Vendredi 10 mars 2006

Transferts Thermiques dans les Fluides

MF 204

durée 2 heures, tout document personnel autorisé

Etude de la convection libre verticale dans une cavité

Il s'agit d'étudier un problème de convection naturelle dans une cavité carrée d'un fluide initialement au repos à la température T_0. Le mur vertical de droite est chauffé à la température $T_c > T_0$, le mur de gauche est refroidi à la température $T_f < T_0$. Les températures sont telles que $T_0 = \frac{T_f + T_c}{2}$. Les deux parois du haut et du bas sont isolées : elles sont adiabatiques. Soit L le côté du carré.

L'axe des x est dirigé vers le haut, la paroi chaude de droite est en $y = 0$, voir la figure 1 (la chaude est en $y = L$). Le problème est 2D plan pour simplifier.

On suppose les coefficients thermodynamiques constants. On note α le coefficient de dilatation volumique. On supposera que l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr}(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \tag{1}$$

Equations complètes

1.1 On fait l'approximation de de Boussinesq pour la densité du fluide. Ecrire le système d'équations dynamiques pour la vitesse notée u et v.
1.2 Ecrire les conditions au limites et les conditions initiales pour la vitesse.
1.3 Ecrire l'équation de la chaleur, quelles hypothèses a-t-on faites pour l'écrire ainsi (1) ?
1.4 Ecrire les conditions au limites et les conditions initiales pour la température.

Cas où α est négligeable, pas de mouvement, conduction pure.

On commence par regarder ce qui se passe si on néglige la variation de la densité avec la température. On est donc en régime de conduction pure, $u = v = 0$.
2.1 Ecrire l'équation de la chaleur adimensionnée avec

$$T = T_0 + (T_c - T_0)\bar{T}, \quad x = L\bar{x}, \quad y = L\bar{y}, \quad t = \tau\bar{t} \tag{2}$$

et les conditions associées, identifier τ.
2.2 Montrer que l'existence des parois adiabatiques permet de chercher une solution qui ne dépend que de $\bar{y}$ et $\bar{t}$.
2.3 Sans aucune démonstration (résultats de la PC) donner la solution aux temps courts pour la

température au voisinage de la paroi chaude et de la paroi froide.
2.4 Quelle est la solution stationnaire (aux temps très longs) du problème.

Adimensionnement

En réalité, la solution stationnaire évoquée en 2.4 n'a pas le temps de s'établir car le terme de Boussinesq crée un mouvement le long des parois verticales. Le fluide tourne alors dans la cavité. On va écrire toutes les équations sous forme adimensionnée. Pour cela on pose encore :
$T = T_0 + (T_c - T_0)\bar{T}, \quad x = L\bar{x}, \quad y = L\bar{y}.$
3.1 Quel est le terme moteur dans les équations ? Dans quel sens va tourner le fluide ?
3.2 On ne connaît pas U_0 l'ordre de grandeur de la vitesse, estimez le à partir du terme moteur.
3.3 Montrez que le système final sans dimension est alors :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \bar{T} + \frac{1}{G}(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{G}(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}) \qquad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{G'}(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2})$$

3.4 Identifier G et G' en fonction des paramètres du problème.
3.5 Ecrire les conditions aux limites associées.
3.6 G est grand, pourquoi ?
3.7 Que se passe t 'il si l'on fait tendre G vers l'infini dans les équations ?

Couche pariétale

Après résolution numérique des équations (ou quand on fait l'expérience), on obtient une solution stationnaire. On constate que la température est stratifiée de haut en bas dans toute la partie centrale de la cavité (figure 2.), la vitesse y est nulle. La température est $\bar{T} = 2\bar{x}$ en première approximation dans la partie centrale. Le long des parois, une couche fine de fluide se déplace.

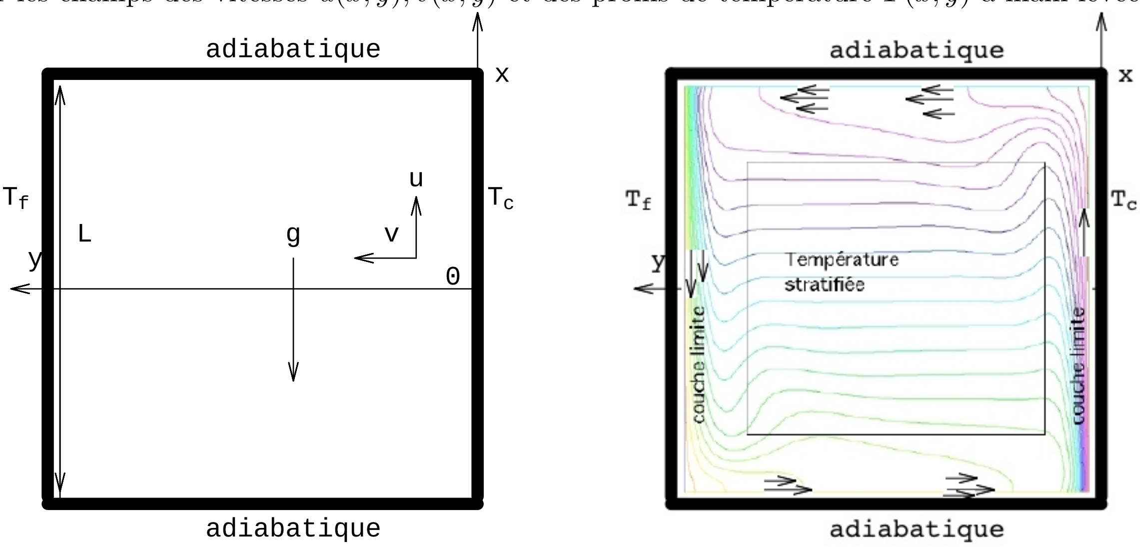
On va ici montrer que dans le cadre $G >> 1$, on peut trouver une solution aux équations de couche limite thermique approchée le long des parois verticales, mais assez loin des coins. En pratique on n'étudie que la paroi chaude ($\bar{y} = 0$).
4.1 On va poser $\varepsilon\tilde{y} = \bar{y}$, $\tilde{x} = \bar{x}$. Pourquoi ?
4.2 On pose $\tilde{T} = (2\tilde{x}) + \tilde{\theta}$, avec $\tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{y} = 0) = 1 - 2\tilde{x}$ et $\tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{y} = \infty) = 0$, pourquoi ?
4.3 Pourquoi prendre pour les échelles de vitesse $\bar{u} = \tilde{u}$ et $\bar{v} = \varepsilon\tilde{v}$?
4.4 Montrer que le système s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\theta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad 0 = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} \quad \tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

4.5 Justifiez de votre choix de ε.
4.6 Ecrire toutes les conditions aux limites.
4.7 Justifiez que l'on peut faire disparaître $\tilde{P}$ par un choix judicieux de la pression.

Solution approchée

On cherche une solution du système de couche limite sous une forme approchée. Loin des coins, on suppose que la vitesse se développe sous la forme d'une couche fine d'épaisseur constante, et qu'elle ne dépend pas de $\tilde{x}$.
On peut chercher une solution (approchée) sous la forme : $\tilde{u}(\tilde{y})$ et $\tilde{v} = 0$.
On suppose par ailleurs que $\tilde{\theta}$ n'est fonction que de $\tilde{y}$ et que $\tilde{\theta}(\tilde{y} = 0) = 1$. C'est là une très très grosse approximation, mais c'est juste au centre où $\tilde{x} = 0$.
5.1 Ecrire le système issu de la question 4.4 compte tenu de $\tilde{u}(\tilde{y})$, $\tilde{v} = 0$ et $\tilde{T} = (2\tilde{x}) + \tilde{\theta}(\tilde{y})$
5.2 En déduire le système pour $\tilde{\theta}$ et $\tilde{u}$ (entre autre que : $\frac{d\tilde{\theta}^4}{d\tilde{y}^4} + 2Pr\tilde{\theta} = 0$).
5.3 Quelles sont les conditions aux limites (compte tenu de la très forte approximation choisie pour $\tilde{\theta}(\tilde{y} = 0)$) pour résoudre ce problème ?
5.4 Montrer que $\tilde{\theta} = e^{-a\tilde{y}} cos(a\tilde{y})$ est solution (trouver a). En déduire l'expression de la vitesse $\tilde{u}(\tilde{y})$.
5.5 Tracer les champs $\tilde{\theta}$ et $\tilde{u}$ et discuter la solution.
5.6 Tracer les champs des vitesses $u(x, y), v(x, y)$ et des profils de température $T(x, y)$ à main levée.



Gauche : notations, l'axe x est vertical dirigé vers le haut. La paroi verticale de droite que l'on étudie plus particulièrement ($-L/2 < x < L/2$) est à la température T_c uniforme. La paroi de gauche est refroidie à la température T_f uniforme.
Droite : solution numérique du problème ($G = 1000$), iso températures. Au centre, la température est stratifiée verticalement, le fluide est immobile. Le fluide ne se déplace que le long des parois verticales et horizontales.

Bibliographie

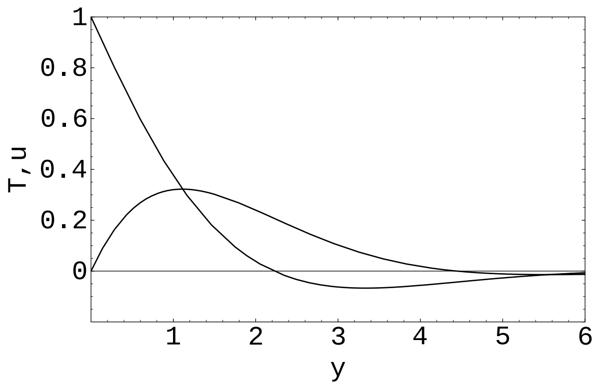
A. E. GILL, The boundary-layer regime for convection in a rectangular cavity, Journal of Fluid Mechanics, 26 (1966), pp. 515-536.

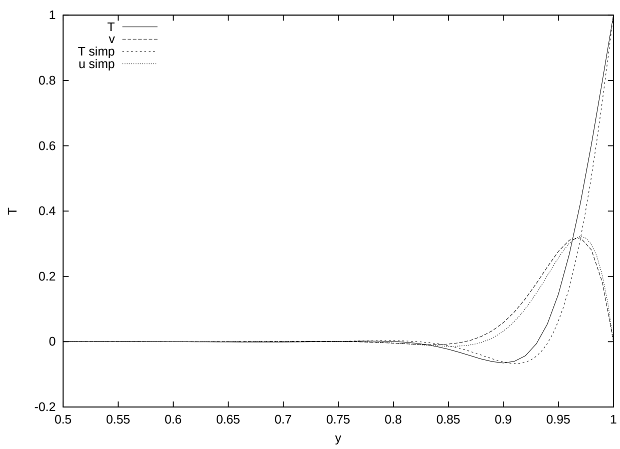
Etude de la convection libre verticale dans une cavité carrée : indications

1. cours.
2. Par définition de la température, $T = ((T_f + T_c)/2 + ((T_c - T_f)/2)\bar{T})$ et $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y} = 0) = 1$ à la paroi chaude, $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y} = 1) = -1$ à la paroi froide. Initialement $\bar{T} = 0$.
Pour la paroi chaude, pour les valeurs petites de $\bar{y}$ et telles que $\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}}$ est d'ordre un, la température s'écrit $\bar{T} = erfc(\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}})$. Près de la paroi froide, attention, on pose $\bar{Y} = 1 - \bar{y}$, pour les valeurs petites de $\bar{Y}$ et telles que $\frac{\bar{Y}}{\sqrt{\bar{t}}}$ est d'ordre un, la solution s'écrit $\bar{T} = -erfc(\frac{\bar{Y}}{\sqrt{\bar{t}}})$ (négatif !). Pour les temps longs, $\bar{T} = 1 - 2\bar{y}$.
3. Le terme moteur est bien entendu le terme de Boussinesq (dû à l'écart au nivellement barométrique) : $\alpha\rho_0 g\Delta T$. Le fluide chauffé monte le long de la paroi de droite, en haut, il reste à température quasi constante, il redescend à gauche car il est refroidi... Il tourne dans le sens trigonométrique.
Donc $U_0 = \sqrt{\alpha g L \Delta T}$. Le terme $G = \frac{U_0 L}{\nu} = \sqrt{\frac{\alpha g L^3 \Delta T}{\nu^2}}$, c'est la racine du Grashof. Dans G', il y a Pr. G est grand car la viscosité est faible.
4. On retrouve les équation de couche limite de convection naturelle. $\varepsilon = G^{-1/2} = Gr^{-1/4}$ par moindre dégénérescence.
5. compte tenu de l'approximation pour la température :

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 0 = -0 + \tilde{\theta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad 0 = -0 \quad 2\tilde{u} + 0 = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

D'où l'équation proposée. Les solutions sont en $exp(p\tilde{y})$ avec $p^4 = (i^2)2Pr$, donc $p = \pm(\sqrt{i})(2Pr)^{1/4}$ et $\sqrt{i} = \pm(1 + i)/\sqrt{2}$. Compte tenu des conditions aux limites :
$\tilde{u} = e^{-\tilde{y}(Pr/2)^{1/4}} sin(\tilde{y}(Pr/2)^{1/4})$ et $\tilde{\theta} = e^{-\tilde{y}(Pr/2)^{1/4}} cos(\tilde{y}(Pr/2)^{1/4})$





A gauche, tracé de la vitesse et de la température ($Pr = 1$) approchées dans la couche limite pariétale.
A droite, tracé de la vitesse et de la température calculés par simulation numérique directe ($Gr = 10^6$) des équations et superposition de l'approximation proposée.
http ://www.lmm.jussieu.fr/ lagree/COURS/ENSTA/web/CLib/thermiKVIT/index.html pour le tracé et code source FreeFEM++ pour la simulation.