

## Transferts Thermiques dans les Fluides

MF 204

durée 2 heures, tout document personnel autorisé

### Convection Mixte en Magnéto Hydro Dynamique au voisinage d'un point d'arrêt.

L'objet de ce problème est l'étude (simplifiée) d'un écoulement MHD (Magnéto Hydro Dynamique). Ces écoulements sont caractérisés par un couplage entre l'hydrodynamique et le champ Electromagnétique. L'ensemble est assez compliqué, mais possède de nombreuses applications par exemple :

- l'effet Dynamo (création du champ Magnétique terrestre par les mouvements de convection de magma conducteur dans la terre)
- dans les étoiles en général, les champs sont couplés, les éruptions solaires sont un exemple spectaculaire d'écoulement MHD
- le futur ITER utilise un confinement magnétique de l'écoulement pour atteindre la fusion.
- certains ont pensé à faire un bouclier MHD pour la rentrée dans l'atmosphère (ce qui expliquerait le vol des Soucoupes Volantes ;-)
- plus pratiquement, la MHD est utilisée quotidiennement dans l'industrie de l'Aluminium où le métal liquide est mis en mouvement par un champ magnétique (on conçoit qu'il y a des effets de chauffage importants pour créer le métal liquide mais aussi pour créer et entretenir le champ magnétique, il faut refroidir les aimants *etc*).

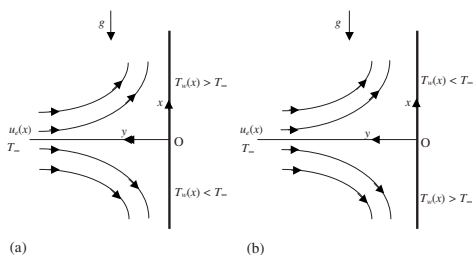


Fig. 1 Physical model and coordinate system for (a) assisting flow and (b) opposing flow

Dans ce problème on va étudier l'écoulement de point d'arrêt 2D plan (on sait que la vitesse de fluide parfait varie linéairement en  $x$  à la paroi) d'un écoulement que l'on supposera incompressible en première approximation. La température  $T_w(x)$  est asservie de manière à ce qu'elle varie aussi linéairement en  $x$  : on écrira donc  $T_w(x) = T_\infty + (\Delta T) \frac{x}{L}$ . Un effet de dilatabilité sera quand même introduit. De même le champ magnétique varie linéairement en ce point :  $\vec{B}_e = \frac{x B_0}{L} \vec{e}_x$ . Bien entendu, dans la réalité des configuration industrielles tout n'est pas aussi simple. Les simplifications introduites ne sont là que pour pouvoir terminer le calcul à la main.

Il n'y a pas besoin de connaissances spéciales en Electrodynamique pour résoudre ce problème. Les questions sont assez indépendantes pour sauter certaines parties.

On rappelle les équations de Maxwell sans charges fixes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

avec la densité de courant  $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ . On note  $\sigma$  la conductivité du milieu (supposée constante), on rappelle que  $\epsilon_0 \mu_0 c_0^2 = 1$ , où  $c_0$  est la vitesse de la lumière et  $\mu_0$  la perméabilité du vide qui ne doit pas être confondue avec  $\mu$  la viscosité dynamique.

On se donne une échelle caractéristique  $L$  et la vitesse est mesurée avec  $U_0$ , les temps seront mesurés avec  $L/U_0$ . Les champs seront mesurés avec  $B_0$ .

On commence par faire un peu d'électromagnétisme pour établir une EDP qui ressemble à un transport avec diffusion. Ensuite on écrira Navier Stokes avec la force de Lorentz. On écrira ensuite l'équation de la chaleur. On termine par la solution autosemblable.

1.1 En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère et en éliminant le champ  $\vec{E}$ , montrer que l'on arrive pour le champ  $\vec{B}$  à une équation avec à la fois le Laplacien  $\vec{\nabla}^2 \vec{B}$ , les dérivées temporelles  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$  et  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$  et une somme de produits de  $\vec{B}$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{\nabla}$ .

1.2 Adimensionnez cette équation et faites apparaître le nombre de Reynolds Magnétique :

$R_m = \mu_0 \sigma U_0 L$  et le nombre de Prandtl magnétique.

1.3 Pour quelle raison peut on négliger  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$  ?

1.4 On a donc au final une "équation de la chaleur" vectorielle (identifiez  $K$ ) avec un terme source :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} = K \vec{\nabla}^2 \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}.$$

2.1 La densité de force de Lorentz s'écrit  $\vec{j} \times \vec{B}$ , elle s'introduit comme une force dans le terme source de Navier Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tau + \rho \vec{g}$$

Quelle est l'expression du tenseur des contraintes visqueuses  $\tau$  pour un fluide Newtonien incompressible ?

2.2 On supposera le fluide faiblement dilatable. Rappelez l'hypothèse de Boussinesq et sa conséquence sur la compressibilité et la force volumique. On note que la convection est mixte (naturelle + convection forcée). Un écoulement sera dit favorisé si la température augmente avec  $x$ , freiné sinon (voir figure 1)

2.3 Comme on a vu que  $\vec{\nabla} \times \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}$ , écrire l'expression de la force de Lorentz avec  $\vec{B}$  et ses dérivées spatiales uniquement. Comment peut on interpréter le terme  $B^2/2/\mu_0$  qui est dans un gradient ?

2.4 Adimensionnez les équations de Navier Stokes et faites apparaître le nombre de Reynolds,  $Re$  et le nombre de Hartmann,  $M = \frac{B_0^2}{\rho \mu_0 U_0^2}$

3.1 L'équation de l'énergie va maintenant contenir l'énergie Electromagnétique, on rappelle que l'énergie volumique magnétique est  $e_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ . Sachant que le nombre de Hartmann est d'ordre 1, sachant que le nombre d'Eckert est petit, montrer que  $e_m/(\rho c_p \Delta T)$  est petit.

3.2 Une alternative consiste à vérifier que l'échauffement par effet Joule  $j^2/\sigma$  est lui même petit par rapport aux variation d'énergie interne  $\rho c_p \Delta T$ .

3.3 L'équation de la chaleur s'écrit au final :

$$\frac{dT}{dt} = K \overline{\nabla}^2 T$$

identifiez  $K$ , et nommez les coefficients qui le constituent, quelles sont toutes les hypothèses qui permettent d'écrire cette équation ?

3.4 Ecrire le système complet d'équations dynamiques, thermique et magnétique pour le problème. Les conditions pour le champ sont  $B_1 \rightarrow B_0 x/L$  à l'infini et  $\partial B_1/\partial y = B_2 = 0$  à la paroi.

4.1 On rappelle qu'en fluide parfait l'écoulement de fluide parfait de point d'arrêt est de la forme  $\bar{u} = \bar{x}$  et  $\bar{v} = -\bar{y}$ . Montrer que  $U_0/L$  est le vrai paramètre pertinent pour adimensionner la vitesse.

4.2 Près de la paroi, il va se produire une couche limite d'épaisseur d'échelle  $\delta$  telle que  $\delta/L \ll 1$ . La vitesse transverse sera d'échelle  $V_0$  telle  $V_0 \ll U_0$ .

4.3 Exprimez, à partir de l'incompressibilité,  $V_0$  en fonction de  $\delta$ ,  $L$  et  $U_0$ .

4.4 En déduire que près de la paroi comme le champ  $B$  s'écrit en fait (avec  $\tilde{B}_1$  et  $\tilde{B}_2$ ) sans dimension :  $\vec{B} = B_0 \tilde{B}_1 \vec{e}_x + b \tilde{B}_2 \vec{e}_y$  exprimer  $b$  en fonction de  $B_0$  et des échelles d'espace.

4.5 Adimensionnez l'équation dynamique.

4.6 Exprimer  $\delta$  en fonction de  $Re$  et  $L$  en justifiant la démarche.

4.7 En déduire que le système d'équations en variables de couche limite s'écrit en stationnaire :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \text{ et } \frac{\partial \tilde{B}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{B}_2}{\partial \tilde{y}} = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= \tilde{u}_e \frac{d\tilde{u}_e}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + M(\tilde{B}_1 \frac{\partial \tilde{B}_1}{\partial \tilde{x}} + \tilde{B}_2 \frac{\partial \tilde{B}_1}{\partial \tilde{y}}) - M \tilde{B}_e \frac{\partial \tilde{B}_e}{\partial \tilde{x}} + \lambda \tilde{T} \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{B}_1}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{B}_1}{\partial \tilde{y}} - (\tilde{B}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{B}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}) &= \frac{1}{Pr_m} \frac{\partial^2 \tilde{B}_1}{\partial \tilde{y}^2} \text{ et } \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \end{aligned}$$

Identifiez  $Pr$ ,  $Pr_m$  et  $\lambda$  (on écrira ce dernier en fonction du Reynolds et du Grashof).

5.1 On se donne le système précédent, montrer rapidement que  $\eta = \tilde{y}$  est variable de similitude.

5.2 On pose  $\tilde{u} = \tilde{x} f'(\eta)$ , écrire  $\tilde{v}$  en fonction de  $f$ .

5.3 De même on pose  $\tilde{B}_1 = \tilde{x} h'(\eta)$ , écrire  $\tilde{B}_2$  en fonction de  $h$  et  $\eta$ .

5.4 Montrer que la température est de la forme  $\theta(\eta)$ .

5.5 En déduire le système autosemblable complet portant sur  $f$ ,  $h$  et  $\theta$ , leurs dérivées et  $M$  et  $\lambda$ .

5.6 Sur les figures 2, à 7 on représente la solution numérique du problème autosemblable. Discuter ces courbes : par exemple, l'influence du  $Pr$  est elle cohérente, que pensez vous du surcroît de vitesse sur la figure 2, etc.

### Formulaire :

On rappelle que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

et que :

$$\frac{1}{2} \nabla (\vec{B} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

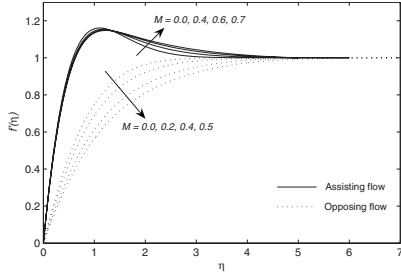


Fig. 2 Velocity profiles when  $Pr=0.7$  for fixed  $\lambda=4$  (assisting flow) and  $\lambda=-0.2$  (opposing flow)

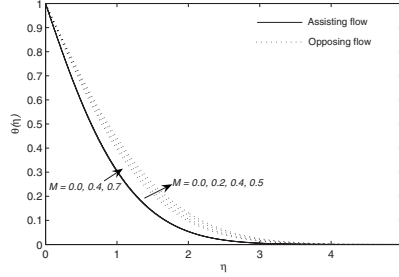


Fig. 3 Temperature profiles when  $Pr=0.7$  for fixed  $\lambda=4$  (assisting flow) and  $\lambda=-0.2$  (opposing flow)

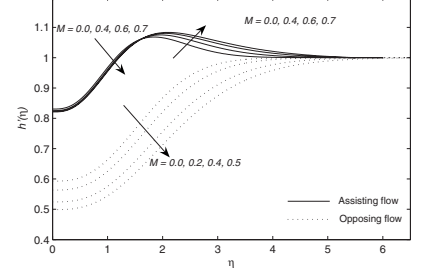


Fig. 4 Induced magnetic field profiles when  $Pr=0.7$  for fixed  $\lambda=4$  (assisting flow) and  $\lambda=-0.2$  (opposing flow)

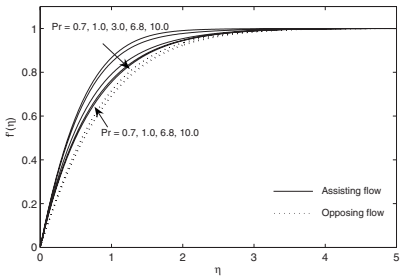


Fig. 5 Velocity profiles when  $M=0.2$  for fixed  $\lambda=1$  (assisting flow) and  $\lambda=-0.2$  (opposing flow)

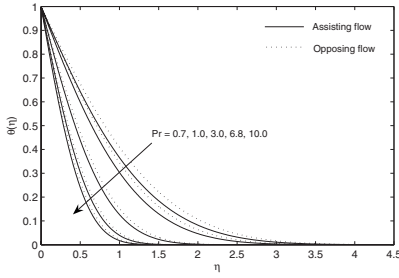


Fig. 6 Temperature profiles when  $M=0.2$  for fixed  $\lambda=1$  (assisting flow) and  $\lambda=-0.2$  (opposing flow)

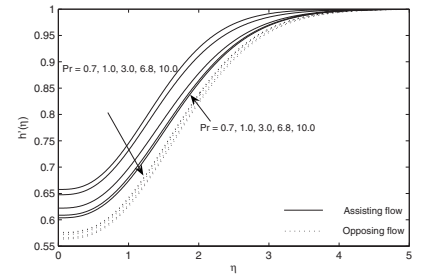


Fig. 7 Induced magnetic field profiles when  $M=0.2$  for fixed  $\lambda=1$  (assisting flow) and  $\lambda=-0.2$  (opposing flow)

Profils de vitesse (Fig 2), profils de température (Fig 3) et champ induit (Fig 4.) à  $Pr = 0.7$  à  $\lambda = 4$  fixé (écoulement mixte favorable) et  $\lambda = -0.2$  fixé (écoulement mixte freiné), le  $M$  varie. *idem* pour Fig 5. Fig 6. et Fig 7 mais à  $M = 0.2$  et  $\lambda = 1$  fixés, le  $Pr$  varie.

## Bibliographie

- On consultera Wikipedia : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Magnétohydrodynamique>  
 F. M. Ali, R. Nazar & N. M. Arifin (2011) "MHD Mixed Convection Boundary Layer Flow Toward a Stagnation Point on a Vertical Surface With Induced Magnetic Field", J. Heat Transfer – February 2011 – Volume 133, Issue 2,  
 John David Jackson "Classical electrodynamics" Wiley, 1975 - 848 pages (chapitre 10)  
 R. Moreau (1990) "Magnetohydrodynamics", Kluwer Academic Publishers, 313 p.  
 Pour se détendre après la Pale : Le Mur du Silence J-P Petit Belin (1986)

## MHD

1.  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu_0 \sigma \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E},$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu_0 \sigma ((\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B},$$

1.2  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 \sigma U_0 L} \vec{\nabla}^2 \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \frac{U_0^2}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B},$  Le Prandtl Magnétique sera donc  $\mu_0 \sigma / \nu$

1.3 le fluide n'est pas relativiste.

2.1 au final  $\vec{\nabla} \cdot \tau = -\vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u}$

2.3 La force de Lorentz est donc  $\frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$ , c'est à dire  $\frac{1}{\mu_0} (-\frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{B} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B})$  On

a un terme  $-\vec{\nabla} (\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2\mu_0})$  qui joue avec le gradient de pression  $-\vec{\nabla} p$ , donc  $(\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2\mu_0})$  est une pression magnétique.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} (\bar{p} + M\bar{B}^2) + M\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \lambda \bar{T} \vec{e}_y$$

3. la densité d'énergie  $e_m/\rho$  se mesure avec  $MU_0^2$  donc comme  $E = U_0^2/(c_p \Delta T)$ , la densité d'énergie se mesure avec  $MEc_p \Delta T$ . Or  $E$  est petit.

4.2 et 4.4 on a  $V_0 = (\delta/L)U_0$  et de même  $b = (\delta/L)B_0$