8 avril 03

Transferts Thermiques dans les fluides.

Cours **MFE12**

Écoulement de convection thermique mixte

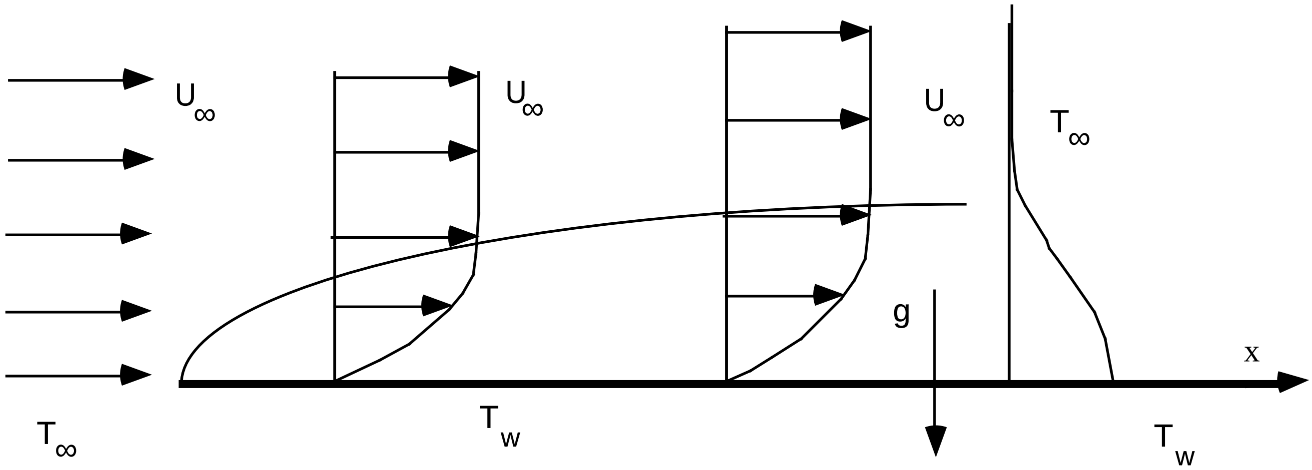
Durée: 2 heures

Tout document personnel autorisé.

On considère un écoulement de fluide visqueux pesant bidimensionel, stationnaire, rencontrant une plaque plane semi infinie (la gravité est perpendiculaire à la plaque). Le fluide a une masse volumique ρ_∞ constante à l'infini et une viscosité de cisaillement μ également constante. Ce fluide est légèrement dilatable, de coefficient de dilatation α. À l'infini amont, l'écoulement est uniforme de vitesse constante U_∞ parallèle à la plaque et à la pression p_∞.

La plaque plane est chauffée à une température $T_w\theta(x)$ ($\theta(x)$ fonction donnée sans dimension et T_w température constante) différente de celle du fluide à l'infini amont qui est notée T_∞ (constante).
On a noté (x,y) les coordonnées d'un point quelconque dans l'écoulement, l'axe des x étant le long de la plaque et l'axe des y normal à celle ci. Comme d'habitude, les composantes de la vitesse, de la pression de la température sont notées u(x,y), v(x,y), p(x,y) et T(x,y).

Il s'agit donc du problème de la convection MIXTE: superposition de convection forcée et de convection naturelle.



Première Partie

1-1 Ecrire le système d'équations (dont Navier Stokes) compte tenu de l'hypothèse de Boussinesq. On notera (1) ce système de quatre équations.
Ecrire les conditions aux limites du problème.

1-2 Écrire le système (1) en prenant pour échelle des longueurs L la distance à partir du bord d'attaque à laquelle on étudie le phénomène, et comme échelle des vitesses U_∞ (les grandeurs adimensionnées seront notées $\overline{x},\overline{y},\overline{u},\overline{v}$…

Pour la pression on posera: $p=\rho_\infty U_\infty^2\overline{p},+p_\infty$ et

pour la température on introduira: $\overline{T}(\overline{x},\overline{y})= (T(x,y) - T_\infty)/(T_W-T_\infty)$
Où T_W est l'ordre de grandeur de la température de la paroi. Naturellement on introduira le nombre de Reynolds.

Montrer que l'on fait apparaître un nombre sans dimension en facteur de la température dans l'équation traduisant la conservation de la quantité de mouvement en projection sur la verticale. C'est le nombre de Richardson:

$$Ri = \alpha g \frac{(T_W-T_\infty)L}{U_\infty^2}.$$

Interpréter ce nombre comme un rapport de deux énergies.

1-3 Écrire l'équation de la chaleur adimensionnée, faire apparaître le nombre d'Eckert .
On suppose dans toute la suite E<<1, on ne s'occupe donc plus de ce terme. On notera P nombre de Prandtl, et on prendra pour la suite (pour simplifier) P=1.

1-4 Comment passe-t-on de ce système à celui de la convection forcée? Comment passe-t-on de ce système à celui de la convection naturelle?

1-5 Montrer que si le nombre de Reynolds devient très grand on obtient des termes ressemblant à la dégénérescence d'Euler mais avec le terme en Ri présent que l'on conserve (sans savoir pour l'instant s'il est grand ou non).

Vérifier que la solution $\overline{u}=1$, $\overline{v}=0$, $\overline{T}=0$ est bien solution des équations. Le fluide, aux échelles précédentes, ressent -t-il la présence de la plaque tant du point de vue thermique que dynamique? Commentez.

Deuxième Partie

2- Examinons ce qui se passe près de la paroi. Nous effectuons un changement d'échelle pour la variable transverse, c'est à dire y.

2-1 Pourquoi fait on cela?

2-2 On pose:

$$\overline{x}=\tilde{x},\ \overline{y}=\delta\tilde{y},\ \overline{u}=\tilde{u},\ \overline{v}=\delta\tilde{v},\ \overline{p}=\tilde{p},\ \overline{T}=\tilde{T}$$

Substituer dans le système des quatre équations pour u, v, p et T de la première partie, sans simplifier pour l'instant (question suivante).

2-3 Formuler le problème de couche limite associé à ce problème (dégénérescence intérieure pour Re très grand). On choisira δ (attention, sans dimension) de manière à garder:
-l'équation d'incompressibilité,
-l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant $\tilde{x}$

-l'équation de quantité de mouvement suivant $\tilde{y}$ sera écrite de manière à garder le terme de température (et une variation de la pression avec $\tilde{y}$). Quel doit être, dans ces conditions, l'ordre de grandeur de Ri par rapport à Re?
-l'équation de l'énergie dans laquelle on néglige toujours le nombre d'Eckert.
- Commentez le choix de la jauge de $\tilde{v}$ et de $\tilde{T}$

2-4 écrire toutes les conditions aux limites associées à ces équations. Ne pas oublier la température, ni la pression.

Troisième Partie:

3 On donne le système suivant:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \qquad \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = J\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{\tilde{y}}^{\infty} \tilde{T}\ d\tilde{y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, \qquad \tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

3-1 Vérifier qu'il se déduit du précédent:
Expliquer comment on a fait disparaître la pression. Naturellement, on admet que l'intégrale sur la température réduite est convergente. Identifier J que l'on suppose d'ordre un.
Poser les conditions aux limites utiles à la résolution.

3-2 Comment passe-t-on de ce système à la convection naturelle? A la convection forcée? Quelles seraient les conditions aux limites pour un problème de convection naturelle? de convection forcée?

3-3 On peut trouver des solutions semblables pour ce système. Ce dernier ressemblant beaucoup à celui de Blasius, montrer que $\tilde{y}/\sqrt{\tilde{x}}$ est variable de similitude, montrer qu'il est raisonnable de poser

$$\psi=\tilde{x}^{1/2}f(\eta),\ \tilde{x}=\tilde{x},\quad \eta=\tilde{y}/\sqrt{\tilde{x}} \text{ et } \tilde{u}=f'(\eta).$$

Vérifier que l'invariance par dilatation des termes $\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}$ et $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{\tilde{y}}^{\infty} \tilde{T}\ d\tilde{y}$ obligent à choisir

$\tilde{T} = \tilde{x}^{-1/2}\, g(\eta)$. Que vaut $\theta(\tilde{x})$?

3-4 Ecrire $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{\tilde{y}}^{\infty} \tilde{T}\ d\tilde{y}$ avec les variables de similitude $\tilde{T} = \tilde{x}^{-1/2}\, g(\eta)$ et $\eta=\tilde{y}/\sqrt{\tilde{x}}$.

Vérifier que $-(\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{(2\ f''' + f\ f'')}{\tilde{x}}$, en déduire l'équation longitudinale liant f''', f'', f et g.

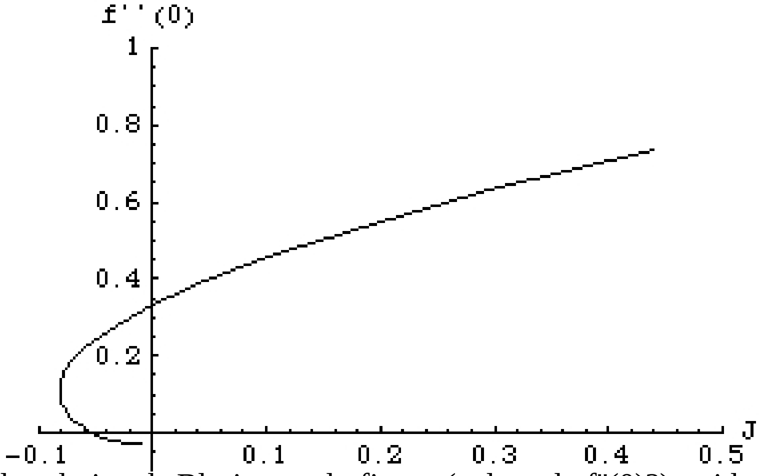
3-5 Rappeler les expressions des composantes de la vitesse en fonction de $\tilde{x}$, η, $f(\eta)$ et $f'(\eta)$. Ecrire l'équation de la chaleur en variables de similitude.

3-6 Écrire le système différentiel couplé en η pour les deux fonctions $f(\eta)$ et $g(\eta)$. Préciser les conditions aux limites (n'en donnez pas trop!).

3-5 Montrer que l'on peut intégrer une fois l'équation déduite de l'équation de l'énergie. Donner pour $g(\eta)$ une expression faisant intervenir une primitive de $f(\eta)$.

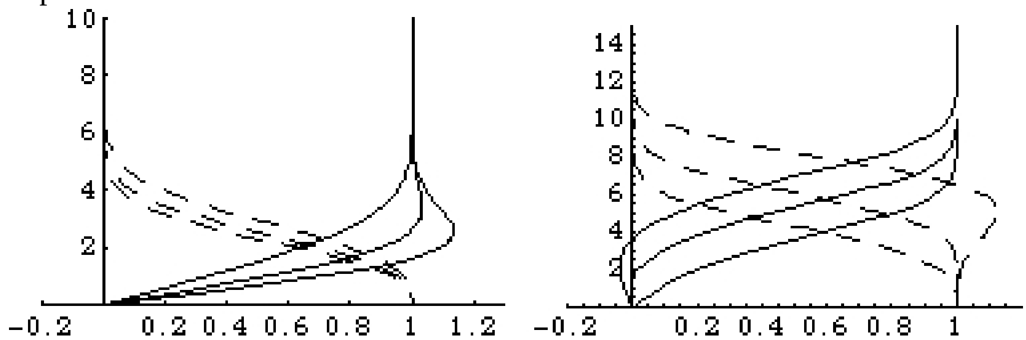
Quatrième Partie:

4 Sur la figure suivante on a tracé f"(0) en fonction de J (après résolution numérique par une méthode *adhoc*). Remarquer qu'un même J donne deux f"(0). Constater que l'on peut avoir séparation de la couche limite de convection thermique mixte, expliquer physiquement pourquoi



4-1 Identifier la solution de Blasius sur la figure (valeur de f"(0)?) et identifier le cas de la plaque chaude et celui de la plaque froide. Quel cas pose problème?

4-2 Reproduire les figures ci dessous, identifier les axes, reconnaître la vitesse et la température.



Placer les valeurs (J=0, J=0.18 et J=0.44) sur un graphe et sur l'autre (J=-0.02 J=-0.05 et J=-0.08) en expliquant pourquoi vous pensez que c'est juste.

Commentez les courbes de température. Quel est (en examinant les courbes) le flux de chaleur à la paroi?

Bibliographie:

W. Schneider (1978): "A similarity solution for combined forced and free convection flow over a horizontal plate", Int. J. Heat Mass Transfert , Vol. 22, pp. 1401-1406.

N. Afzal & T. Hussain (1984): "Mixed convection over a horizontal plate", J. of Heat transfert, Vol 106, feb pp. 240-241.

Le premier a résolu la solution semblable sans pouvoir calculer les solutions doubles (le second les a calculées). Le cas de la plaque plane à température constante froide est particulièrement retors et n'a été élucidé qu'en 2001, il mène à un ressaut thermique (comme dans l'eau!).

Correction.
Le nombre de Richardson est un rapport entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique
Partie 1: Si on ne tient pas compte de la viscosité, l'écoulement uniforme reste solution de l'écoulement. Il n'y a aucun transfert de chaleur. On est obligé d'introduire une couche limite thermique pour tenir compte de l'adhérence et du tranfert de chaleur.

2-3 $\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x}+\frac{\partial \tilde v}{\partial \tilde y}=0$, $\tilde u\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x}+\tilde v\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde y}=-\frac{\partial \tilde p}{\partial \tilde x}+\delta^{-2}Re^{-1}(\delta^2\frac{\partial^2 \tilde u}{\partial \tilde x^2}+\frac{\partial^2 \tilde u}{\partial \tilde y^2})$ donne $\delta = Re^{-1/2}$

La partie délicate est l'équation transverse:

$(\tilde u\frac{\partial \tilde v}{\partial \tilde x}+\tilde v\frac{\partial \tilde v}{\partial \tilde y})\delta=-\frac{\partial \tilde p}{\partial \tilde y}\delta^{-1}+Ri\,\tilde T+\delta^{-2}Re^{-1}(\delta^2\frac{\partial^2 \tilde v}{\partial \tilde x^2}+\frac{\partial^2 \tilde v}{\partial \tilde y^2})\delta$, elle se réduit à $O(\delta^2)=-\frac{\partial \tilde p}{\partial \tilde y}+Ri\,\delta\,\tilde T$.

On pose $J = Ri\,\delta$, le nombre de Richardson est en fait très grand.

3-1 $J = Ri\,\delta = Ri\ Re^{-1/2}$. (ou si on veut $Ri \sim Re^{1/2}$)

$\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x}+\frac{\partial \tilde v}{\partial \tilde y}=0$, $\tilde u\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde x}+\tilde v\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde y}=-\frac{\partial \tilde p}{\partial \tilde x}+\frac{\partial^2 \tilde u}{\partial \tilde y^2}$, $\tilde u\frac{\partial \tilde T}{\partial \tilde x}+\tilde v\frac{\partial \tilde T}{\partial \tilde y}=\frac{\partial^2 \tilde T}{\partial \tilde y^2}$. $0=-\frac{\partial \tilde p}{\partial \tilde y}+J\,\tilde T$

à l'infini $\tilde p(\tilde x,\infty)=0$ donc $J\int_{\tilde y}^{\infty}\tilde T\,d\tilde y = 0-\tilde p(\tilde x,\tilde y)$. donc $-\frac{\partial \tilde p}{\partial \tilde x}=J\frac{\partial}{\partial \tilde x}\int_{\tilde y}^{\infty}\tilde T\,d\tilde y$.

conditions $\tilde u=\tilde v=0$ et $\tilde T=\theta(\tilde x)$ en $\tilde y=0$ puis $\tilde u=1$ et $\tilde T=0$ en $\tilde y=\infty$.

3-2 convection naturelle, J=1: $\tilde u=\tilde v=0$ et $\tilde T=\theta(\tilde x)$ en $\tilde y=0$ puis $\tilde u=0$ et $\tilde T=0$ en $\tilde y=\infty$. La vitesse U_∞ est "calculée".

convection forcée, J=0: $\tilde u=\tilde v=0$ et $\tilde T=\theta(\tilde x)$ en $\tilde y=0$ puis $\tilde u=1$ et $\tilde T=0$ en $\tilde y=\infty$.

3-3 $\int_{\tilde y}^{\infty}\tilde T\,d\tilde y=\int_{\tilde y}^{\infty}\tilde x^{-1/2}g(\eta)\tilde x^{1/2}d\eta=G(\eta)$ donc la dérivée par rapport à $(\tilde x,\eta)$ de $G(\tilde x^{1/2}\eta)$

$\frac{\partial}{\partial \tilde x}G(\eta)=g(\eta)\frac{\eta}{-2\tilde x}$ ou: $\frac{\partial}{\partial \tilde x}\tilde T=(-2\tilde x^{3/2})^{-1}(g+\eta g')$

$\int_{\tilde y}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \tilde x}\tilde T\,d\tilde y=(-2\tilde x)^{-1}\int(g+\eta g')d\eta=(-2\tilde x)^{-1}\eta g(\eta)$ donc $2f'''+ff''+J\eta g=0$.

Puis on trouve l'équation de la chaleur: $2g''+fg'+f'g=0$ (*c.f.* cours). Système à résoudre: $2f'''+ff''+J\eta g=0$, $2g''+fg'+f'g=0$ et $f'(0)=0$, $f'(\infty)=1$, $f(0)=0$, $g(0)=1$, $g(\infty)=0$. Le cas J=0 est celui de la convection forcée. La contre pression induite par la couche limite refroidie (J<0) provoque donc un freinage. C'est ce qui explique la possibilité de séparation de la couche limite (courbes f"(0)<0: courant de retour près de la paroi) cas de la figure de droite. En revanche le cas J>0 est favorable à une accélération du fluide et produit un jet (cas de la figure de gauche). Si J est très grand, le jet est tellement fort que l'on retrouve le cas de la convection naturelle.