



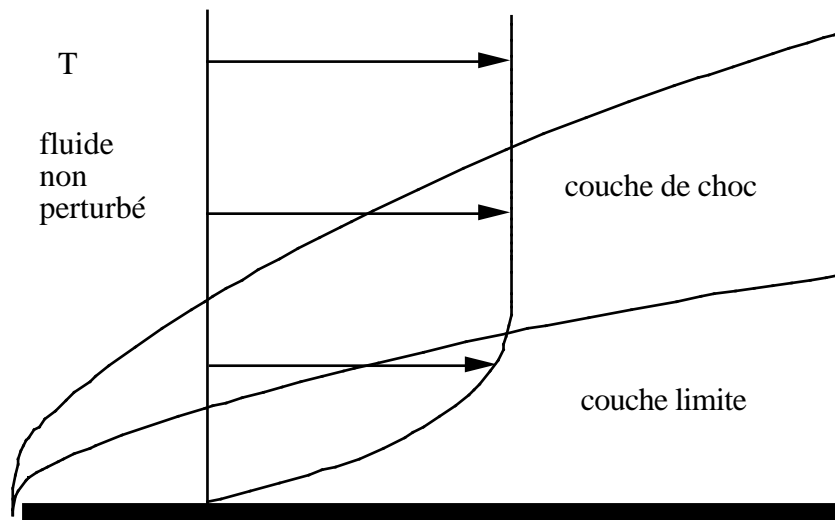
ENSTA

## Écoulement hypersonique sur une plaque plane

COURS MF202

PC de révision

On veut déterminer l'écoulement sur une plaque plane semi infinie maintenue à une température  $T_w$  constante en régime compressible à très grande vitesse. Cet écoulement est caractérisé par une viscosité très faible, on peut donc utiliser l'analyse asymptotique et faire la décomposition fluide parfait/ couche limite: une onde de choc très inclinée se développe au dessus de la plaque créant une première couche très mince appelée couche de choc; les effets visqueux sont concentrés près de la paroi dans une seconde couche très mince appelée couche limite.



Cet exemple est très sévère, car d'une part le problème thermique ne peut pas être découplé du problème dynamique et car d'autre part il y a couplage fort entre la couche limite et le fluide parfait. Ce dernier couplage est tel que la pression de fluide parfait fait se développer la couche limite qui en s'épaississant déplace fortement les lignes de courant de fluide parfait; elle induit ainsi une variation de pression qui à son tour modifie la couche limite. C'est un exemple "d'interaction choc- couche limite" (*shock wave boundary layer interaction* ou *Sto - Grenzschicht- Interferenz*)

- Dans la partie "fluide parfait" on cherche donc à exprimer la pression ( $p(x)$ ) en fonction de la forme de la paroi équivalente ( $Y_w(x)$ ).
- Dans la partie "couche limite dynamique et thermique" on cherche donc à exprimer l'épaisseur de déplacement ( $\delta_1(x)$ ) en fonction de la pression ( $p(x)$ ).
- Le couplage consiste à trouver une paroi équivalente égale à l'épaisseur de déplacement:  $Y_w(x) = \delta_1(x)$  compatible avec  $p(x)$ .

Nous ne résoudrons pas complètement le problème (car il est très pénible), mais nous dégagerons les ordres de grandeur.

On rappelle les équations de Navier Stokes en écoulement compressible stationnaire 2D.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0.$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_{xy}); \quad \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_{yy})$$

$$\left(\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{xx}u + \mu_{xy}v + k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{yx}u + \mu_{yy}v + k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

avec  $H = c_p T + \frac{1}{2}(u^2+v^2)$  "l'enthalpie totale", et  $\mu_{ij}$  la partie dissipative du tenseur des contraintes:

$$\mu_{xx} = \mu\left[2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \quad \mu_{xy} = \mu_{yx} = \mu\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] \quad \mu_{yy} = \mu\left[2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]$$

Pour poursuivre on se donne la dépendance la plus simple de  $\mu$  en fonction de  $T$ : la loi de Chapman (on prendra même  $C=1$ ):

$$\mu/\mu_0 = C T/T_0.$$

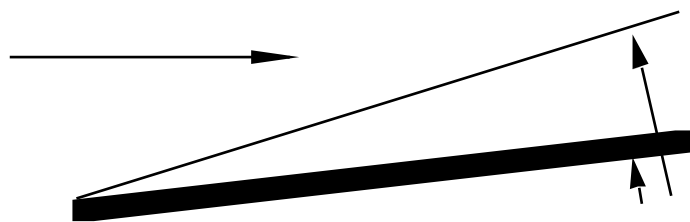
et on suppose que l'air est un GAZ parfait ( $p = \rho r T$ ):

$$p/p_0 = (T/T_0)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

## 1. partie "FLUIDE parfait"

1.1 En posant  $u=U \bar{u}$ ,  $v=U \bar{v}$ ,  $x=L \bar{x}$ ,  $y=L \bar{y}$ ,  $\mu=\mu_0 \bar{\mu}$ . Montrer que si on fait tendre le nombre de Reynolds  $R \rightarrow \infty$ , on retrouve les équations d'Euler.

1.2 Un cas simple d'écoulement compressible supersonique avec choc est celui du dièdre (nous le verrons en détails dans le cours de compressible):



soit  $\theta$  angle du dièdre, on montre classiquement que la relation liant  $\theta$  et  $\alpha$  angle du choc est:

$$\tan(\alpha) = \left(\frac{2}{\gamma+1}(\sin^2 \alpha - M^2 - 2)/\tan \alpha\right) / \left(1 - \frac{2}{\gamma+1}(\sin^2 \alpha - M^2 - 2)\right),$$

de plus la compression est telle que le saut de pression est:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{\gamma+1} M^2 \sin^2 \alpha - \frac{-1}{\gamma+1}$$

où  $c^2 = p/\rho$  est la vitesse du son.  $\gamma = c_p/c_v$ ,  $c_p - c_v = r$  ( $r$  constante des gaz parfaits) sont classiques en thermostatique.  $M$  nombre de Mach  $M = U/c > 1$ , dans le cas hypersonique fort  $M \gg 1$ , et, on pose  $K = M^2$  et  $K = M^2$  "paramètres de similitude hypersonique".

En déduire que si l'angle du dièdre est faible mais  $M$  grand, on a:

$$K \gg 1 \quad \ll 1 \quad \ll 1 \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1)}{2} K^2 \quad \& \quad K = \frac{2}{(\gamma + 1)} K$$

on peut aussi montrer que si  $K \gg 1$   $\frac{v}{u} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$  et  $v = U$  et  $u = U$ . On utilisera ces résultats.

### Conclusion

Simplifiant à l'extrême, on suppose que si on se donne  $Y_w$  la forme d'un profil on suppose que les résultats du dièdre peuvent encore s'appliquer. Donc  $p$  ne varie presque pas transversalement sous le choc:  $p = p_1 \frac{(\gamma + 1)}{2} M^2 Y_w'^2$ , la vitesse longitudinale reste constante  $u = U$ , la vitesse transverse est  $v = U Y_w'$ . C'est l'approximation du "dièdre tangent". Grâce à ce type de formule l'homme est revenu de la Lune (partir n'est pas un si gros problème), puis c'est cette même formule qui lui a permis de revenir de l'espace en navette spatiale.

Si le mur se développe en puissance de  $x$ :  $Y_w = Ax^n$ , les équations du choc et de la surface du corps sont reliées par  $Y_s = \frac{\gamma + 1}{2} Y_w$ , la pression est aussi une puissance de  $x$ . Ce dernier résultat est en fait exact quand  $M$  tend vers l'infini sans utiliser l'approximation du dièdre tangent.

### 2. partie "couche limite"

Les conditions aux limites pour la vitesse ne sont plus satisfaites, il faut donc examiner ce qui se passe près de la paroi en changeant d'échelle pour mieux voir. Nous allons exploiter le fait que les variations en  $x$  sont lentes mais en revanche les variations en  $y$  près de la paroi sont très rapides et se produisent sur une échelle  $\ll L$ . En posant:

$$u = U \tilde{u}, v = V \tilde{v}, p = \tilde{p}, \rho = \tilde{\rho}, T = \tilde{T}, x = L \tilde{x}, y = \tilde{y},$$

trouver par moindre dégénérescence les jauges inconnues. (Montrer qu'il est raisonnable de prendre:  $V = U \delta / L$ , remarquer que la jauge de la pression ( $\tilde{p}$ ) n'est pas  $U^2$  puis après avoir constaté que la bonne jauge de  $T$  est  $M^2 T_1$ , et que le terme dominant de  $\tilde{\rho}_{,j,j}$  est d'ordre  $\mu U / L^2$  trouver la jauge de  $\tilde{\rho}$  (ne pas se préoccuper dans un premier temps de  $M$  mais seulement de  $R^{-1}$ , vérifier ensuite les hypothèses).

En déduire que les termes dominants des E.N.S. sont (on enlève les tildes et on est sans dimensions) ( $k = \mu c_p$  donc le nombre de Prandtl est posé égal à un,  $c_p$  constant) à l'échelle

(que l'on exprimera en fonction de  $\frac{M^3}{R}$  et de  $\delta$ ):

$$\frac{d}{dx} u + \frac{d}{dy} v = 0,$$

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{x} \frac{p}{x} + \frac{1}{y} (C_p \frac{\partial u}{\partial y}), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\left(u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y}\right) = p \frac{\partial}{\partial y} (C \frac{\partial S}{\partial y}); \quad S = 2T + u^2.$$

Quelles sont les conditions aux limites? Montrer que l'on peut trouver une solution semblable du système complet. On verra que l'épaisseur de déplacement:  $\delta = (1-u/U) dy$  se développe en  $x^n$  ainsi que le  $\delta$  en  $(Y_s = x^n)$ , on constatera que  $n=3/4$ , et que la variable de similitude est  $y/x^{3/4}$ .

### Annexe

$$\frac{\partial}{\partial x} (u) + \frac{\partial}{\partial y} (v) = 0.$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{p}{x} + \frac{\partial}{\partial x} (xx) + \frac{\partial}{\partial y} (xy)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{p}{y} + \frac{\partial}{\partial x} (yx) + \frac{\partial}{\partial y} (yy)$$

$$\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right) \left[c_p T + \frac{1}{2} (u^2 + v^2)\right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( xxu + xyv + k \frac{T}{x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( yxu + yyv + k \frac{T}{y} \right)$$

$$xx = \mu \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad xy = yx = \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad yy = \mu \left[ 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]$$

### Correction PC couche limite hypersonique

Les équations sont ici les équations complètes, il y a plus de termes que d'habitude car

$-\frac{u}{x} + \frac{v}{y}$  n'est pas nul.  $\mu = (2/3)\mu_0$  pour la plupart des gaz, et  $\mu$  dépend de la température (fonction croissante). Attention  $\mu = \mu(u)$  n'est pas  $\mu = \mu^2(u)$ .

#### partie fluide parfait:

La dégénérescence d'Euler est évidente. L'étude de l'angle du choc est plus délicate:  $\theta \ll 1$ , et  $M \gg 1$ :

$$\tan(\theta) = \left( \frac{2}{\gamma+1} (\sin^2 \theta - M^{-2}) / \tan \theta \right) / \left( 1 - \frac{2}{\gamma+1} (\sin^2 \theta - M^{-2}) \right),$$

comme  $\theta \ll 1$ :  $\tan(\theta) \sim \theta$ , pour  $\theta$  différent de  $\pi/2$ , puisque  $\theta$  est petit,  $\sin^2 \theta - M^{-2}$  est petit, donc si  $M$  est grand  $\theta$  est petit et  $\sim M^{-1}$ , donc  $\tan \theta \sim \theta \sim M^{-1}$  et  $(\sin^2 \theta - M^{-2}) \sim (\gamma+1)M^{-2}$ , on en déduit alors que:

$$\frac{p_2}{p_1} \sim 1 + \frac{2}{\gamma+1} M^{-2},$$

cela doit vous rappeler le supersonique linéarisé vu en PC.

Nous venons d'étudier le cas  $M$  d'ordre un, si  $M$  est très grand,  $\theta$  doit encore être petit et:

$$(\sin^2 \theta - M^{-2}) / \tan \theta \sim \theta \quad \text{donc} \quad \theta \sim \frac{2}{\gamma+1} M^{-1}.$$

La pression est immédiate. Il existe deux régimes intéressants:

- $\theta \ll 1$   $\Rightarrow \theta = 1/M$  et  $\frac{p_2}{p_1} = 1 + K$
- $K \gg 1$   $\theta \ll 1$   $\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)}{2} K^2$   $K = \frac{2}{(\gamma+1)} M$

C'est ce dernier cas que nous examinons ici

#### partie couche limite

- La jauge transverse de vitesse est facile:  $V = U \delta/L$  et permet de garder:

$$-\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 0 \quad \text{et} \quad u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

la dérivée totale est d'ordre  $[\frac{U}{L}]$ , l'équilibre du gradient longitudinal et des termes d'inertie

donne donc  $\mu = R U^2$ .

- L'enthalpie totale a des termes d'ordre  $c_p T$ ,  $U^2$  et  $\frac{1}{2} U^2$ , or  $c_p$  est d'ordre  $r = p / (\rho T) = c^2 / (T)$  donc  $c_p T$  est d'ordre  $(T/T_0) U^2 / M^2$ , donc la jauge de  $T$  est  $T = M^2$ . La température est donc très forte dans la couche limite.

On retrouve cette jauge avec la loi des gaz parfaits:  $p/p_0 = (T/T_0)$ . Donc

$\mu = (p / (\rho T)) R$ , mais comme  $\mu = R U^2$ , on a bien (puisque  $p / (\rho T) = c^2 / (T)$ ) pour jauge de la température  $T = M^2$ .

Remarquons que ce cas de jauge multiplicative est spécifique au supersonique où les variations de température sont importantes.

La jauge de la densité est obtenue en utilisant la relation des gaz parfaits:  $R = (T/T_0) (\rho/\rho_0)$ .

• Le terme principal de  $\frac{u}{x} + v \frac{u}{y}$  est dans  $\frac{u}{x}$  (par apparition de  $1/y$ ), et dans sa dérivée par rapport à  $y$ , il ne reste que  $-\frac{u}{y^2}$  et son ordre de grandeur est  $[\mu C(T/T^*)^{-1} U^2 / L^2]$  (car la

jauge de  $\mu$  est bien  $\mu C(T/T^*)$ ), on réécrit:

$[(\mu / U^2 L) C(T/T^*) M^2 (\rho / p)^{-1} L^2 / L^2 (U^2 / L)]$ , avec  $R = \mu / U^2 L$  et  $C$  d'ordre 1, on a

$$[M^4 R^{-1} (\rho / p)^{-1} L^2 / L^2 (U^2 / L)]$$

• On garde donc:

$$(u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y}) = -\frac{T}{p} \frac{p}{x} + \frac{1}{y} (\mu \frac{u}{y}) \text{ et } -\frac{p}{y} = 0.$$

si  $L = M^2 R^{-1/2} (\rho / p)^{-1/2}$

or la jauge de  $\frac{u}{x}$  est justement  $p (M^2 (L)^2)$  (relation du dièdre tangent)

La jauge de  $\frac{p}{y}$  est au final:

$$\bar{L} = M^{-1} (M^3 R^{-1/2})^{-1/2} = \bar{M}$$

L'équation de l'énergie

$$(u \frac{H}{x} + v \frac{H}{y}) = \frac{1}{y} (\mu \frac{1}{2} \frac{u^2}{y} + k \frac{T}{y})$$

On pose  $S=2T+u^2$  (fonction de Stewartson, sans dimension), elle se transforme si:

$$k=\mu c_p \text{ et } S=2T+u^2;$$

Attention le raccord de la température à l'infini est simplement  $T=0$  (son étude exacte est très délicate), en effet hors de la couche limite la température est en  $(M^*)^2$  dans la couche limite elle est en  $(M^*)^{-2}$ , donc puisque  $\frac{u}{x}$  tend vers 0,  $T$  tend vers 0. Le raccord de la vitesse et de la pression est évident.

• au final, on a résoudre dans la couche limite:

$$(u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y}) = -\frac{S-u^2}{2p} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{y} (C_p \frac{u}{y})$$

$$(u \frac{S}{x} + v \frac{S}{y}) = \frac{1}{y} (C_p \frac{S}{y})$$

avec  $u(x,0)=v(x,0)=0$ ,  $S(x,0)=2T(x,0)$ ,  $T(x,0)=T_w$  (la température imposée de la paroi),

$T(x, \infty)=0$ ,  $u(x, \infty)=1$ , il faut ensuite calculer  $\rho_1 = (1-u/U^2) dy$ . La pression et  $\rho_1$  doivent être telles que:

$$p = \frac{(\rho_1 + 1)}{2} \rho_1'^2$$

• On veut rendre invariant par toute dilatation (du genre  $F$  changé en  $F^* \hat{F}$ ) ce système et ses conditions aux limites. Comme  $u \rightarrow 1$  à l'infini, donc  $u^*=1$ , par l'équation de l'énergie  $T^*=1$  (car  $T$  est imposée en 0) donc  $S^*=1$ . L'équation des gaz parfaits donne  $p^*= \rho_1^*$ .

Mais le choc en puissance impose  $y^*=x^{*n}$ , donc  $p^*=x^{*(2n-2)}$ , c'est aussi  $\rho_1^*$ .

Conserver  $u \frac{u}{x}$  et  $\frac{1}{y} (p \frac{u}{y})$  impose  $x^{*-1} = (\rho_1^*)^{-2} x^{*2n-2}$ , d'où  $y^*=x^{*(3-2n)/2}$ . Mais, comme

$y^*=x^{*n}$ , on en déduit que  $n=3/4$ .  $\rho_1^*=y^*=x^{*(3/4)}$ .

Comme la solution pour  $u$  va s'écrire  $F(u,x,y)=0$ , et par l'invariance  $F(u^* \hat{u}, x^* \hat{x}, y^* \hat{y})=0$ , soit encore  $F(\hat{u}, x^* \hat{x}, x^{*(3/4)} \hat{y})=0$ , par élimination:  $F(\hat{u}, x^* \hat{x}, \hat{x}^{-(3/4)} \hat{y})=0$ , et quelque soit  $x^*$ ,

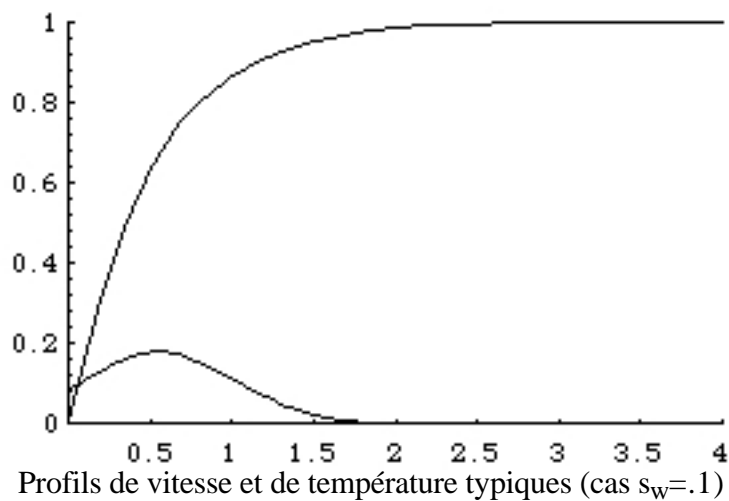
donc le deuxième *slot* (celui avec  $x^* \hat{x}$ ) n'a pas lieu d'être. Il y a donc une relation implicite liant  $\hat{u}$  et  $\hat{x}^{-(3/4)} \hat{y}$ , que l'on inverse en posant  $\hat{u} = f(\hat{x}^{-(3/4)} \hat{y})$ . La variable de similitude est donc  $= \hat{y}/\hat{x}^{(3/4)}$ .

Il y a une autre subtilité qui permet de simplifier les calculs: il est plus judicieux de poser  $d = dy/x^{3/4}$ . Après substitutions (comme dans la PC sur les solutions de Falkner Skan) on trouve ( $u=f'$ ):

$$f''' + ff'' + \frac{-1}{2}(1-f'^2) = 0 \quad \& \quad S'' + fS' = 0,$$

avec  $S(0)=s_w$  donné,  $f(0)=f'(0)=0$ , et pour  $\hat{x} \rightarrow \infty$  :  $S \rightarrow 0$ ,  $f' \rightarrow 1$ .

Après résolution on trouve à peu près pour  $s_w$  d'ordre 1 une relation presque linéaire:  $f''(0)=0.54 + 0.216 s_w$  et  $s'(0)=0.49-0.5s_w$ .



A retenir:

Les écoulements compressibles visqueux contiennent toutes les équations couplées, de plus  $(T)$  et  $\mu(T)$ : le problème est très complexe.

Les équations de couche limite ont toujours la même forme.

Dans ce cas précis il y a interaction forte entre la couche limite et le fluide parfait (la couche de choc et la couche limite sont de même épaisseur: en effet la couche de choc est mince car le choc est très incliné). C'est une nouveauté par rapport à l'année dernière.

En général, le fait de prendre en compte une interaction entre la couche limite et le fluide parfait permettent de calculer la séparation de la couche limite, mais c'est une autre histoire...

Ce problème a été vraisemblablement résolu à l'origine par Stewartson (~1960) puis précisé par Bush et Fendel. Enfin, il y a non unicité des solutions (Stewartson & Brown 1975), mais c'est une autre histoire...

### Bibliographie:

Anderson J.D. Jr (1989): "hypersonic and high temperature gas dynamics" McGraw Hill

Cousteix J. (1989): "Couche limite laminaire", ed Cépadués .

Gilly, Rozenhall & Sémézis "Aérodynamique Hypersonique" Gauthier Villars 1970

Germain P. (198X): "Mécanique X T2" Ellipses.

Hayes & Probstein (1959): "Hypersonic flow theory" Academic Press .

Stewartson K. & Brown S.N. (1975): "A non uniqueness of the hypersonic boundary layer",

Q.J. mech. appl. math., Vol XXVIII.

Stewartson K. (1965 excellente année): "The theory of laminar boundary layers in compressible fluids" ed. Oxford press

## Notes pédagogiques

question 1:

Passer vite (simple développement limité de formules admises pour trouver le cas  $K \gg 1$ ).  
Faire cependant le lien avec le supersonique linéarisé (hypothèse des petites perturbations)  
examiné en cours de première année: c'est la limite  $\propto M^{-1}$ .

question 2:

conduire l'analyse comme les PC (adimensionalisation/ Principe de moindre dégénérescence...)  
de l'année dernière. On peut se servir de l'annexe comme brouillon pour les ordres de  
grandeur... La difficulté est liée à l'apparition de deux nouvelles jauges.

Faire proprement les équations dynamiques (en faisant remarquer la nouveauté du Mach...),  
admettre l'équation de l'énergie.

Vérifier proprement l'invariance des équations et établir la variable de similitude proprement.

En revanche ne pas recalculer  $f'''+\dots$  qui est pénible.