

Refroidissement d'un mur

Refroidissement d'un mur.

Soit un mur infini de caractéristiques physiques constantes (c_p, ρ, k) d'épaisseur $2L$, initialement à la température T_0 , au temps $t > 0$ on impose à ses bornes une température constante T_{ext} . Nous nous proposons de résoudre analytiquement ce problème très simple, qui est aussi nommé "problème de la trempe" (ou "réponse à un échelon de température").

1. Écrire l'équation de la chaleur et ses conditions aux limites. Adimensionner et résoudre par séparation des variables.
- 2.1. On étudie maintenant les temps courts, on pose $\tilde{t} = \bar{t}/\varepsilon$. Montrer que le problème devient singulier et en déduire qu'il faut introduire une couche limite d'épaisseur en espace $\varepsilon^{1/2}$. Poser le système complet.
- 2.2. Montrer que l'on peut trouver une solution semblable, résoudre.
3. Reprendre l'étude du 1. en supposant cette fois que les deux bords sont entourés par un fluide modélisé par un coefficient d'échange h .
4. Montrer que la limite de la solution 1. aux temps petits et près de la frontière est bien la solution dégagée en 2.

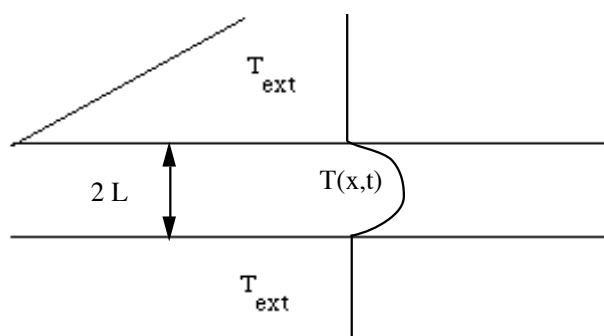


FIGURE 1 – Refroidissement impulsif d'un mur infini

Correction PC1 Refroidissement d'un mur

1. Le problème à résoudre est l'équation de la chaleur avec sa condition initiale et ses conditions aux bornes :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \text{ à } t = 0 \text{ on a } T(x, t = 0) = T_0 \text{ et pour } t > 0 \text{ on a } T(x = \pm L, t) = T_{ext}.$$

Posons $t = \tau \bar{t}$ (τ est inconnu) et $x = L\bar{x}$, (L est donné par la géométrie) et $T = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})\bar{T}$ (cette forme pour T est raisonnable puisque la température va varier de T_0 à T_{ext}). En fait le mur n'est pas infini, il est de hauteur h et de largeur ℓ , bien entendu pour que le mur paraisse infini il faut que $h \gg L$ et $\ell \gg L$. La jauge de temps pertinente est obtenue par adimensionnement et moindre dégénérescence, on voit de manière simple : $\tau = L^2/a$ avec $a = k/\rho c_p$ ne dépend que du matériau. Le problème sans dimension est donc :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} \right) \text{ avec } \bar{T} = 1 \text{ en } \bar{t} = 0 \text{ et } \bar{T} = 0 \text{ en } \bar{t} > 0 \text{ et } \bar{x} = \pm 1.$$

On cherche la solution sous forme de variables séparées $\bar{T}_k = f(\bar{t})g(\bar{x})$. On obtient très simplement des fonctions trigonométriques en espace (c'est en fait une série de Fourier que l'on construit) et des exponentielles en temps :

$$T_k = \exp(-k^2 \bar{t}) \cos(k\bar{x} + \phi_k),$$

par symétrie par rapport au centre du milieu étudié la phase est nulle. La condition de bord s'écrit : $\cos(k) = 0$ de solution $k_i = (2i - 1)\pi/2$. k_i les valeurs propres croissantes avec i , la température s'écrit sous forme d'une somme de ces solutions élémentaires :

$$\sum_{i>0} A_i \exp(-k_i^2 \bar{t}) \cos(k_i \bar{x})$$

Compte tenu de la condition initiale en temps $1 = \sum_{i>0} A_i \cos(k_i \bar{x})$, par les propriétés de l'analyse de Fourier (et remarquant la périodicité totale de la fonction qui est en fait 1 pour $-1 < x < 1$ et -1 pour $1 < x < 2$:

$$\int_{-1}^1 \cos(k_i \bar{x}) \cos(k_j \bar{x}) d\bar{x} = \delta_{ij} \text{ et } \int_{-1}^1 \cos(k_i \bar{x}) d\bar{x} = \frac{4(-1)^{i+1}}{\pi(2i - 1)}$$

les A_i s'écrivent :

$$A_i = \frac{4(-1)^{i+1}}{\pi(2i - 1)}$$

Avec 10 modes (cf figure 2), au temps $t=0$, on retrouve à peu près la distribution uniforme (même si on met beaucoup plus de modes, on a toujours de petites oscillations...). On obtient au final

$$\bar{T} = \frac{4}{\pi} \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{2n - 1} \exp(-(2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} \bar{t}) \cos((2n - 1)\pi \frac{\bar{x}}{2}).$$

2. Examinons l'équation de la chaleur aux temps courts en posant : $\tilde{t} = \bar{t}/\varepsilon$, l'edp devient $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{t}} = \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2}$. Donc aux temps petits, cette edp se réduit à $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tilde{t}} = 0$, compte tenu de la condition initiale ($\bar{T} = 1$) on en déduit que $\bar{T} = 1$ tout le temps. La température reste constante dans le mur. Or près de la paroi en $\bar{x} = -1$, on a $\bar{T} = 0$, la température de trempe. On a une solution discontinue (cf la couche limite

dynamique : la vitesse glisse sur la paroi est l'équivalent du saut de température que l'on constate ici). Ce n'est donc pas possible (on a trop de conditions aux limites, le problème est singulier) :

il faut introduire une couche fine près de la paroi extérieure (en $x = \pm 1$).

On pose $\bar{x} = -1 + \varepsilon_x \tilde{x}$, Ce qui se passe en $+1$ est bien trop loin pour avoir une influence quelconque. On pourra aussi étudier ensuite le voisinage de $+1$, le comportement sera le même par symétrie. On travaille toujours avec le même dimensionnement pour la ture : $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t}) = (T - T_{ext}) / (T_0 - T_{ext})$. D'où par substitution dans l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \varepsilon \varepsilon_x^{-2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} \text{ par moindre dégénérescence } \varepsilon_x = \sqrt{\varepsilon} \text{ et donc } \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2}.$$

Ce problème est écrit dans des variables amplifiées au voisinage de -1 . Le problème à résoudre est tel que $\tilde{T}(\tilde{x} = 0, \tilde{t}) = 0$ (c'est la condition que l'on a repêché) et il faut tenir compte du raccord asymptotique : la limite pour $\tilde{T}(\bar{x}, \tilde{t})$ lorsque \bar{x} tend vers -1 par valeurs supérieures est égale à la limite de $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t})$ lorsque \tilde{x} tend vers l'infini : *i.e.* $\tilde{T}(\bar{x} \rightarrow -1^+, \tilde{t}) = \tilde{T}(\tilde{x} \rightarrow \infty, \tilde{t})$

Problème final : $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2}$, avec les conditions $\tilde{T}(\tilde{x} = 0, \tilde{t}) = 0$, $\tilde{T}(\tilde{x}, 0) = 1$ et $\tilde{T}(\infty, \tilde{t}) = 1$.

Solution semblable (*self similar / Selbstähnlich*) : on cherche par dilatations des variables de manière à rendre l'équation différentielle et ses conditions aux limites invariantes par un groupe particulier de dilatations : $\tilde{x} = \hat{x}x^*$, $\tilde{t} = \hat{t}t^*$, $\tilde{T} = \hat{T}T^*$. donc $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = (t^* x^{*-2}) \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2}$, $\hat{T}(\hat{x} = 0, \hat{t}) = 0$, $\hat{T}(\hat{x}, 0) = 1$, pour que le problème "chapeau" soit invariant, nous devons choisir $x^{*2} = t^*$ et $T^* = 1$.

La solution est une fonction implicite des trois variables :

$$F(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{T}) = 0 \text{ équivaut à } \tilde{T} = f(\tilde{t}, \tilde{x}),$$

par l'invariance on écrit : $F(\hat{t}t^*, \hat{x}x^*, \hat{T}T^*) = 0$ ou encore

$$F(\hat{t}t^*, \hat{x}t^{*1/2}, \hat{T}) = 0.$$

Ce que l'on peut reformuler en faisant disparaître t^* du maximum d'arguments :

$$F_2(\hat{t}t^*, \hat{x}t^{*-1/2}, \hat{T}) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout t^* , cet argument n'intervient pas, la solution est donc de la forme : $\hat{T} = \theta(\eta)$ avec $\eta = \hat{x}\hat{t}^{-1/2}$. Substituons cette variable dans l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} = \theta'(-1/2)\eta/\hat{x} = \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} = \theta'' \hat{x}^{-1},$$

soit le problème final :

$$(-\eta/2) = \theta''/\theta', \quad \theta(0) = 0 \text{ et } \theta(\infty) = 1.$$

En général on résout numériquement, mais ici on peut continuer le calcul : $\text{Log}(\theta') = -\eta^2/4$ compte tenu des conditions aux limites :

$$\theta(\eta) = \frac{\int_0^{\eta/2} \exp(-\xi^2) d\xi}{\int_0^\infty \exp(-\xi^2) d\xi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta/2} \exp(-\xi^2) d\xi$$

car il est bien connu que $\int_0^\infty \exp(-\xi^2) d\xi = \sqrt{\pi}/2$.

Rappel, la fonction erreur, et la fonction erreur complémentaire sont définies par :

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \quad \text{et} \quad erfc(x) = 1 - erf(x).$$

elle permet d'écrire la température sous la forme :

$$\theta(\eta) = erf(\eta/2)$$

On a pour $erfc(\eta)$ une fonction qui décroît de 1 à 0 (figure 4) :

On trouve ainsi le flux avec $(\frac{\partial}{\partial \eta} \theta) = \pi^{-1/2}/(\exp(-\eta^2/4))$ à la paroi en 0 : $(\frac{\partial}{\partial \eta} \theta)|_0 = 0.56$. Traçons $erf(\frac{x}{\sqrt{t}})$ à différents t , le flux à la paroi en fonction du temps est $\pi^{-1/2}t^{-1/2}$, il diminue au fur et à mesure du refroidissement (figure 5).

Remarque, si on joue bien avec les variables de similitude on trouve comme ici $\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$, qui donne : $\eta\theta' + 2\theta'' = 0$. Si par malchance on choisit $\eta = x^2/t$ on trouve : $-2\theta' - \eta\theta' - 4\eta\theta'' = 0$ La solution en est bien entendu $\theta = erf((\sqrt{\eta})/2)$, mais elle n'est pas simple à voir ! Il n'y a pas de règle précise pour le choix de la bonne variable. De toutes façons, il faut à la fin résoudre une équation différentielle (les cas de solutions exactes, comme ici sont rarissimes).

3. Voir le poly §2.7

remarque, dans ce cas la solution $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial T}{\partial x} = BiT$ est au temps courts n'est plus autosemblable

$$T = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \exp(Bix + Bi^2t)erfc\left(\frac{x^2}{2\sqrt{t}} + Bi\sqrt{t}\right).$$

4. Observons ce qui se passe pour les temps courts et les petites distances dans la solution complète : posons $\bar{x} = -1 + \varepsilon\hat{x}$ et $\bar{t} = \varepsilon^2\hat{t}$ et développons \bar{T} à ε petit (n fixé) :

• $\cos((2n-1)\pi\bar{x}/2) = 0 + \sin((2n-1)\pi/2) \sin((2n-1)\pi\varepsilon\hat{x}/2) = (-1)^n \sin((2n-1)\pi\varepsilon\hat{x}/2) = (-1)^n \sin(k_n\hat{x})$

• $\exp(-(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}\bar{t}) = \exp(-(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}\varepsilon^2\hat{t}) = \exp(-k_n^2\hat{t})$

on a posé $k_n = (2n-1)\varepsilon\pi/2$ et comme $k_{n+1} - k_n = \pi\varepsilon$

$$\bar{T} = \frac{2}{\pi} \sum_{n>0} \exp(-k_n^2\hat{t}) \sin(k_n\hat{x})(k_{n+1} - k_n)k_n$$

La définition de l'intégrale de Rieman, en posant $n_{max} = (k_{max}/\pi/\varepsilon + 1)/2$ (avec $k_{max} \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$ et $n_{max} \gg 1$) permet d'identifier :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{k_{max}} \exp(-k^2\hat{t}) \sin(k\hat{x}) dk/k = \sum_{n=0}^{n=n_{max}} \exp(-k_n^2\hat{t}) \sin(k_n\hat{x})(k_{n+1} - k_n)/k_n$$

on fait tendre ε vers 0 : $\bar{T} \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-k^2\hat{t}) \sin(k\hat{x}) dk/k$ or $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-k^2\hat{t}) \sin(k\hat{x}) dk/k = \int_0^{\eta/2} \exp(-\xi^2) d\xi$
Pour démontrer cette dernière égalité, il faut beaucoup d'astuce... il faut remarquer d'une part que :

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_0^\infty \exp(-a^2k^2) \sin(2bk)k^{-1} dk = 2 \int_0^\infty \exp(-a^2k^2) \cos(2bk) dk = \int_{-\infty}^\infty \exp(-a^2k^2) \cos(2bk) dk$$

puis intégrer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 k^2) \cos(2bk) dk = \int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 + 2ibk) dk = \int_{-\infty}^{\infty} a^{-1} \exp(-a^2(k - ib/a^2)^2 - b^2/a^2) a dk = \sqrt{\pi} a^{-1} \exp(-b^2/a^2) \text{ car il est bien connu que } \int_0^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ . cqfd}$$

On trace ici $erf(\eta/2)$ et $\bar{T}(-1 + \eta\sqrt{t}, t)$ fonctions de η pour différents t sur la figure 6. La courbe erreur $erf(\eta/2)$ et la solution $\bar{T}(-1 + \eta\sqrt{0.05}, 0.05)$ sont confondues.

Conclusion :

aux temps très courts, il faut mieux vaut utiliser erf (les modes de Fourier s'ajoutent mal), ensuite, aux temps intermédiaires on écrit le développement complet (en pratique les premiers termes). Aux temps longs : on ne garde que le premier terme de la série (à chacun d'adapter son critère de passage d'une solution à l'autre en fonction de la précision voulue).

Remarquons que l'on vient de jongler entre les séries de Fourier et la transformée de Fourier. Les exercices de conduction thermique pure se résolvent par de telles décompositions. On utilise souvent aussi la transformation de Laplace. On obtient donc une grande variété de solutions "exactes" sous formes de séries trigonométriques, ou hyperbolique ou de fonctions de Bessel (à ce propos on peut refaire la même PC en axisymétrique, avec un cylindre infini de rayon L) voire d'autres fonctions orthogonales... Ces solutions nécessitant une certaine gymnastique mathématique, on a tendance à les oublier et à résoudre numériquement directement les équations...

Le fait que la solution erf soit une solution aux temps et distances courts est appelé "intermediate asymptotics" par G.I. Barenblatt (dans le livre "Scaling, selfsimilarity, and intermediate asymptotics"). Le fait que cette solution soit le développement de la solution complète traduit le fait que la solution de similitude est de "première espèce" (Barenblatt).

Pour aller plus loin, on peut résoudre le cas où le flux est donné, par les solutions semblables on obtient que T est de la forme $\sqrt{t}f(x/\sqrt{t})$, on obtient alors l'équation du second ordre pour f ...

$$f - \eta f' - 2f'' = 0, \quad f'(0) = 1, f(\infty) = 0,$$

qui à mes yeux, ne s'intègre pas à vue, pourtant la solution est simple! En effet l'astuce est de remarquer que $\partial T/\partial x$ vérifie l'équation de la chaleur : $(\partial_t - \partial_{x^2})(\partial_x T) = 0$, avec $\partial_x T = 0$ en $t = 0$ et $\partial_x T = 1$ en $x = \pm 1$. Donc $\partial_x T = Erfc(x/2/\sqrt{t})!!!$,

$$T = 2\left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{t}\right) - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

Le dernier cas à résoudre est celui où on se donne une condition mixte (avec un coefficient d'échange) : $(\partial_t - \partial_{x^2})T = 0$, avec $T = 1$ en $t = 0$ et $BiT \pm \partial_x T = 1$ en $x = \pm 1$. La solution dimensionnée s'écrit alors : $(T - T_{ext})/(T_0 - T_{ext}) = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)$. On remarque que le fait d'introduire le coefficient d'échange "casse" la similitude. Pour obtenir la solution précédente, il faut utiliser la méthode de transformation de Laplace...

On retiendra :

- la méthode de séparation des variables.
- la méthode de développements asymptotiques raccordés.
- la méthode de recherche de solutions semblables.
- l'existence de la fonction erreur.

Pour jouer un peu avec l'équation de la chaleur, tester l'appliquette Java http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SOURCES/Appiquette-JavaChal/guiChalomega_v_implicite/index.html, on trace la distribution de température le long d'une barre, y faire varier les coefficients k , les conditions aux limites...

tester aussi le code FreeFem++ <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/ENSTA/HTMLPC/PC1/FF++/index.html>

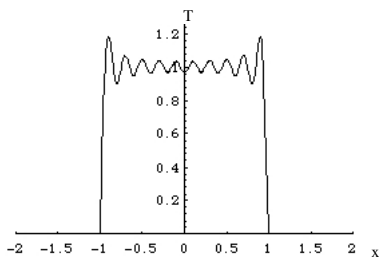


FIGURE 2 – 10 modes pour reconstruire "1".

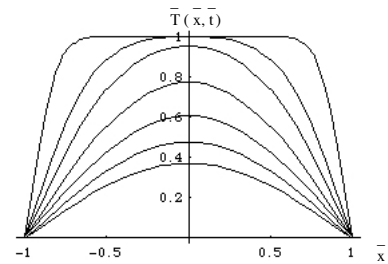


FIGURE 3 – $\bar{T}(\bar{x}, \bar{t})$ pour $\bar{t} = 0.01 0.05 0.1 0.2 0.3 0.4$ et 0.5 (avec 20 modes).

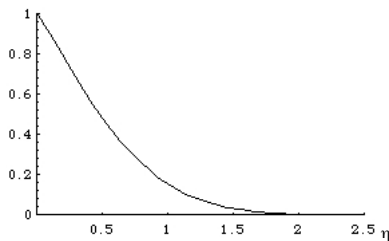


FIGURE 4 – Tracé de la fonction $erfc(\eta)$.

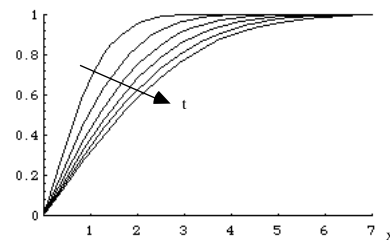


FIGURE 5 – Tracé de $\bar{T}(\bar{x}, \bar{t}) = erf(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{\bar{t}}})$ pour $\bar{t} = 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5$ et 3.0

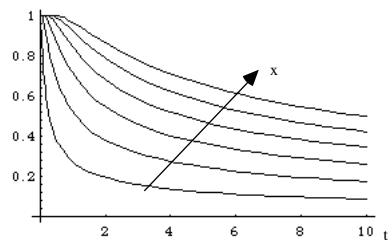


FIGURE 6 – Tracé de $\bar{T}(\bar{x}, \bar{t}) = erf(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{\bar{t}}})$ pour $\bar{x} = 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5$ et 3.0

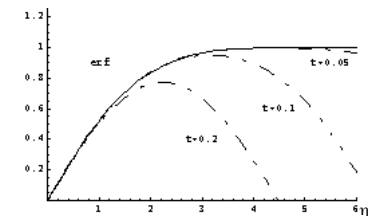


FIGURE 7 – Tracé de $erf(\eta/2)$ et $\bar{T}(-1 + \eta\sqrt{\bar{t}}, \bar{t})$ pour $\bar{t} = 0.05 0.1$ et 0.2 (20 modes).