Transferts Thermiques dans les Fluides

Couche limite thermique avec couplage fluide/ solide.

PC 4 **MF 204** 2016/2017
Lundi 13 février 2017

Couplage thermique

L'objet du problème est l'étude de la transmission de la chaleur au travers d'une paroi : il s'agit du couplage thermique entre la convection forcée d'un écoulement de fluide et une paroi solide de température différente. Pour simplifier ce problème ardu on va s'intéresser au voisinage du point d'arrêt, le fluide est supposé incompressible et quasistationnaire. Cette configuration est quand même générique car tout écoulement possède un point d'arrêt.

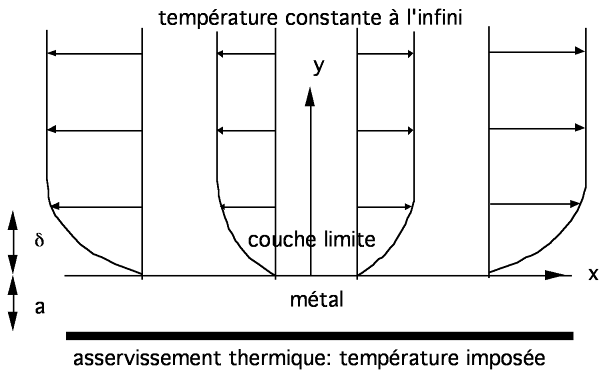


FIGURE 1 – Ecoulement de point d'arrêt sur une plaque.

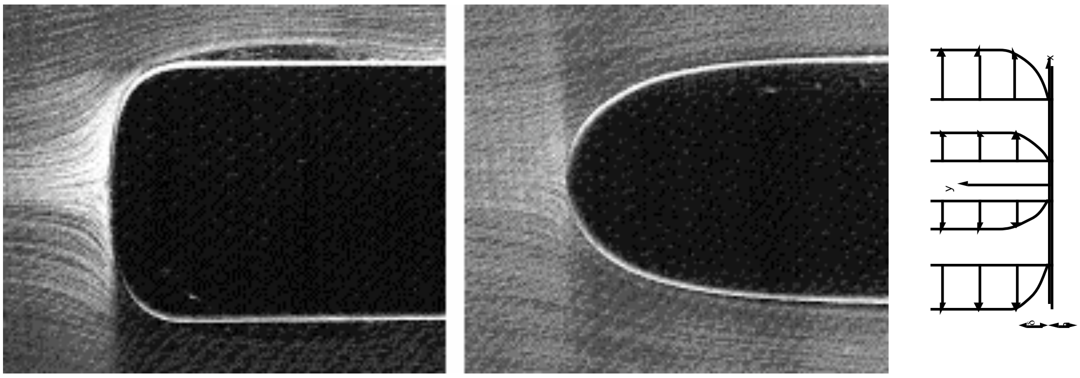
Le solide est un métal de propriétés physiques constantes : masse volumique ρ_s, chaleur spécifique c_s, conductivité thermique k_s et diffusion thermique $\alpha_s = k_s/(\rho_s c_s)$. Il se présente sous forme d'une plaque plane d'épaisseur finie a. Un asservissement thermique permet de maintenir la face $y = -a$ à la température T_0 constante Le fluide est incompressible et ses propriétés physiques sont supposées constantes :ρ, ν, c, k et α. Le nombre de Prandtl est d'ordre unité.

L'écoulement de point d'arrêt est caractérisé par son comportement à l'infini qui fait intervenir une constante A (de dimension s^{-1}), les composantes u, v de la vitesse sont telles que $u \sim 2Ax$ et $v \sim -2Ay$, la température étant $T_\infty > T_0$. Le nombre de Reynolds, sera supposé très grand, il sera construit avec une longueur $L >> a$. Dans l'ensemble du problème on néglige les effets de la gravité et de la production de chaleur par frottements visqueux.

1.1 Sans rétablir les équations de couche limite stationnaires, et en prenant les résultats de la couche limite dynamique du cours (Darrozès & François p 224) avec $\beta = 1$, écrire les équations et les conditions aux limites adimensionnelles que doivent vérifier la température $T(x, y)$ dans le fluide et la température $\Theta(x, y)$ dans le solide, dans un domaine d'ordre L en x. Montrer qu'en première approximation la fonction Θ est linéaire en y.

1.2. Montrer que les solutions de la température dans la couche limite sont nécessairement de la forme $\bar{x}^n g(\tilde{y})$. Exprimer la valeur de n en utilisant les conditions aux limites et écrire l'équation que doit vérifier $g(\tilde{y})$.

1.3. En déduire que la température est constante à la paroi, et qu'il existe une épaisseur caractéristique a^* (que l'on écrira en fonction du nombre de Biot), ne dépendant que des données et telle qu'en première approximation : $a << a^*$ entraîne $T_p = T_0$, et $a >> a^*$ entraîne $T_p = T_\infty$.



photos: Van Dyke "An Album of fluid motion" Parabolic 1982, écoulement de point d'arrêt.

Le code FreeFem++ pour calculer cette PC et des images de résultats sont sur :
`http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/ENSTA/HTMLPC/PC3/`

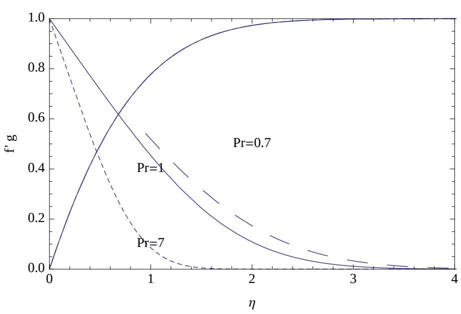


Figure 2 – Profils autosemblables, vitesse et températures pour 3 nbres de Prandtl

PC4 Couche limite thermique avec couplage fluide/ solide CORRECTION

L'originalité de cette PC est de proposer sur un exemple calculable à la main un couplage complet fluide solide avec imposition de la double condition d'égalité de température et de flux à l'interface. La difficulté tient aux allers retours fluide/ solide pour résoudre complètement au final avec l'imposition de la double condition. En pratique, la démarche est généralement découplée. On se donne le solide à température imposée. On calcule le fluide et on calcule le flux associé, ce sui donne un Nusselt. On prend ensuite le solide, on lui impose comme condition à la limite le coefficient d'échange issu du calcul du Nusselt précédent et on résout l'équation de la chaleur dedans. Nous proposons cette approche au point "Couplage Fluide Solide, vision classique", uniquement pour montrer que dans ce cas précis, tout va bien on retombe sur la même solution.

• 1.1 Le fluide :

L'écoulement de point d'arrêt est une solution exacte des équations de Navier Stokes (coup double !). D'après le cours de première année la solution de Falkner-Skan (1931) associée au point d'arrêt est la solution de Hiemenz (1911).

Le fluide parfait a comme solution : $u = 2Ax$ et $v = -2Ay$, la vitesse longitudinale à la paroi (vitesse de glissement) est $u = 2Ax$, on l'écrit sans dimensions en $x = L\bar{x}$, on pose $U_0 = 2AL$ pour la jauge de la vitesse $\bar{u} = \bar{x}$. On écrit ensuite les équations de Couche limite pour annuler la vitesse de glissement $\bar{u}_e = \bar{u}(\bar{x}, 0)$. Le nombre de Prandtl est d'ordre unité, les échelles dans les couches limites dynamiques et thermiques sont les mêmes : $x = L\bar{x}$, $y = \delta\tilde{y}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{\nu}{2A}}$, car le nbre de Reynolds est $R_e = 2AL^2/\nu$. Pour les vitesses $u = U_0\tilde{u}$, et $v = U_0 Re^{-1/2}\tilde{v}$.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \bar{u}_e\frac{d\bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$$

Avec pour conditions aux limites, l'adhérence $\tilde{u}(\bar{x}, 0) = 0$ et le raccord $\tilde{u}(\bar{x}, \infty) = \bar{x}$. La solution s'écrit de manière semblable, on peut facilement montrer que la variable de similitude est $\eta = \tilde{y}$. La solution est donc de la forme $\tilde{u} = \bar{x}f'(\tilde{y})$ et $\tilde{v} = -f(\tilde{y})$. La jauge de la température (δT) n'est pas encore connue, on pose $T = T_\infty + (\delta T)\tilde{T}$. L'équation pour la température :

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad \text{ou encore : } \bar{x}f'(\tilde{y})\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} - f(\tilde{y})\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

Nous écrirons plus loin l'équation dans le solide.

• 1.2 On observe que cette équation est invariante par tout changement d'échelle $x^*\hat{x}$, à la paroi, la température est disons $t(\bar{x})$ (qui dépend du couplage avec le solide). Mais ici, la variable de similitude est déjà imposée c'est $\tilde{y}$. La solution est vraisemblablement de la forme $t(\bar{x})g(\tilde{y})$, avec $g(0) = 1$ (toute autre valeur convient et revient à change la valeur de la jauge de température) et avec $g(\infty) = 0$. En substituant, on a :

$$\bar{x}t'/t = (fg'/g + Pr^{-1}g''/g)/f'$$

donc $\bar{x}t'/t = constante = n$, donc $t(\bar{x}) = B\bar{x}^n$. La valeur de n est pour l'instant quelconque, c'est l'expression dans le solide qui va nous en donner la valeur. La solution $B\bar{x}^n$ est bien comme attendue invariante par dilatations $x^*\hat{x}$ donne bien $x^{*n}\hat{T}$. Il faut donc examiner le solide en parallèle pour écrire à la paroi la double condition d'égalité de température et de flux.

• 1.3 Le solide :
Pour le solide, la variable y est mesurée avec a, on pose $\check{y} = y/a$, la température utilisera T_0 comme référence et $\Theta = T_0 + (\delta\Theta)\check{T}$ et l'équation de la chaleur s'écrit :

$$((\frac{a}{L})^2\frac{\partial^2 \check{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \check{T}}{\partial \check{y}^2})\frac{(\delta\Theta)}{a^2} = 0 \text{ asymptotiquement : } \frac{\partial^2 \check{T}}{\partial \check{y}^2} = 0$$

pour $\check{y} = -1$ on a $\check{T} = 0$, pour $\check{y} = 0$ on est à la surface, on écrira ensuite la double condition d'égalité de température et de flux à la surface. donc la température varie linéairement dans le solide $\check{T} = A(\bar{x})(\check{y} + 1)$
• Couplage Fluide Solide
Pour conclure sur la solution, il nous faut écrire les conditions sur la paroi (égalité des températures ET égalité des flux normaux). Les conditions aux limites à la paroi donnent d'une part par l'égalité des températures (avec $g(0) = 1$, c'est un choix, on peut prendre la valeur que l'on veut) :

$$T(x, 0) = T_\infty + (\delta T)g(0)\bar{x}^n \text{ qui est égal à } \Theta(x, 0) = T_0 + (\delta\Theta)A(\bar{x})$$

d'autre part par l'égalité des flux à la surface entre le fluide et le solide :

$$k_s\frac{\partial\Theta}{\partial y} = k\frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{donc } \frac{k_s(\delta\Theta)}{a}A(\bar{x}) = \frac{k(\delta T)}{\delta}g'(0)\bar{x}^n$$

Cette dernière nous suggère $A(\bar{x}) = \frac{ak(\delta T)}{\delta k_s(\delta\Theta)}g'(0)\bar{x}^n$, si on l'injecte dans la température :
$T_\infty + (\delta T)g(0)\bar{x}^n = T_0 + \frac{ak(\delta T)}{\delta k_s}g'(0)\bar{x}^n$ ou $(T_\infty - T_0) = (\delta T)(\frac{ak}{\delta k_s}g'(0) - g(0))\bar{x}^n$, manifestement ce n'est possible que pour $n = 0$, la dépendance de $A(\bar{x})$ est une constante ! La température est constante sur la paroi :

$$(\delta T) = \frac{(T_0 - T_\infty)}{1 + \frac{a}{a^*}}$$

on pose $a^* = \frac{\delta k_s}{-g'(0)k}$ donc on peut exprimer complètement la température à la paroi

$$T_p = T_\infty + (\delta T) = \frac{(T_0 + \frac{a}{a^*}T_\infty)}{1 + \frac{a}{a^*}}$$

• Couplage Fluide Solide, vision classique
Réinterprétons ce résultat et retrouvons le en utilisant la démarche découplée classique. Normalement, on commence par se donner une température de paroi T_p et on résout pour le fluide la dynamique et la thermique. on pose donc $T = T_\infty + (T_p - T_\infty)g(y)$, et on trouve pour $g'' + Prfg' = 0$ $g(0) = 1$ $g(\infty) = 0$ on trouve $g'(0) = -1.18$ à $Pr = 7$ $g'(0) = -0.57$ à $Pr = 1$ $g'(0) = -0.49$ à $Pr = 0.7$.

le Nusselt est donc

$$Nu = k\frac{\partial T}{\partial y}/(k\frac{(T_\infty - T_p)}{L}) = -g'(0)\sqrt{Re}$$

On conclut en disant que dans cette configuration on a trouvé le flux. On peut donc proposer un coefficient d'échange construit avec ce Nusselt : $h = kNu/L$. Maintenant, on a "modélisé l'extérieur" par h. Pour le solide, on a a résoudre l'équation de la chaleur avec la condition de flux en haut imposé par ce coefficient d'échange : $-k_s\frac{\partial\Theta}{\partial y} = h(T_p - T_\infty)$ et si on pose $\Theta = T_0 + (T_p - T_0)\check{T}$ ou

$-(T_p - T_0)\dfrac{\partial \check{T}}{\partial \check{y}} = \dfrac{ha}{k_s}(T_p - T_\infty)$ avec $Bi = \frac{ha}{k_s}$. Le nombre de Biot est produit du coefficient d'échange du fluide h par l'épaisseur caractéristique de la plaque a divisé par le coefficient de conduction de la plaque k_s. Comme on doit résoudre un mur homogène on a $k_s\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = 0$, donc $-k_s\frac{\partial \Theta}{\partial y} = q$, où q est une constante. or on a $q = -k_s(T_p - T_0)/a$ pour le flux conductif, donc $-k_s(T_p - T_0)/a = h(T_p - T_\infty)$ ou encore $-(T_p - T_0) = Bi(T_p - T_\infty)$ donc

$$T_p = \frac{T_0 + BiT_\infty}{1 + Bi}$$

• Conclusion sur les deux points de vue : on retrouve exactement le même résultat dans ce cas précis car on a effectivement une température constante à la paroi, ce qui est un cas très particulier. En effet on remarque que $\frac{a}{a^*} = \frac{-ag'(0)k}{\delta k_s}\frac{aNu}{Lk_s} = \frac{ha}{k_s} = Bi$ c'est en effet bien un nombre de Biot.
Attention, le nombre de Biot que l'on a défini est celui relatif au solide. Le solide lui, de son point de vue, voit un autre nombre de Biot qui est l'inverse du précédent...

A retenir : L'apparition d'un nombre de Biot Bi et son influence sur le saut de température (c'est tout le problème du couplage thermique paroi/fluide), son aspect relatif !
L'écoulement de point d'arrêt est universel, c'est aussi une solution exacte de Navier Stokes...

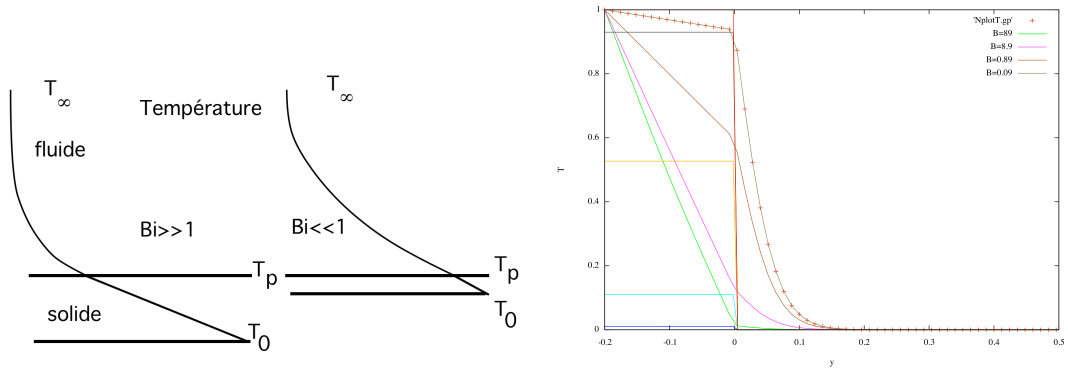


FIGURE 3 – Gauche un écoulement avec un grand nombre de Biot va imposer sa température à la paroi $T_p \simeq T_\infty$, en revanche un écoulement avec un échange faible et donc un Biot petit, va être tel que la température varie peu dans le solide, la température dans le fluide près de la paroi sera presque T_0 car $T_p \simeq T_0$. Droite calcul avec `FreeFem++` du calcul couplé complet, pour différents Biot (0.089 0.89 8.9 et 89 de haut en bas) on retrouve bien la solution analytique

Biblio : Schlichting "Boundary Layer Theory" Mc Graw Hill 1979
Guyon Hulin & Petit "Hydrodynamique Physique" InterÉdition 1991
Darrozès & François "Mécanique des fluides incompressibles (cours ENSTA)" Springer Verlag
Landau & Lifshitz "Mécanique des fluides" MIR
Cousteix "Couche limite laminaire" ed Cepadues 1988
Comolet "Mécanique des fluides II" Masson