9 février 04

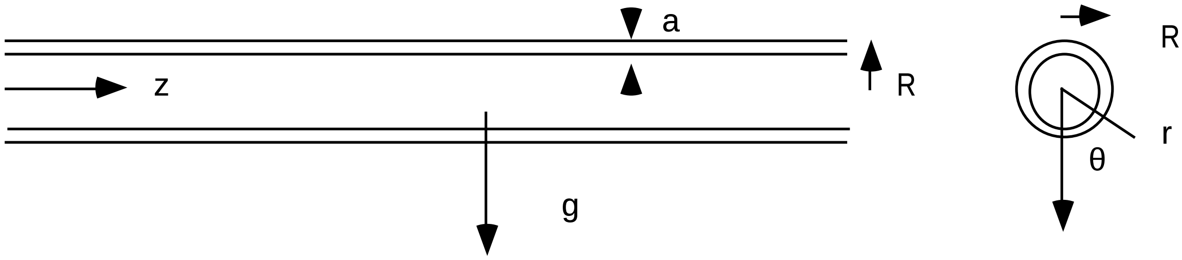
Transferts Thermiques dans les fluides.

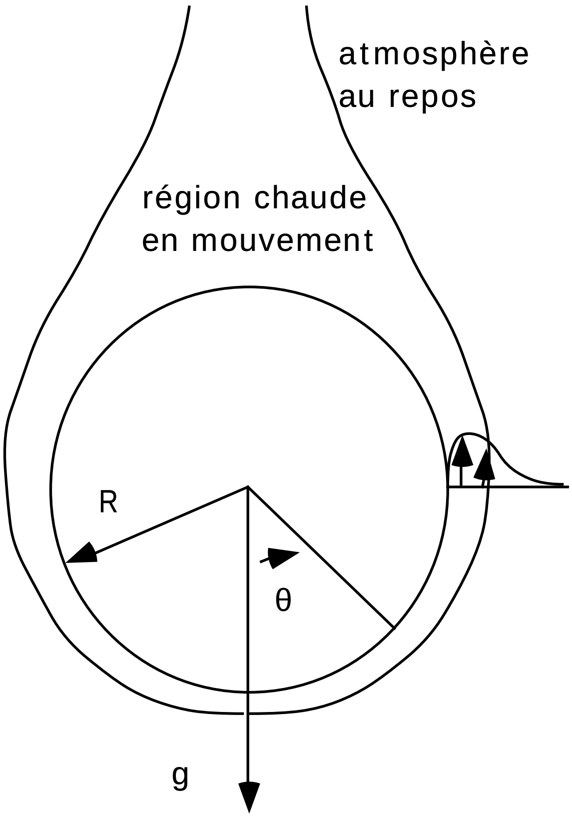
Cours **MFE202**

Refroidissement d'un pot d'échappement

Durée: 2 heures   Tout document personnel autorisé.

On veut étudier les transferts autour du pot d'échappement d'un véhicule. Le véhicule est à l'arrêt, le moteur tourne depuis assez longtemps pour qu'un régime stationnaire en temps soit obtenu (on a donc $\partial/\partial t=0$). On oublie le bas de caisse du véhicule. Le vent est nul.





Soit R le rayon extérieur du pot, a l'épaisseur de la paroi (a<<R), $\underline{g}$ l'accélération de la pesanteur, on utilise les coordonnées cylindriques r,θ, on choisit de mesurer θ à partir de la verticale basse. θ=0 est donc la ligne inférieure du pot, le voisinage du bas du pot est la région où θ est faible, c'est cette région que nous examinons au II et III. et nous établirons que localement on peut trouver une solution de similitude.

I. 1. A l'intérieur du tuyau, les gaz chauds provenant du moteur se déplacent assez vite. De quel régime de transfert de la chaleur s'agit-il vraisemblablement?
La paroi du tuyau est chauffée par le gaz à l'intérieur, et refroidie par l'air à l'extérieur, de quel régime de transfert de la chaleur s'agit-il?
Ce tuyau est refroidi par l'air extérieur, de quel régime de transfert de la chaleur s'agit-il vraisemblablement?

I.2. Écrire (sous forme compacte avec des _ et des $\_^2$) les équations générales de la mécanique des fluides associées aux trois domaines ainsi que les conditions aux limites que vous estimez pertinentes (à l'entrée du collecteur on se donne un gaz chauffé par le moteur avec un débit initial).

II Le problème complet étant compliqué, on va ici commencer par simplifier le problème de l'extérieur du tuyau.
II.1. On fait une approximation par tranches: comment doit être la longueur du tube par rapport à sa section et quelle hypothèse sur v_z doit on faire pour que l'on puisse supposer qu'il s'agit d'un problème où chaque tranche de tuyau se comporte comme un cylindre infini de température T_w donnée?

II.2. On examine donc le problème constitué d'un tube infini de température T_w donnée plongé dans une atmosphère au repos de température T_∞. Le tube chaud crée une couche limite thermique de convection naturelle d'épaisseur relative ε (ε<<1) par rapport au rayon R. On se place dans l'approximation de Boussinesq.
On rappelle l'équation de l'incompressibilité en cylindrique:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}v_\theta + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0.$$

Que devient elle pour ($r = R\,(1 + \varepsilon\, \tilde{y})$ et $r\theta = R\, \tilde{x}$, on remarque que $\tilde{x}$ est l'abscisse curviligne) et ($v_r = V_0 \tilde{v}$ et $v_\theta = U_0 \tilde{u}$) avec ε<<1.

II.3 Adimensionner la température et écrire f_θ et f_r les composantes dans le repère (r,θ) de la force motrice d'Archimède due à la légère dilatabilité du fluide (notée α) dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, f_θ et f_r apparaissent dans les questions II.4 et II.5.

II.4. On rappelle l'équation de Navier Stokes suivant v_θ en cylindrique:

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}v_\theta + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} = f_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, v_\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

La pression "p" est la déviation à la pression hydrostatique.

Montrer que l'on peut choisir ε de manière à garder le maximum de termes dans cette équation. Construire et nommer le nombre sans dimensions obtenu. Donner U_0 en fonction des données du problème.

II.5 On rappelle que dans l'équation de Navier Stokes suivant v_r en cylindrique il y a principalement ces deux termes (les autres étant petits):

$$\ldots = f_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \ldots$$

Montrer qu'elle se réduit à $0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}$.

II.6 On écrit l'équation de la chaleur sous la forme:

$$v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}T\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

Quelles sont toutes les hypothèses qui permettent d'écrire cette équation sous cette forme. Adimensionner et faire tendre ε vers 0.

III.1 Montrer que l'on aboutit au système suivant:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \qquad \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \tilde{T}\sin\theta, \qquad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}$$

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = Pr^{-1}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

Quelles sont les conditions aux limites pour $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ et $\tilde{T}$ en $\tilde{y} = 0$?

Quelles sont les conditions en $\tilde{y} \to \infty$ pour $\tilde{u}$, $\tilde{T}$ et $\tilde{p}$? En déduire que $\tilde{p}$ est nul.

III.2 Commentez la signification physique de chaque terme retenu.

III.3 On se place au voisinage de θ=0, c'est à dire que l'on est tout en bas près du point d'arrêt inférieur, montrer que $\sin(\theta) \sim \tilde{x} + \ldots$ Ecrire le nouveau système issu de III.1.

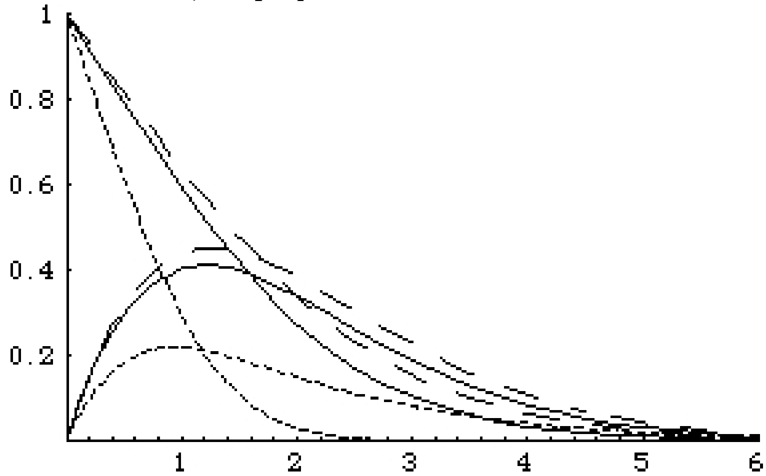
III.4. On est au voisinage du point θ=0, on remplace sin(θ) par $\tilde{x}$ dans II.1. En déduire que l'on peut chercher la solution de ce nouveau système sous la forme d'une solution de similitude de la variable $\eta = \tilde{y}$.

III.5. Vérifier que $\tilde{u} = \tilde{x}f'(\eta)$ et $\tilde{v} = -f(\eta)$ et $\tilde{T} = g(\eta)$ conviennent.

En déduire les équations différentielles ordinaires de la quantité de mouvement et de la chaleur.

Préciser toutes les conditions aux limites.

III. 6. Reproduire le dessin suivant et identifier les courbes et les axes (il y a trois solutions correspondant à Pr=7, 0.7 et 1). Expliquer votre choix. Quelles sont les courbes pour l'air?



Tracer à main levée le champ des vitesses de part et d'autre du point d'arrêt.

III.7. Montrer que si le nombre de Prandtl devient très grand, il faut poser $\eta=\varepsilon Y$ et $f = \varphi F$ et $g=\Theta$. En déduire la relation entre ε et Pr.

III.8. La solution garde à peu près la même forme lorsque θ augmente, que se passe-t-il à votre avis pour θ supérieur à $\pi/2$?

IV.1 Ecrire l'expression du flux de chaleur avec dimensions près de $\theta=0$. On suppose dans la suite que ce flux de chaleur est en fait valable pour θ non nul, c'est à dire pour tout le cylindre. Commentez cettte hypothèse.

IV. 2 Écrire l'équation de la chaleur dans la paroi en régime établi en sachant que a<<R.
Écrire les conditions aux limites à l'extérieur. On suppose que k_S>>k (k_S conductivité thermique du solide, on suppose de plus $((a/R)(k/k_S)Gr^{1/4}<<1)$: la température varie peu au travers l'enveloppe du tuyau.

IV.3 En fait vous vous intéressez à ce qui se passe dans le tuyau uniquement. De l'analyse précédente expliquer comment vous implémenteriez les conditions aux limites approchées en température pour l'écoulement dans le tuyau.

IV.4 Application, on suppose de manière abusive que l'écoulement est un écoulement de Poiseuille laminaire et que la longueur du tuyau est de l'ordre de grandeur de R Pe. Écrire l'équation de la chaleur dans le tuyau et ses conditions aux limites (approchées). Attention ici on doit tenir compte du fait que la température est variable en z.

Eléments de correction. Convection naturelle autour d'un cylindre

II.1 Longueur >>Rayon, on suppose $v_z=0$.
variation lente en z de T_w. Ces hypothèses nous permettent de simplifier le problème.

II.2 On passe de la notation cylindrique à des notations plus simples:

$1/r = 1/R + O(\varepsilon)$ donc $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r)$ est en fait $\frac{1}{\varepsilon R^2}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}(RV_0\tilde{v})+ (V_0/R)\, O(1)$

et $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}v_\theta$ est en fait $\frac{U_0}{R}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + O(\varepsilon)\right)$ donc $V_0=\varepsilon U_0$ *etc etc*

II.3 On pose $T=T_\infty+ \tilde{T}\,(T_w-T_\infty)$.
suivant $\underline{e}_r$ et $\underline{e}_\theta$ on a pour g: $g_r=g\cos\theta$ et $g_\theta=-g\sin\theta$ donc
$f_r = -\rho_0 g\alpha(T-T_\infty)\cos\theta$, et $f_\theta =\rho_0 g\alpha(T-T_\infty)\sin\theta$.

II.4. L'équation longitudinale nous donne

$$U_0^2/R = \nu\, U_0/(\varepsilon R)^2=\rho_0 g\alpha(T_w-T_\infty)$$

donc $U_0 = (\rho_0 g\alpha(T_w-T_\infty)R)^{1/2}$,
puis $\varepsilon=Gr^{-1/4}$
avec $Gr=g\alpha R^3(T_w-T_\infty)\nu^{-2}$ nombre de Grashof.

II.5. le gradient de pression transverse est nul.

III.1
Les conditions sont:

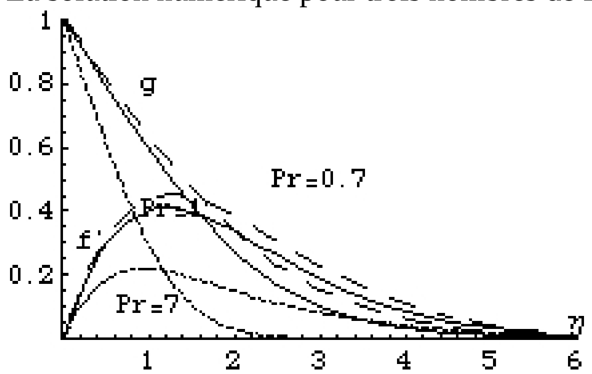
$$\tilde{y} = 0,\ \tilde{u} = 0,\ \tilde{v} = 0,\ \tilde{T} =1 \quad \text{et} \qquad \tilde{y} \to \infty,\ \tilde{u} = 0,\ \tilde{T} =0,\ \tilde{p} = 0.$$

En effet loin de la surface, l'air ne bouge pas, la perturabtion de pression est nulle.
III.3. Le système devient:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \tilde{T}\ \tilde{x} \quad \text{et} \quad \tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = Pr^{-1}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

+ conditions aux limites
III.4. L'invariance donne $u^{*2}/x^* = u^*/y^{*2} = T^*x^*$ mais $T^*=1$ par les condtions aux limites donc $u^*=x^*$ et $1 = 1/y^{*2}$ donc $y^*=1$.
on en déduit immédiatement la forme proposée.
III.5 le système à résoudre

$f''' + ff'' -(f')^2 + g =0 \qquad g'' + Pr\, f g' = 0. \quad g(0)=1,\ g(\infty)=0,\ f(0)=f'(0)=0$ et $f'(\infty)=0$.
III.6. $f'(0)=0.857777$, $g'(0)= -0.370476$ pour $Pr=0.7$
La solution numérique pour trois nombres de Prandtl a l'allure suivante



III.7 On garde g'' + Pr f g' = 0. qui devient $\Theta'' + F\,\Theta = 0$ pour $\varepsilon^{-1} = Pr\,\varphi$.
$f''' + ff'' - (f')^2 + g = 0$, on garde la dérivé la plus élevée, donc il ne reste $F''' + \Theta = 0$ avec $\varphi\varepsilon^3 = 1$ donc $\varepsilon = Pr^{-1/4}$. Le flux est donc en $Pr^{1/4}$.

II.8. Pour $\theta > \pi/2$, le terme $\sin\theta$ devient négatif, il agit comme un gradient de pression adverse et va faire décoller la couche limite thermique.

IV.1. $q_w = -k\, g'(0)\,(T_w - T_\infty) R^{-1}\, Gr^{1/4}$. L'ordre de grandeur est supposé bon pour toute la circonférence $Gr^{1/4}$. Faute de mieux...

IV.2 On pose $T = T_w + \Delta T\,\bar{T}$; l'équation de la chaleur, $r = R + a\,\bar{y}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}T\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}] = 0$$

se réduit à $0 = \dfrac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2}$, avec $-k_s\, a^{-1}\, \Delta T \dfrac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}} = -k\, g'(0)\,(T_w - T_\infty) R^{-1}\, Gr^{1/4}$ et $\bar{T}(0) = 0$.

la température sur la paroi intérieure est $\Delta T\,\bar{T}(-1) = (a/k_s\, q_w)$

donc $\Delta T\,\bar{T}(-1)/((T_w - T_\infty)) = O((a/R)\, k/k_s\ Gr^{1/4})$
en fait $a/R \ll 1$, $k/k_s \ll 1$, compensent $Gr^{1/4}$

IV.3 Cette analyse n'est valable qu'en bas du pot, on suppose que l'ordre de grandeur est néanmoins bon. On va donc remplacer l'extérieur du pot par un milieu équivalent avec ce coefficient d'échange approché en $Gr^{1/4}$.

IV.4. Dans le tuyau on aurait à résoudre un problème de Graetz avec l'échelle lentement variable $z = R\, Pe\, \bar{z}$, on pose $\bar{r} = r/(R-a)$

$$(1-\bar{r}^2)\frac{\partial\theta}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{r}}.$$

Comme $k_s \gg k$, on néglige la variation de température à travers la paroi,
donc $T_w(z)$ est la valeur de la température dans toute la paroi. C'est la température du fluide sur la paroi intérieure: $\theta(z,1)$.

Le flux à la paroi intérieure est $-(k/R)\dfrac{\partial\theta}{\partial\bar{r}}$ il vaut $-k\, g'(0)\,(T_w - T_\infty) R^{-1}\, Gr^{1/4}$ (car le flux est constant à travers la paroi),

soit une condition mixte $\dfrac{\partial\theta}{\partial\bar{r}} + h\,(\theta - T_\infty) = 0$ en $\bar{r} = 1$, (en $\bar{r} = 0$ on a $\dfrac{\partial\theta}{\partial\bar{r}} = 0$).

avec $h = -g'(0)\ Gr^{1/4}$, en fait le coefficient est approché et ne vaut pas $-g'(0)$