les solutions semblables apparaissent souvent (ce que l'on désigne par *intermediate asymptotics*). C'est d'ailleurs tout l'intérêt de cette démarche.

Les "Pales" sont des exemples souvent issus de la littérature scientifique et mettent en oeuvre l'adimensionnement et les simplifications asymptotiques. Elles sont inspirées à la fois de problèmes industriels (Epitaxie pour les semi conducteurs, fabrication du verre fondu, tour solaire, pot d'échappement d'un véhicule...) ou de problèmes environnementaux (magma, vent catabatique...).

Pour aller plus loin, il faut aussi considérer les cas où l'écoulement est fortement compressible (dynamique des gaz). En effet l'incompressibilité permet de découpler les équations de la dynamique et de la thermique dans le cas de la convection forcée : ce n'est qu'une première approximation. Mais, surtout, il faut considérer le rayonnement ce qui n'est pas fait dans ce cours mais peut être très important dans certaines configurations.

Il est bon d'insister une dernière fois sur cette compréhension des équations et sur l'esprit critique qu'il faudra développer, sur les simplifications de type "système mince" qu'il faudra toujours effectuer pour vérifier les ordres de grandeur. Par ailleurs il est bon de continuer à faire des essais sur des maquettes simplifiées pour voir si tout est cohérent. Cette approche simplificatrice est à toujours garder à l'esprit. Elle a permis toutes les grandes réalisations thermiques humaines (navigation, conquête automobile, du ciel, de l'espace, centrales nucléaires *etc*), et servira pour les prochains défis d'économies d'énergie, de production d'énergie avec de nouvelles sources et d'optimisation de consommation de tous les dispositifs de conversion d'énergie. C'est à vous maintenant, avec tous ces outils d'analyse, ces outils numériques, votre intelligence naturelle et votre sens critique de relever ces défis.