



ENSTA

Cours MFE12

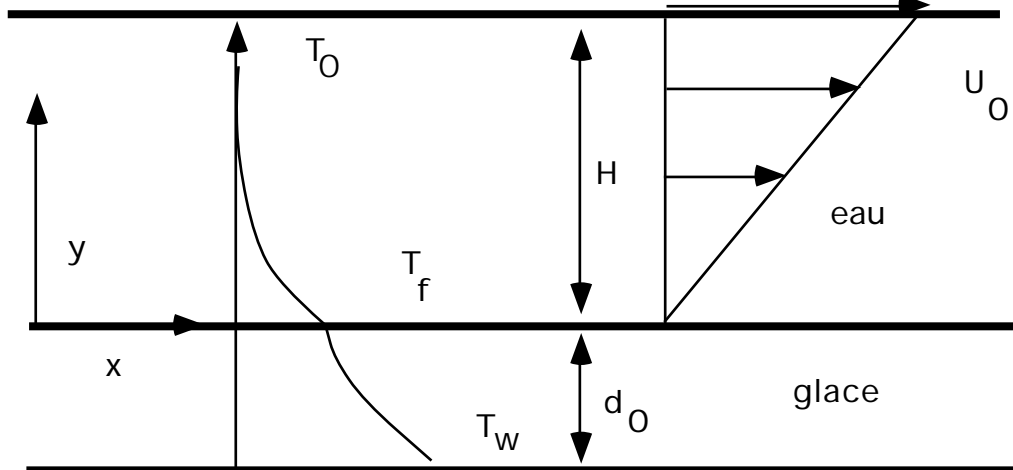
11 avril 02

## Transferts Thermiques dans les fluides.

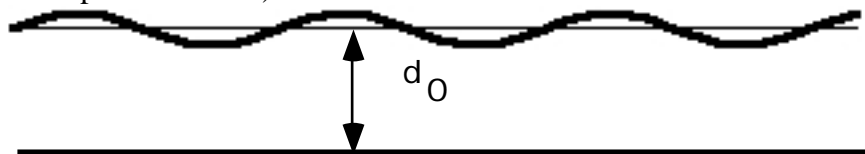
*Durée: 2 heures*

*Tout document personnel autorisé.*

L'objet de ce problème est l'étude de l'écoulement d'une couche d'eau sur un lit de glace. Le mouvement est assuré par le déplacement à la vitesse  $U_0$  de la plaque supérieure (maintenue à température constante  $T_0$ ), la paroi inférieure est maintenue à la température  $T_w$ .



On observe expérimentalement que la paroi de glace fond, mais pas uniformément. Une instabilité apparaît et la paroi glacée présente des ondulations (voir planche finale, l'instabilité ayant été initialisée par un "creux").



Des applications plus ou moins éloignées de ce phénomène peuvent être: la solidification de vitres lors de leur fabrication, la condensation en glace de l'eau sur les ailes d'avion... dans ces deux derniers cas, l'écoulement est ouvert, il s'agit d'une couche limite libre, ici l'écoulement est un cisaillement pur confiné.

Hypothèses:

Tous les coefficients sont constants, on évitera de confondre  $k_f$  la constante de Fourier dans le fluide,  $k_s$  la constante de Fourier dans le solide,  $k$  le nombre d'onde avec dimensions et  $\bar{k}$  sans dimensions.

$Re_0$  le nombre de Reynolds construit avec  $d_0 U_0$  et  $\nu$  est grand.

Le problème est supposé 2D plan.

La température en  $y=-d_0$  est imposée et elle vaut  $T_w < 0$ .

La température à l'interface est notée  $T_f$ , elle est constante (température de fusion). L'interface entre la glace est initialement en  $y=0$ , mais lorsqu'elle est perturbée, elle est en  $y= d_0 \bar{y}$ . La perturbation de l'interface sera de la forme  $\text{Re}(\exp(\bar{t} - i \bar{k} \bar{x}))$  (partie réelle de l'onde), avec  $\bar{k} > 0$ . Bien entendu on travaille en "complexes", on sous entend que l'on prend la partie réelle.

Bien entendu la configuration est étudiée à des échelles telles que les effets de bords sont à l'infini!

On rappelle que la relation de saut entre les interfaces est:

$$-k_f \frac{T}{y} + k_s \frac{T}{y} = L \frac{d}{t}.$$

$L$  est la chaleur latente de fusion.

On va résoudre dans le solide puis dans le fluide les équations de la chaleur, à chaque fois la résolution se fera pour une paroi plane, puis pour une paroi ondulée faiblement. La température sur l'interface, étant égale à la température de fusion, est constante.

On admet implicitement que la croissance temporelle de l'instabilité est plus rapide que la fonte uniforme de l'interface:

*Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

## 1. Champ de Température dans le solide

1.1 Adimensionner l'équation de la chaleur dans le solide en utilisant  $d_0$  comme échelle dans toutes les directions, quelle est la jauge de temps à utiliser? On écrira:

$$(x, -d_0 < y < d_0) = T_w + (T_f - T_w) \bar{\alpha}(\bar{x}, \bar{y})$$

1.2 Quelle est la condition portant sur  $\bar{k}$  pour que l'on puisse considérer que le champ des températures est quasi stationnaire dans le solide?

Dans la suite on cherchera la solution stationnaire sous la forme d'un développement limité:

$$\bar{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_0(\bar{x}, \bar{y}) + \alpha_1(\bar{x}, \bar{y}) + \dots$$

### 1.3 Cas non perturbé

L'interface est effectivement en  $y=0$ , trouver la solution stationnaire  $\alpha(x, y)$ .

#### 1.4 Cas perturbé,

L'interface est en  $y = 0 + d_0$ , en écrivant la condition à cette limite, montrer qu'à l'ordre 1 on a pour la condition à la limite "aplatie" en  $\bar{y}=0$  ( $\theta_0'$  valeur de la dérivée de  $\theta_0$  par  $\bar{y}$  en 0):

$$\theta_1(\bar{x}, 0) = -\theta_0'$$

Montrer que la condition en bas est  $\theta_1(\bar{x}, -1) = 0$

1.5 Résoudre l'équation de la chaleur quasi stationnaire en temps à l'ordre 1 en  $\bar{t}$ , on écrira la perturbation d'interface:

$$\bar{y} = \exp(\bar{t} - i \bar{k} \bar{x}),$$

bien entendu ( $\bar{t} \ll 1$ ) pour rester en quasi stationnaire, la dépendance en  $\exp(-i \bar{k} \bar{x})$  suggère la forme de la solution à trouver, on rappelle que  $\text{sh}(a+b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{ch}(a)\text{sh}(b)$  et  $\text{sh}(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$ .

1.6 Vérifier que si  $\bar{k}$  tend vers 0 (*i.e.* que la longueur d'onde tend vers l'infini) la dépendance de  $\theta_1$  en  $\bar{y}$  est linéaire (pouvait on s'y attendre?).

1.7 Calculer la perturbation de flux sur la paroi perturbée:

## 2. Dans le fluide

On suppose le fluide incompressible, à coefficients constants. On suppose l'écoulement laminaire. On reste dans l'approximation quasistatique pour l'écoulement et pour le champ de température dans le fluide. On suppose qu'il n'y a pas de gradient de pression: c'est uniquement la vitesse de la plaque qui fait se déplacer le fluide.

2.1 Écrire les équations de Navier Stokes (stationnaires) adimensionnées avec  $U_0$  et  $d_0$ . On suppose que  $H$  se mesure avec  $d_0$  et on pose  $h = H/d_0$ .

Montrer que la solution linéaire en  $\bar{y}$  est solution pour tout nombre de Reynold  $R_0$ .

2.2 Écrire l'équation de la chaleur (stationnaire, Pr d'ordre unité et à Eckert nul) dans le fluide, on écrira:

$$\nabla^2 \bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad (0 < \bar{y} < H)$$

Préciser les conditions aux limites en haut et en bas.

2.3 dans le cas non perturbé, montrer qu'une solution linéaire en  $\bar{y}$  convient.

2.4 On vient de calculer la température  $\bar{T}_0(\bar{x}, \bar{y})$  à  $\bar{t}=0$ , on suppose que la température s'écrit dans le cas perturbé:

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{T}_0(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) + \dots$$

montrer que comme dans la question 1.4 on a pour la condition sur le mur "aplati" la relation entre les perturbations:

$$\bar{T}_1(\bar{x}, 0) = \bar{h}$$

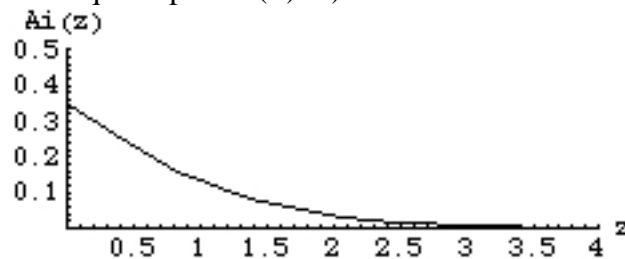
2.5 le mur est perturbé par le développement de l'instabilité, on néglige la variation de géométrie, on suppose que la vitesse reste linéaire en  $\bar{y}$ ...

Comme on suppose que le nombre de Péclet est très grand, en déduire que les perturbations de fluide restent confinées dans une couche limite thermique d'épaisseur fine  $\delta \ll 1$ . Exprimer  $\bar{T}_1$ .

2.6 Chercher la solution sous la forme  $C \exp(-i \bar{k} \bar{x}) Ai((-i \bar{k})^{1/3} \bar{y})$  où  $Ai$  est la fonction d'Airy qui vérifie:

$$Ai''(z) = z Ai(z), \quad Ai(0)=0.36, \quad Ai'(0)=-0.259,$$

$Ai(z)$  décroît en  $z$  (on ne s'inquiète pas de  $(-i)^{1/3}$ ) et tend vers 0 à l'infini.



En déduire l'expression du flux à la paroi

3. Au final la relation de saut de flux à la paroi s'écrit:

$$-k_f \frac{T}{y} + k_s \frac{d}{y} = L \frac{d}{t}$$

si on oublie l'instabilité, l'interface va fondre lentement et uniformément, donc l'épaisseur de glace varie avec le temps (on la note  $d_0 \bar{d}(t)$ , avec  $\bar{d}(0)=1$ ), on suppose que l'écoulement n'est pas affecté en première approximation.

3.1 En déduire l'équation d'évolution de  $\bar{d}(t)$  (adimensionner et faites apparaître le nombre sans dimensions  $G=(k_s/k_f) (T_f-T_w)/(T_0-T_f) (L/d_0)$ ), discuter suivant la valeur de  $G$  si l'interface fond ou non.

3.2 Ecrire la relation de saut pour les perturbations, trouver l'échelle de temps pour la croissance exponentielle de la perturbation de l'interface.

3.3. Malheureusement cette équation de dispersion ne donne que des modes atténués:  $\sigma$  est toujours négatif quel que soit  $k$ . A votre avis quelle(s) hypothèse(s) doit on remettre en doute et quel type de termes seraient alors ajoutés?

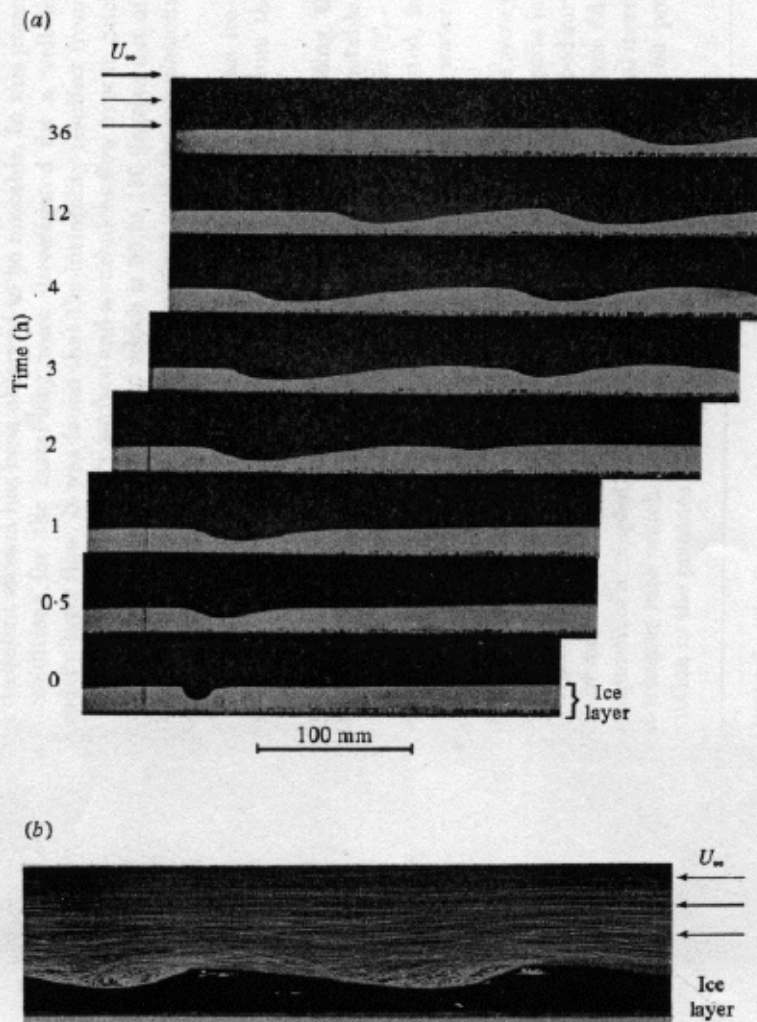


FIGURE 8. (a) Photographs showing the development of an ice surface wave.  $\theta = 35.6$ ,  $Re_\delta = 4.5 \times 10^4$ . (b) Flow visualization over a 'rippled' ice surface.  $\theta = 35.0$ ,  $Re_\delta = 1.4 \times 10^4$ .

Correction

1.1  $(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\frac{\partial}{\partial \bar{y}}) - \frac{\partial}{\partial \bar{t}}) = 0$  (si on choisit  $= d_0^2/(k_s / s c_{ps})$ ) et avec comme

conditions aux bords  $(\bar{x}, -1) = 0$ , et  $(\bar{x}, 1) = 1$ ,

1.2 on néglige le terme temporel:  $d_0^2/(k_s / s c_{ps}) \ll 1$ .

1.3 devient  $(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$  à l'ordre 0 en avec  $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} + 1$ .

1.4  $(\bar{x}, 1) = 1$  est  $\alpha(\bar{x}, 1) + \beta_1(\bar{x}, 1) + \dots = 1$

$(\alpha(\bar{x}, 0) + \beta_0' + \dots) + (\beta_1(\bar{x}, 0) + \dots) + \dots = 1$

donc comme  $\beta_0' = 1$ ,  $\beta_1(\bar{x}, 0) = -$ . En  $\bar{y} = -1$ ,  $\beta_1 = 0$ .

1.5 On cherche une solution en  $f(\bar{y}) \exp(-i \bar{k} \bar{x})$

avec  $f(-1) = 0$  et  $f(0) = -1$  et  $-\bar{k}^2 f + f'' = 0$  donc  $f = A \text{sh}(\bar{k} \bar{y}) + B \text{ch}(\bar{k} \bar{y})$

$B = -1$  et  $-A \text{sh}(\bar{k}) - \text{ch}(\bar{k}) = 0 \Rightarrow f = (-\text{sh}(\bar{k} \bar{y}) \text{ch}(\bar{k}) / (\text{sh}(\bar{k}) - \text{ch}(\bar{k} \bar{y})))$

c'est aussi  $f = -(\text{sh}(\bar{k}(\bar{y} + 1)) / \text{sh}(\bar{k}))$

$\beta_1(\bar{x}, \bar{y}) = -(\text{sh}(\bar{k}(\bar{y} + 1)) / \text{sh}(\bar{k})) \exp(-i \bar{k} \bar{x})$

1.6  $\beta_1(\bar{x}, \bar{y}) = -(\text{sh}(\bar{k}(\bar{y} + 1)) / \text{sh}(\bar{k})) \exp(-i \bar{k} \bar{x}) \rightarrow -(\bar{y} + 1) \exp(-i \bar{k} \bar{x})$

on s'y attendait puisque l'équation de la chaleur dégénère en  $\frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\frac{\partial}{\partial \bar{y}}) = 0$  si l'échelle choisie

pour x est beaucoup plus longue que celle choisie pour y.

1.7  $\beta_1(\bar{x}, 0) / \bar{y} = -(\bar{k})(\text{ch}(\bar{k}) / \text{sh}(\bar{k})) \exp(-i \bar{k} \bar{x})$

2.1  $\bar{u} = \bar{y} / h$ ,  $\bar{v} = 0$ , et  $\bar{p} = 0$  sont solution évidente des ENS.

2.2  $\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = h(\text{Pr}R_0)^{-1} \frac{2}{\bar{y}^2} \bar{T}(\bar{x}, \bar{y})$   $\bar{T}(\bar{x}, 1) = 1$   $\bar{T}(\bar{x}, h) = 0$  donc  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = 1 - \bar{y} / h$

2.5  $\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = h(\text{Pr}R_0)^{-1} \frac{2}{\bar{y}^2} \bar{T}(\bar{x}, \bar{y})$  on substitue  $\bar{y} = \bar{y}$

on a donc une couche limite d'ordre  $= (h(\text{Pr}R_0)^{-1})^{1/3}$  et  $\bar{y} \frac{\bar{T}}{\bar{x}} = \frac{2}{\bar{y}^2} \bar{T}$

si on substitue la solution  $\exp(-i \bar{k} \bar{x}) \text{Ai}((-i \bar{k})^{1/3} \bar{y})$ ,  $z = (-i \bar{k})^{1/3} \bar{y}$

$(-i \bar{k} \bar{x}) z (-i \bar{k})^{-1/3} \text{Ai}(z) = (-i \bar{k})^{2/3} \text{Ai}''(z)$ , OK.

la solution complète est donc:  $\beta_1(\bar{x}, \bar{y}) = (\exp(-i \bar{k} \bar{x}) / h) \text{Ai}((-i \bar{k})^{1/3} \bar{y}) / \text{Ai}(0)$

$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \beta_1(\bar{x}, \bar{y} = 0) = \exp(-i \bar{k} \bar{x}) (-i \bar{k})^{1/3} \text{Ai}'(0) / \text{Ai}(0) / h$

3.  $-k_f \frac{\bar{T}}{\bar{y}} + k_s \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = L \frac{d}{d\bar{t}} \Rightarrow -[k_f(T_0 - T_f) / ( )] \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \beta_1 + [k_s (T_f - T_w) / d_0] \frac{\beta_1(\bar{x}, 0)}{\bar{y}} = L \frac{d}{d\bar{t}}$

$(-i \bar{k})^{1/3} \text{Ai}'(0) / \text{Ai}(0) / h - G (\bar{k})(\text{ch}(\bar{k} \bar{y}) / \text{sh}(\bar{k})) = \bar{t}$  est toujours négatif

la perturbation de vitesse transverse due à la paroi ondulée crée un terme source supplémentaire dans l'équation de la chaleur.

Il semblerait que l'on puisse ainsi avoir un déphasage de dans le terme de flux de fluide qui permettrait d'obtenir une croissance exponentielle des perturbations (cf l'article de Gilpin et all 1980 JFM n° 99, pp 619 -640.



*bla bla bla correction à poursuivre*  $\gamma(\bar{x},0)/\bar{y} = -(\bar{k})(\text{ch}(\bar{k})/\text{sh}(\bar{k})) \exp(\bar{t} - i \bar{k} \bar{x})$

$$-(-1) (-i \bar{k})^{1/3} \text{Ai}'(0)/\text{Ai}(0)/h - G(\bar{k})(\text{ch}(\bar{k} \bar{y})/\text{sh}(\bar{k})) = (L)/(k_f(T_0 - T_f))$$