

5. Introduction à la couche limite turbulente

Résumé

Dans ce chapitre nous indiquons qu'au delà d'un certain nombre de Reynolds, les écoulements ne sont plus laminaire et deviennent turbulents. Nous introduisons la couche limite turbulente et ses différentes zones. Nous présentons le système d'équations $k - \varepsilon$.

De manière implicite, nous n'avons jusqu'à présent parlé que d'"écoulement laminaire" (*Laminar Flow*). Une définition de l'Écoulement Laminaire serait par exemple, dans le cas de l'écoulement de Poiseuille (c.f. PC 3), de dire que le fluide s'écoule en "lamelles" concentriques (c'est la définition de Schlichting page 11), u ne dépend que de r, mais il s'agit plus d'une observation que d'une vraie définition. Une définition simplette serait alors de dire que l'on appelle solution laminaire toute solution des équations de Navier Stokes stationnaires. Par extension, on peut introduire le temps ; une solution de Navier Stokes instationnaire (avec le terme $\partial/\partial t$) sera laminaire si elle ne varie pas trop vite en espace et en temps...

Car c'est bien là une des caractéristiques visibles des écoulements turbulents : leurs variations brusques.

Avant d'étudier les écoulements turbulents, que dans un premier temps nous définirons comme "rapidement" variables expliquons en deux mots comment un écoulement stationnaire est destabilisé puis comme il devient turbulent...

Reprenons Landau & Lifshitz (1989) (§26) et citons le : il convient de remarquer que "*tout problème concernant l'écoulement de fluide visqueux dans des conditions stationnaires données doit posséder, ne serait ce qu'en principe, une solution stationnaire exacte des équations de l'hydrodynamique*" (ce qui n'est pas encore prouvé mathématiquement en 3D, c.f. le prix Clay). "*Or certaines de ces solutions même si elles sont exactes, ne sont pas vérifiées dans la Nature*" (N majuscule). "*Les écoulements*" (sous entendu, laminaires) "*qui existent dans la Nature doivent être stables : de petites perturbations qui y prennent naissance doivent s'atténuer au cours du temps.*"

5.1. Notions de "stabilité hydrodynamique"

Avant donc d'en venir à un écoulement paraissant totalement désorganisé posons quelques notions de stabilité. Partant d'un écoulement laminaire stationnaire donné, on construit des paramètres de contrôle (qui sont en fait des nombres sans dimensions comme le nombre de Reynolds). Un exemple adapté à la thermique est celui de "Rayleigh Bénard" (dont nous avons déjà parlé) : une certaine épaisseur de fluide au repos est chauffée à sa base et refroidie à la surface. La solution "laminaire" (solution de "base") est la solution de conduction pure : la température varie linéairement, la vitesse est nulle!!! Cependant, on observe l'apparition de rouleaux qui détruisent cet état de base lorsque l'écart de température dépasse un certain seuil. C'est ce que l'on appelle la perte de stabilité : les perturbations ne sont plus atténuées et ont modifié l'écoulement

ce qui mène à une nouvelle solution.

La première étape consiste donc, après avoir posé les équations (ici Navier Stokes avec approximation de Boussinesq), à adimensionner les équations et trouver les paramètres de contrôle : dans le cas de "Rayleigh Bénard" ce sera le nombre de Rayleigh qui vient naturellement :

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta TL^3}{\nu\kappa}.$$

La méthode consiste à rechercher de petites perturbations sous la forme :

$$u = u_0 + \varepsilon U(y)e^{ikx - i\omega t}.$$

C'est ce que l'on appelle la décomposition en modes propres. La forme exponentielle vient de l'invariance par translation du problème de base de solution u_0 (dans le cas de RB c'est 0). Les équations sont linéarisées autour de cette solution de base u_0 , ε est un petit paramètre arbitraire qui ne sert qu'à linéariser. On cherche la relation de dispersion $k(Ra)$ et $\omega(Ra)$, telle que $U(y)$ puisse vérifier les conditions aux limites. On discute ensuite, à k réel fixé le signe de la partie imaginaire de ω tel qu'il y ait amplification en temps...

Une fois que la valeur du paramètre critique a été obtenue (par une théorie ou l'expérience), il y a encore des zones d'ombre ! Au delà du seuil, les perturbations sont amplifiées, et de manière schématique (premières éditions du Landau §27, depuis les résultats portant sur les systèmes dynamiques ont clarifié cette intuition), on peut dire que de plus en plus de fréquences apparaissent, l'ordre de grandeur des distances sur lesquelles varie l'écoulement devient de plus en plus petit. *"Pour $R > R_c$, le flot devient de plus en plus compliqué et on le désigne sous le nom d'écoulement turbulent pour le distinguer de l'écoulement laminaire qui est régulier dans ce sens que le fluide s'écoule pour ainsi dire par couches ayant des vitesses différentes"*. Le passage de l'état laminaire à l'état turbulent est ce que l'on appelle la "transition"... Ce champ de recherche est une discipline à part entière de la mécanique des fluides.

Cette première étape est en fait théorique (difficile à maîtriser, ou plutôt "contrôler"). Il n'est pas rare que la transition turbulente soit imposée (en mettant, par exemple, une bande rugueuse sur la paroi dès le bord d'attaque!), on est alors sûr d'être en régime turbulent tout le long de l'aile (ce qui augmente le C_f , en revanche on y gagne car le décollement de la couche limite est plus difficile); on a volontairement dégradé le dispositif physique pour se placer dans une configuration que l'on sait à peu près calculer!!! De toutes façons les écoulements industriels sont en général turbulents.

Il faut dire un mot sur la différence entre le Chaos et la Turbulence. Ici encore le mot Chaos n'a pas de définition simple, si ce n'est qu'il est employé pour les systèmes dynamiques (qui ont un nombre fini de degrés de liberté, en

revanche NS a un nombre infini de degrés de liberté).

Au final, une définition précise de la turbulence est donc difficile à donner (Tennekes & Lumley (1978) page 1), on peut cependant faire un catalogue :

- l'état turbulent est caractérisé par des variations rapides irrégulières et aléatoires de la vitesse
- les mélanges sont importants et plus rapidement faits que par la diffusivité habituelle.
- le nombre de Reynolds est grand
- l'écoulement est 3D, il est rotationnel.
- l'énergie est dégradée : les écoulements turbulents dissipent l'énergie.
- les échelles mises en jeu ne sont pas celles des échanges moléculaire (le cadre de la mécanique des milieux continus reste valable)
- les caractéristiques sont les mêmes pour tous les fluides (gaz ou liquides), la turbulence n'est pas une propriété du fluide mais seulement un régime particulier.

Observations expérimentales :

Ci dessous, on observe (Encyclopaedia Britannica) des images instantanées d'une couche limite turbulente (le profil est obtenu par émission de fumée, les images sont des négatifs) : elles sont très chahutées. Mais si on les superpose toutes, on obtient un profil moyen.

5.2. Équations de Reynolds

5.2.0. L'impossibilité du calcul complet

La puissance de calcul grandissante des ordinateurs nous laisse penser qu'il suffirait de résoudre les équations de Navier Stokes directement. Estimons donc ici l'ordre de grandeur du nombre de points à utiliser pour faire un calcul d'un écoulement 3D à la vitesse U_0 autour d'un objet de taille L .

L'idée est d'imposer une énergie constante : U_0^2/L qui sera constante à toutes les échelles (conservation de l'énergie) et dissipée aux échelles ultimes λ et u , telles que $u\lambda/\nu = 1$. Donc l'énergie constante $U_0^2/L = u^2/\lambda$, avec $u = \nu/\lambda$, donc, par définition du nombre de Reynolds $Re = U_0L/\nu$ on obtient le rapport :

$$(\lambda/L) = Re^{-3/4}$$

qui est le rapport entre la plus petite échelle et la plus grande pour capter les phénomènes turbulents. Le calcul 3D demande un nombre de mailles au moins égal à $(Re^{-3/4})^{-3}$. En l'an 2000, $10 \cdot 10^6$ points font un mois de temps de calcul (en France au max on a $2 \cdot 10^6$ points, aux US $60 \cdot 10^6$ points pour un calcul plus raisonnable en temps de calcul), ça fait un $Re = 10^{28/9} = 1300$ au maximum pour une simulation directe!!!

On voit donc que l'on est encore loin du compte pour prédire l'écoulement

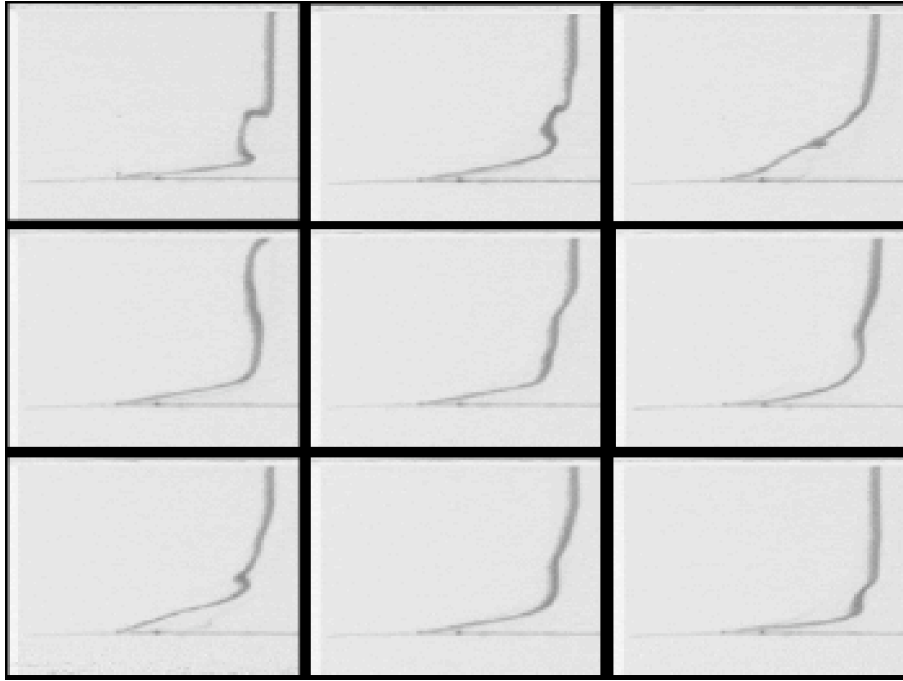


FIG. 1 – Quelques profils instantanés de vitesse (film Encyclopedia Britannica).

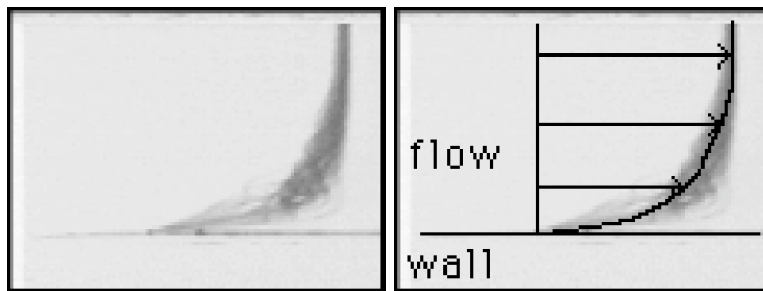


FIG. 2 – superposition : profil moyen.

autour d'un avion. en trichant en 2001 on est à $2 \cdot 10^6$ points et $Re = 15000$. Pour un Airbus $Re = 10^6$ soit 10^8 tailles de maille $1\mu\text{m}$. Prévu pour 2080, le calcul autour de l'avion complet !

5.2.1. Le problème de la moyenne

Le premier problème est la définition d'une moyenne, en effet les variations sont trop rapides pour être décrites finement en temps et en espace : on va donc ne s'intéresser qu'à la moyenne de la vitesse. Les détails de la vitesse sont perdus ; on ne va essayer de ne décrire que l'évolution du champ moyen. La moyenne d'ensemble est la plus satisfaisante théoriquement ; on fait n fois l'écoulement et on moyenne l'ensemble des réalisations :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{n} \sum u_i(r, t).$$

Même si elle est indispensable théoriquement, dans certains cas on lui préférera une formulation sur une réalisation qui met en jeux des moyennes spatiales et temporelles. On peut donc aussi en général écrire cette moyenne sous la forme d'un produit de convolution avec une fonction de poids G positive de moyenne égale à 1 (condition de normalisation) :

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(r - r', t - t') G(r', t') dr' dt'.$$

En pratique, il est plus judicieux, de faire une moyenne temporelle (G est une fonction porte en temps) :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(x, y, t) dt.$$

Bien entendu, T (la largeur de la porte) ne sera ni trop grande ni trop petite ! Ensuite, dès que la définition de la moyenne est fixée, on peut décomposer en une partie fluctuante et une valeur moyenne :

$$u = \langle u \rangle + u' \dots$$

on posera souvent $\langle u \rangle = U$, et on remarquera que $\langle u' \rangle = 0$. On peut aussi écrire $\langle u \rangle = \bar{u}$, cette notation (outre qu'elle soit plus dure à taper) peut amener des confusions avec l'adimensionalisation.

On a les propriétés suivantes pour la moyenne :

$$\begin{aligned} \langle \langle f \rangle \rangle &= \langle f \rangle \\ \langle \alpha f + \beta g \rangle &= \alpha \langle f \rangle + \beta \langle g \rangle \text{ avec } \alpha, \beta \text{ constantes} \\ \langle \int f(x) dx \rangle &= \int \langle f(x) \rangle dx \\ \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle &= \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x}, \quad \langle \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} \text{ etc.} \\ \langle \langle f \rangle g \rangle &= \langle f \rangle \langle g \rangle \\ \langle fg \rangle &\neq \langle f \rangle \langle g \rangle. \end{aligned}$$

5.2.2. Équations de Reynolds

Classiquement (depuis Reynolds 1895), on moyenne les équations de Navier Stokes (écrites avec la convention d'Einstein) :

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \right\rangle \text{ avec } u_i = \langle u_i \rangle + u'_i \text{ devient } \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle u'_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \text{ donc } \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0.$$

de même si on moyenne :

$$\left\langle \rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle, \dots$$

on a de manière évidente :

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle &= \rho \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} \\ \left\langle -\frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle &= -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

mais, par l'incompressibilité

$$\left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) \right\rangle$$

le développement de ce terme non linéaire :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u_i \rangle u'_j + \langle u_j \rangle u'_i + u'_j u'_i) \right\rangle &= \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) + 0 + 0 + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u'_j u'_i \rangle) \end{aligned}$$

après manipulations on obtient l'équation moyenne (ou équations de Reynolds ou encore "RANS : Reynolds Average Navier Stokes")

$$\rho \frac{d \langle u_i \rangle}{dt} = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \rho \langle u'_i u'_j \rangle \right).$$

On a fait apparaître le terme que l'on appelle terme de tension turbulente : $-\rho \langle u'_i u'_j \rangle$). L'interprétation de ce tenseur est le transport de quantité de mouvement par les fluctuations de vitesse.

Le problème n'est pas résolu pour autant car $\langle u'_i u'_j \rangle$, qui met en jeu des corrélations doubles, n'est pas connu, c'est un terme "supplémentaire" le terme de tension de Reynolds. On peut envisager d'étudier les corrélations doubles : mais on fait apparaître des corrélations triples ! On a en fait une hiérarchie infinie d'équations. Ce que l'on va faire (beaucoup plus loin) c'est une "fermeture" qui relie les corrélations doubles aux moyennes simples.

5.2.3. Ordres de grandeurs relatifs

Auparavant interprétons ce nouveau terme $\langle u'_i u'_j \rangle$: les échanges de quantité de mouvement et de chaleur se font habituellement par convection et diffusion, grosso modo : par les termes classiques :

$$\left(\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} \text{ et } k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) \text{ ou } \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \text{ et } k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)$$

le rapport des deux (diffusion/ convection) est l'inverse du nombre de Péclet (soit $1/(PrR)$, avec R nombre de Reynolds, donc environ aussi $1/R$ pour un gaz dont le Prandtl est d'ordre un). En effet, le temps caractéristique associé au processus de diffusion est L^2/ν , le temps associé au déplacement convectif est lui L/U (et $(L/U)/(L^2/\nu) = 1/R$). La turbulence permet un autre échange : par la fluctuation de vitesse u' . Le temps caractéristique associé est L/u' . Le rapport de ces deux temps est (au Prandtl près d'ordre un) :

$$(L/u')(\nu/L^2) = \frac{1}{R'}.$$

Le nombre de Reynolds R' (construit sur u') d'un écoulement turbulent peut être interprété comme le rapport du temps de la turbulence au temps construit avec la diffusion moléculaire. Les temps caractéristiques de la turbulence sont très courts. Ce point de vue est plus judicieux que de considérer R comme le rapport des termes d'inertie et des termes visqueux. Il y a donc deux nombres de Reynolds : le classique R construit avec la vitesse U_0 , et un nouveau R' construit avec la fluctuation de vitesse, bien entendu $R \gg 1$ et $R' \gg 1$. Continuant, l'ordre de grandeur du terme $\rho c \langle u' T' \rangle$ divisé par $\rho c u \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x}$ est $u'L$ (en supposant que les fluctuations de $T \sim$ variations de T). $u'L$ est homogène à une viscosité. C'est que l'on appelle l'"eddy viscosity" ou "viscosité turbulente". Le rapport de la viscosité laminaire à cette "viscosité turbulente" est en fait le nombre de Reynolds R' (construit sur u') :

$$R' = \frac{u'L}{\nu} = \frac{u'}{U_0} R.$$

À la fin de ce paragraphe, on a l'ordre de grandeur de $\langle u'_i u'_j \rangle_{,j}$. Il est R' fois plus grand que $\mu u_{i,jj}$. La viscosité moléculaire est donc négligeable dans les écoulements turbulents, du moins, loin des parois.

5.3. Couche limite turbulente

5.3.1. Observations expérimentales :

Par exemple, dans le cas d'une plaque plane, on mesure au fil chaud le profil de vitesse. A un nombre de Reynolds d'environ 10^5 , on est dans la région de "transition", on peut donc avoir ou le régime laminaire (Blasius, si on veille à ne pas perturber l'écoulement), ou le régime turbulent (si on a perturbé assez fortement la couche limite). Comme déjà observé plus haut, la vitesse varie beaucoup en fonction du temps, la moyenne a la forme suivante :

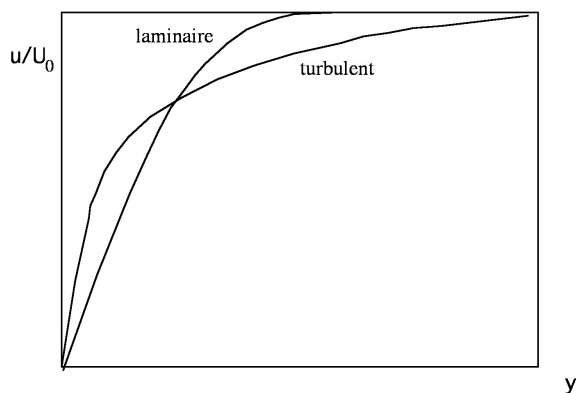


FIG. 3 – Profil laminaire et turbulent en unités de couche limite (0.99).

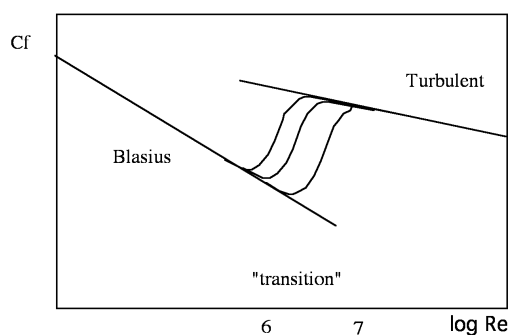


FIG. 4 – Le coefficient de frottement C_f (avec $C_f = (\mu \partial u / \partial y) / (\rho_0 U_0^2 / 2)$) de plaque plane, il varie fortement pour, le passage d'une courbe à l'autre dépend de la réalisation (Re entre 10^5 et 10^7).

On a représenté ci dessus la vitesse moyenne $\langle u \rangle / U_0$ dans le cas turbulent comparée à la vitesse laminaire de Blasius au même Reynolds 10^5 . Pour

$y/\delta = .05$ on a encore $\langle u \rangle / U_0$ environ égal à 0.5, on a l'impression que le fluide glisse sur la paroi, que le profil est moins écarté du mur.

Une autre caractéristique importante que l'on peut tracer est le frottement moyen à la paroi, on voit qu'il varie fortement lorsque l'on passe d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent. Le frottement diminue ensuite graduellement. Un écoulement turbulent frotte plus qu'un écoulement laminaire.

On peut aussi tracer les moyennes des carrés des fluctuations (valeurs "r.m.s." à $R \sim 10^6$).

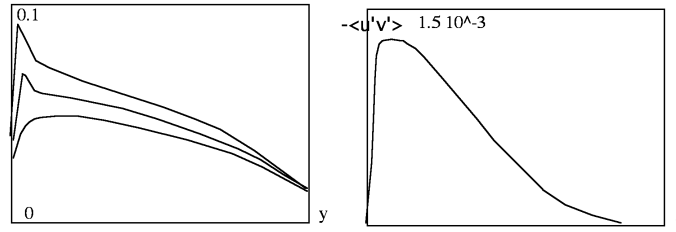


FIG. 5 - figure allure typique des fluctuations. à gauche de haut en bas $\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / U_0$, $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / U_0$ et $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / U_0$. à droite $\langle u'v' \rangle / U_0^2$.

On constate que $\langle u'^2 \rangle^{1/2}$, $\langle w'^2 \rangle^{1/2}$ et $\langle v'^2 \rangle^{1/2}$ sont de même ordre de grandeur près de la paroi (environ $10^0/0$ de U_0^2).

On note aussi que $-\langle u'v' \rangle / k$ (où $k = \frac{1}{2} \langle u_i'^2 \rangle$) varie peu (~ 0.3)

On observe que $-\langle u'v' \rangle$ passe de 0 à 0 en passant par un maximum. Sa variation est très rapide près de la paroi. On note u_τ^2 (ou u_*^2) l'ordre de grandeur de $-\langle u'v' \rangle$. On remarque par ailleurs que la composante transverse existe toujours même dans un écoulement 2D pur...

5.3.2. Équations

Même s'il y a toujours un effet 3D, nous supposons que l'écoulement reste plan. On cherche ici à caractériser l'évolution de la couche pariétale dans laquelle la vitesse évolue de U_0 à 0.

Si une couche limite évolue sur une distance L , elle s'épaissit de l , inconnu ; puisque la vitesse varie de 0 à U_0 , sur l'épaisseur de la couche limite, les termes $\partial/\partial y$ seront donc prépondérants. Nous effectuons donc une prise de moyenne des équations de NS avec l'optique "couche limite" (les dérivées transverses vont être importantes par rapport aux dérivées longitudinales).

$$\rho \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \rho \langle u_i' u_j' \rangle \right).$$

En fait plusieurs couches vont apparaître, elles dépendent de l'ordre de grandeur

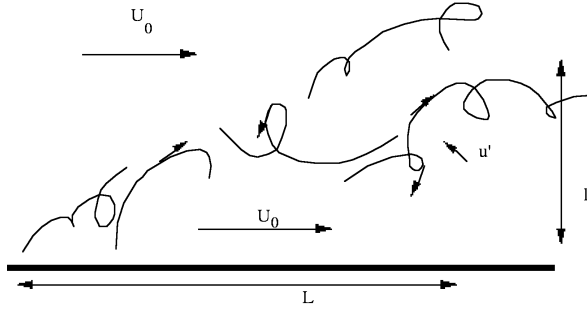


FIG. 6 – vue artistique d’une couche limite turbulente.

relatif de :

$$\frac{\partial}{\partial y} (\nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle u'v' \rangle).$$

Par définition on note u_τ^2 (ou u_*^2) l’ordre de grandeur de $-\langle u'v' \rangle$. Les termes tels que $\mu \partial^2 \langle u \rangle / \partial y^2$ sont d’ordre $R^{-1} \rho U_0^2 / l^2$ et sont donc à comparer à u_τ^2 / l^2 . On voit donc tout de suite que la moindre dégénérescence hâtive ne marche pas du premier coup ! Il va falloir introduire plusieurs couches (plusieurs l) pour tenir compte de la contribution relative de chacun de ces termes.

De manière abusive nous gardons les dimensions dans les équations et nous écrivons les termes que nous allons retenir :

- incompressibilité :

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} = 0.$$

- quantité de mouvement :

$$\langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\rho \partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle u'v' \rangle) + etc$$

$$0 = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\rho \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\nu \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} - \langle v'v' \rangle) + etc$$

- équation de la chaleur en négligeant la dissipation visqueuse :

$$\langle u \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\alpha \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} - \langle T'v' \rangle) + etc$$

Faire l’hypothèse $0 = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\rho \partial y}$ est raisonnable (mais dans le cas des jets, des panaches ou des sillages, la pression n’est pas imposée par le fluide parfait et il y a une stratification transverse de pression). Les équations ressemblent aux équations de Couche Limite Laminaire. Le problème de la turbulence a été reporté dans $\langle u'v' \rangle$ et $\langle v'T' \rangle$ qui sont toujours inconnus. Pour ce qui est de $\langle u'v' \rangle$ son ordre de grandeur est par convention u_τ^2 . Où u_τ (ou u_*^2) est

appelé l'intensité de la turbulence.

Dans le terme de tension équivalente, le premier est en $\rho U_0^2/R$ le second d'ordre :

$$\rho u_\tau^2.$$

Rappelons que l'échelle transverse n'est pas encore élucidée... il y en a plusieurs !

On a toujours pour le fluide parfait, à la paroi :

$$U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} = - \frac{\partial \langle p \rangle}{\rho \partial x}.$$

Loin de la paroi, les effets visqueux sont négligeables, et les variations de vitesses ne sont plus suffisantes pour créer de la turbulence à un taux notable.

5.3.3. Loi log de paroi/ loi de sillage

Nous allons ici établir simplement la forme du profil de vitesse dans un écoulement turbulent. Dans le cas d'une plaque plane on a $\partial p / \partial x$ nul, s'il s'agit d'une aile, le gradient sera supposé faible. La vitesse de fluide parfait est U_0 constante.

5.3.4. – > région interne

La turbulence génère un tenseur de Reynolds – $\langle u'v' \rangle$ important (nous l'avons vu expérimentalement), on a *a priori* les termes d'inertie, de tension de Reynolds, et de viscosité. On cherche à éliminer des termes, et on présente que l'inertie est négligeable et que c'est la viscosité qui contre la turbulence. La somme des deux termes du *RHS* reste à peu près constante. Une manière empirique de le dire est que sinon on aurait une accélération importante dans la couche limite... Une manière plus asymptotique est de dire qu'il existe une échelle δ^+ telle que l'on puisse garder ces deux termes. On part donc du principe que :

$$\left(\nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle u'v' \rangle \right) = \text{constante}.$$

Appelons cette constante τ_p / ρ . Très près de la paroi $\langle u'v' \rangle$ est négligeable (peu de fluctuations autour de 0 : adhérence à la paroi), et on donc, pour y petit mesuré dans l'échelle δ^+ , elle même petite :

$$\tau_p = \mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \Rightarrow \text{loi linéaire pour } \langle u \rangle.$$

Le frottement conserve sa valeur à la paroi. (τ_p / ρ) est homogène à $[U_0^2]$, on définit u_τ à partir de (τ_p / ρ) . u_τ est appelé l'intensité de la turbulence et définie par :

$$u_\tau = \sqrt{(\tau_p / \rho)} = U_0 \sqrt{(C_f / 2)}$$

où τ_p est la valeur du frottement à la paroi, $(1/2)C_f u_\tau^2$ est une notation équivalente pour τ_p . De même u^+ ou u^* sont des notations équivalentes à u_τ que l'on trouve dans la littérature. Si on pose :

$$u_\tau = \sqrt{(\tau_p/\rho)}, \quad U^+ = \langle u \rangle / u_\tau, \quad y^+ = y u_\tau / \nu = y / \delta^+.$$

$$\langle u \rangle / u_\tau = u_\tau y / \nu, \quad \text{ou } U^+ = y^+$$

on constate que la vitesse (sans dimension) est linéaire, avec les échelles choisies on a proportion simple : $U^+ = y^+$, pour $y^+ \rightarrow 0$. L'épaisseur de cette couche est donc mesurée par $\delta^+ = L / (R(u_\tau / U_0))$:

$$\frac{\langle u \rangle}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

C'est ce que l'on appelle la "sous couche visqueuse".

Plus loin de la paroi ($\nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$) devient plus faible, et décroît. La zone linéaire du profil de vitesse s'étend jusqu'à $y^+ \sim 7$. On note qu'en laminaire l'échelle conduisant à la dégénérescence du profil en droite est quelconque, mais plus petite que $LR^{-1/2}$.

5.3.5. - > région log

Ensuite, il existe une nouvelle région (toujours à l'échelle δ^+) qui va faire une première transition entre ce comportement linéaire et la valeur 1.

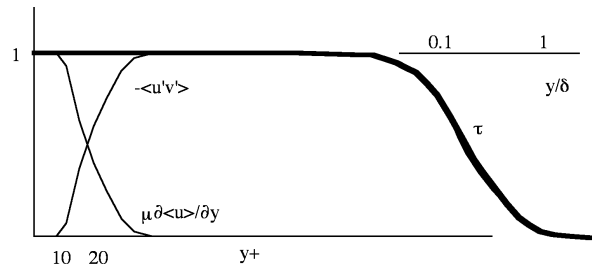


FIG. 7 - dessin de $((\nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle u'v' \rangle)) / \tau_p$ en fonction de la distance à la paroi.

On a u_τ, y et ν comme paramètres. Loin de la paroi (mais toujours à l'échelle ν / u_τ) la valeur de la viscosité ν n'a plus d'influence : la turbulence écrase la viscosité laminaire. L'ordre de grandeur de $\partial \langle u \rangle / \partial y$ par analyse dimensionnelle est simplement :

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \sim \frac{O(\langle u \rangle)}{O(y)} = \kappa^{-1} \frac{u_\tau}{y}$$

avec κ coefficient *ad hoc* (constante de Kármán), donc si on intègre l'expression $\partial \langle u \rangle / \partial y \sim \kappa^{-1} u_\tau / y$, il apparaît :

$$\langle u \rangle / u_\tau = \kappa^{-1} \text{Log}(u_\tau y / \nu) + C \text{ soit } u^+ = \kappa^{-1} \text{Log}(y^+) + C.$$

Expérimentalement les valeurs sont : $C \sim 5$ et $\kappa = 0.41$:

$$\langle u \rangle / u_\tau = 2.4 \text{Log}(u_\tau y / \nu) + 5 \text{ ou } \langle u \rangle / u_\tau = 5.6 \log_{10}(u_\tau y / \nu) + 5.$$

C'est la région de "Loi log de paroi". Elle est valable pour $20 < y^+ < 10000$ (environ).

5.3.6. — >couche de défaut

On se place encore plus loin de la paroi. Soit δ l'épaisseur de la couche limite (encore inconnue pour l'instant). De nombreuses expériences des années 50 (Clauser 56), ont montré que l'on pouvait faire "tomber" toutes les courbes sur une seule (voir figure 9 gauche) en traçant :

$$\frac{(\langle u \rangle - U_0)}{u_\tau} = f\left(\frac{y}{\delta_{.99}}\right).$$

gardons pour l'instant uniquement l'idée d'une forme "déficiente", et posons :

$$\langle u \rangle = U_0 + \varepsilon U_0 (-F(x, \bar{y}))$$

dans cette couche la vitesse est une légère perturbation ε (inconnue, mais que l'on va retrouver égale à u_τ / U_0) de la vitesse extérieure, et $\bar{y} = y / \delta$. On va effectuer le raccord des pentes pour \bar{y} au voisinage de 0 avec la couche précédente pour y^+ grand :

$$\varepsilon U_0 \left(-\frac{dF}{d\bar{y}} \delta^{-1}\right) = \kappa^{-1} u_\tau y^{+-1} \delta^{+-1} \text{ soit } \varepsilon U_0 \left(-\frac{dF}{d\bar{y}}\right) = \kappa^{-1} u_\tau (\bar{y}^{-1})$$

ε est donc bien u_τ / U_0 . On en déduit le comportement près de la paroi à l'échelle δ (pour $\bar{y} \rightarrow 0$) :

$$\langle u \rangle = U_0 + u_\tau (\kappa^{-1} \text{Log}(y / \delta) + C')$$

en pratique :

$$\frac{\langle u \rangle - U_0}{u_\tau} = 5.6 \log_{10}\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2.5$$

Mais on a aussi une information supplémentaire : le raccord des vitesses avec la couche Log (*i.e.* $y^+ \rightarrow \infty$) :

$$\langle u \rangle = \kappa^{-1} u_\tau \text{Log}(y / \delta^+) + C,$$

donc par différence (ou raccord dans une région intermédiaire) on a :

$$u_\tau \text{Log}\left(\frac{\delta}{\delta^+}\right) \sim U_0$$

Le dernier ingrédient est le raccord de vitesse transverse entre la région extérieure et principale. Dans la région de couche limite la vitesse transverse est d'ordre $\delta U_0/L$. A l'extérieur elle est d'ordre u_τ (car à l'extérieur de la couche limite la turbulence est la même dans toutes les directions). Donc, $u_\tau/U_0 = \delta/L$ d'où :

$$\frac{u_\tau}{U_0} \sim \frac{1}{\text{Log}((\frac{u_\tau}{U_0})^2 R)} \text{ ou puisque } R \gg 1 : \frac{u_\tau}{U_0} \sim \frac{1}{\text{Log}(R)}$$

Ces dernières relation ont été écrites avec les ordres de grandeur, mais si on conserve les constantes empiriques C , C' et κ on en déduit la forme "pratique" liant le coefficient de frottement $u_\tau/U_0 = \sqrt{(C_f/2)}$, le nombre de Reynolds et l'épaisseur de couche limite :

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = 5.6 \log_{10}(R \frac{\delta}{L} \sqrt{\frac{C_f}{2}}) + 2.4$$

Cette relation "marche bien" pour des valeurs aérodynamiques. Il en existe une version plus simple dénommée formule de Blasius qui a l'avantage d'être explicite et de bien recouper la précédente (c.f. PC "Poiseuille turbulent") :

$$C_f = 0.0456 Re_\delta^{-1/4}.$$

C'est dans cette région que l'on écrit aussi une "loi de sillage" complètement empirique tout simplement sous la forme :

$$\langle u \rangle = \frac{u_\tau}{\kappa} \text{Log}\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) + C + \frac{\Pi}{\kappa} W\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

avec les valeurs suivantes de Coles 56 et Clauser 56 tirées de nombreuses campagnes de mesures et qui marchent bien :

$$C = 4.9 \quad \kappa = 0.41 \quad \Pi = 0.51 \text{ et } W(y/\delta) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$$

5.3.7. En résumé :

À nombre de Reynolds infini, le petit paramètre est $\varepsilon = \frac{1}{\log(R)}$, et la forme de la couche limite turbulente est sur la figure 8 :

Sur les images suivantes, extraites de Clauser 56, sont reportées différentes expériences montrant le profil universel déficitaire et les lois linéaire et logarithmique.

On voit :

- i) la portion de loi de paroi laminaire (*W.L.*) : $\langle u \rangle / u_\tau = u_\tau y / \nu$,
- ii) la droite $u/u_\tau = 1/0.41 \text{Log}(u_\tau y / \nu) + 5$ de la région (*L.L.*),
- iii) région déficitaire (*D.L.*).

Un écoulement turbulent au dessus d'une plaque plane se décompose donc en :

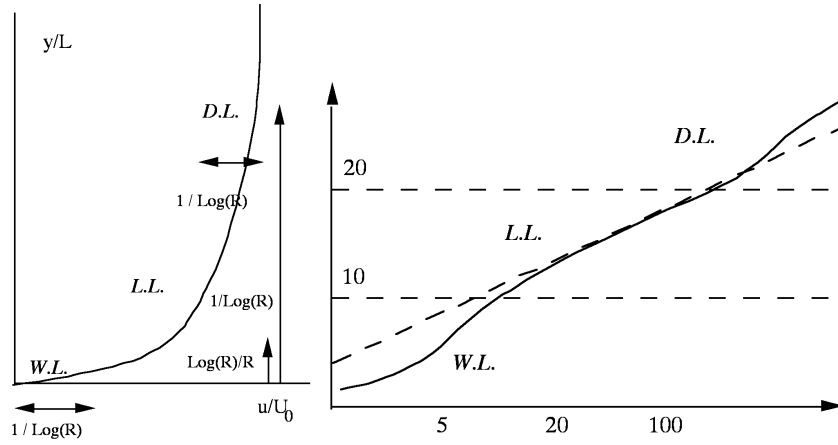


FIG. 8 – Gauche Profil de vitesse turbulente, en abscisse u/U_0 et y/L en ordonnée / Droite, en abscisse $u_\tau y/\nu$, en ordonnée u/u_τ (échelles log). *DL* : defect layer, *LL* log layer, *WL* wall layer

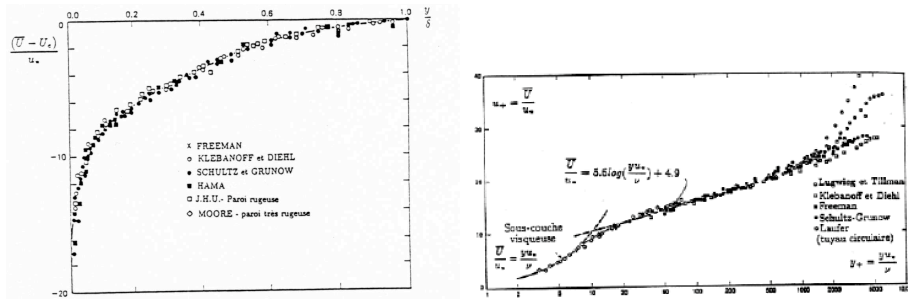


FIG. 9 – profil universel déficitaire (Clauser). / Loi linéaire et loi Log obtenues par compilation de différentes expériences (Clauser).

- une couche de fluide parfait, y mesuré par L (*External Potential flow*)

- une couche intérieure (*Outer Layer or Defect Layer*), elle est caractérisée par sa loi de sillage (*law of wake*)

$$u = U_0 + u_\tau F(y/\delta, x/L) \longrightarrow U_0 + u_\tau \kappa \text{Log}(y/\delta) \quad \text{pour } y/\delta \longrightarrow 0$$

avec $u_\tau/U_0 \sim 1/\log(R)$ et y mesuré par $\delta \sim L/\log(R)$. Le 1515 de la couche limite turbulente est :

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = 5.6 \log_{10}(Re\delta\sqrt{C_f}2) + 2.4$$

- une couche de paroi (*Wall Layer*) sous couche visqueuse, avec sa loi de paroi (*law of the wall*) :

$$u = u_\tau U + (y/\delta^+, x/L) \longrightarrow \frac{u_\tau}{\kappa} \text{Log}(y/\delta^+) \quad \text{pour } y/\delta^+ \longrightarrow \infty$$

y mesuré par $\delta^+ \sim L \text{Log}(R)/R$, la forme $\frac{u_\tau}{\kappa} \text{Log}(y/\delta^+) + u_\tau C$ est valable pour $30 < y/\delta^+ < 300$, avec $\kappa = 0.41$ et $C = 5.0$

- valeurs typiques en aéronautique

$$u^+ \sim 1/\log(R) \sim 0.05$$

$$\delta_1 \sim (1/5)\delta$$

$$\delta_2 \sim 1/50\delta$$

5.3.8. Viscosité turbulente-Longueur de mélange

5.3.8.1. Relation de fermeture de Prandtl

Nous venons de voir une description de la couche limite mais nous n'avons toujours pas vu comment la calculer explicitement : le terme de tension de Reynolds, dont l'ordre de grandeur u_τ^2 qui nous a servi de petit paramètre n'est toujours pas connu. Il faut pour l'estimer un modèle numérique. Le modèle le plus simple à envisager est fondé sur des idées de dimensions : on ferme les équations en faisant apparaître une viscosité turbulente (*eddy viscosity*) :

$$- \langle u'v' \rangle = \nu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}.$$

Cette forme est en fait directement inspirée des équations constitutives de la mécanique des fluides : en effet à une quantité dont on fait le bilan, on associe un flux proportionnel au gradient de cette quantité (par ex. pour un bilan d'énergie $c_p T$, on associe la loi de Fourier $-k\nabla T$). Comme pour la "vraie" viscosité (ou viscosité moléculaire) ν_t est homogène à une vitesse fois une longueur. Comment trouver l'expression de ν_t ? Il faut trouver une vitesse et une longueur judicieuses.

Par exemple dans le cas d'un jet on va prendre la vitesse au centre du jet, et la largeur du jet, le produit sera ν_t !

Ici, dans le cas de la couche limite, il est plus judicieux de prendre la distance à la paroi comme longueur (y ! et on met un coefficient κ) et la vitesse sera $y \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$:

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right| \text{ avec } l = \kappa y.$$

* près de la paroi, là où :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle u'v' \rangle \right) = 0$$

on substitue avec l'expression retenue et on a :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right)^2 \right) = 0$$

qui devient $\frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$, donc la loi linéaire est retrouvée.

*loin de la paroi le frottement reste constant, le frottement laminaire est négligeable :

$$\rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right)^2 \sim -\mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \tau_p \text{ donc } y \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right) \sim \frac{\tau_p^{1/2}}{\rho^{1/2} \kappa}$$

la loi logarithmique est récupérée par ce modèle simpliste.

5.3.8.2. Relation de fermeture de type Cebeci Smith

Cette idée de Prandtl du début du siècle a ensuite été modifiée dans les années 60/70 de manière à saturer la longueur de mélange (Van Driest, Cebeci Smith...). On décompose la couche limite en deux régions, une région où :

$$l = \kappa y (1 - e^{-y^+/A^+}); \quad A^+ = 26, \quad \kappa = 0.41, \quad y^+ = u_\tau y / \nu$$

avec pour u_τ la valeur du frottement à la paroi (la relation est implicite) puis, dans une seconde région, on sature complètement (bien entendu ν_t est continue) :

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right| = 0.0168 U_0 \delta_1.$$

La quantité δ_1 est l'épaisseur de déplacement. Loin de la paroi, on utilise la vitesse extérieure et l'épaisseur de couche limite. Ce sont des modèles à "zéro équation". Ils sont bien adaptés à l'aérodynamique.

5.4. Le modèle k-ε (1972)

5.4.1 Modèle à équations de transport : k - ε

Les modélisations précédentes sont locales (on dit aussi à zéro équations!!!), ici on raffine la description en tenant compte du transport de la viscosité tourbillonnaire : ν_t va varier. On pourrait n'introduire qu'une équation de transport, il s'agit du "modèle k" (Mais ce modèle est assez limité, c'est pour cela que l'on introduit deux équations de transport en plus des équations de Navier Stokes, il s'agit du "modèle k epsilon").

Cela va permettre de traiter des écoulements paraboliques (de type mélange de jets) ou des problèmes elliptiques (avec diffusion dans toutes les directions).

Rappelons les équations de Navier Stokes moyennées. On pose $\langle u_i \rangle = U_i$,

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0.$$

$$\rho U_i \frac{\partial}{\partial x_j} U_i = - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \langle u'_i u'_j \rangle \right).$$

Comme nous l'avons déjà dit, il faut "modéliser" le tenseur de Reynolds.

Pour cela il faut introduire une quantité importante : l'énergie cinétique des fluctuations k définie à partir de la trace du tenseur de Reynolds=

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i'^2 \rangle .$$

L'équation de son transport s'obtient après manipulation (toujours à partir de Navier Stokes, mais multipliée par u_i puis moyennée... etc) :

$$U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \langle u'_j p' \rangle + \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i u'_j \rangle - 2\nu \langle u'_i s'_{ij} \rangle \right) + P - \varepsilon$$

$$\text{avec } \varepsilon = 2\nu \langle s'_{ij} s'_{ij} \rangle, P = - \langle u'_i u'_j \rangle S_{ij}.$$

En fait S_{ij} est la notation anglaise pour D_{ij} (de même s'_{ij} est $(u'_{i,j} + u'_{j,i})/2$). La variation de k est liée à la divergence d'un flux qui est somme de trois termes : celui du travail de la pression : $\frac{1}{\rho} \langle u'_j p' \rangle$, du transport par les fluctuations turbulentes $\langle u'_i u'_i u'_j \rangle$ et du transport de la contrainte visqueuse $-2\nu \langle u'_i s'_{ij} \rangle$. Ce sont des termes qui redistribuent l'énergie. Le terme P est un terme de production de turbulence (il apparaît avec un signe moins dans l'équation de transport de l'énergie cinétique moyenne $\frac{U_i^2}{2}$, qui n'est pas écrite ici). C'est un transfert d'énergie entre l'écoulement moyen (terme S_{ij}) et l'écoulement fluctuant (terme $\langle u'_i u'_j \rangle$). Contrairement à ce que laisse penser la présence du signe "-", ce terme est positif dans le cadre choisi (voir remarque plus loin).

Le terme $-\varepsilon$ est le terme de (pseudo) dissipation visqueuse, il est toujours négatif. Il s'écrit aussi :

$$\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle .$$

Toujours par manipulations de Navier Stokes et prise de moyenne (on ne confondra pas les dérivées par rapport à l'indice k et k du k -epsilon !!!), on peut obtenir l'équation exacte de transport pour ε :

$$\begin{aligned} \rho U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon = & - 2\mu U_{i,k} (\langle u'_{k,j} u'_{i,k} \rangle + \langle u'_{j,i} u'_{j,k} \rangle) \\ & - 2\mu \langle u'_{i,j} u'_{i,k} u'_{k,j} \rangle - \mu \partial_k \langle u'_k u'_{i,j} u'_{i,j} \rangle \\ & - 2\nu \partial_i \langle p'_{,j} u'_{i,j} \rangle - 2\rho\nu^2 \langle u'_{i,kj} u'_{i,jk} \rangle \\ & - 2\mu U_{i,kj} \langle u'_k u'_{i,j} \rangle + \mu \varepsilon_{,jj}. \end{aligned}$$

L'idée du modèle $k - \varepsilon$ est que l'on peut construire à partir de ces quantités une "viscosité turbulente" (on reste toujours avec les idées de la longueur de mélange) :

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

En effet il faut construire une longueur et une vitesse, $k^{1/2}$ est le choix évident de vitesse, et ε est homogène à une vitesse au cube par une longueur, l'échelle de longueur est donc $k^{3/2}/\varepsilon$. Un peu par analogie avec la loi de comportement Newtonienne, on écrira que le terme à modéliser, qui intervient dans un flux d'une loi de bilan, est proportionnel au premier gradient de la quantité dont on fait le bilan :

$$-(\langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right)$$

On consultera la littérature pour avoir tous les détails. Par exemple pour l'équation de transport de k , on garde $-\varepsilon$, on garde $P = -\langle u'_i u'_j \rangle S_{ij} = -\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ (on vérifie alors que P est bien positif); mais on modélise la partie du flux $\frac{1}{\rho} \langle u'_j p' \rangle + \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i u'_j \rangle$ comme étant $-\sigma_k^{-1} \nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j}$ (encore une "loi de comportement" reliant le flux et le gradient). Le coefficient σ_k est l'équivalent d'un nombre de Prandtl (ou d'un nombre de Schmidt). Au final :

$$U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \sigma_k^{-1} \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon.$$

σ_k est un coefficient empirique. En fait on néglige ensuite l'influence de la viscosité ν .

On fait de même pour l'équation de ε , on se doute que la modélisation des termes du membre de droite de son équation de transport n'est pas évidente... Les constantes sont obtenues en étudiant des "cas simples" et en vérifiant que l'on retrouve certaines lois expérimentales.

5.4.2 conditions aux limites.

Près de la paroi, les hypothèses introduites ne sont plus convenables. Physiquement on devrait retrouver les lois log. Pour les réintroduire on engraisse

le profil sur lequel on fait le calcul d'une épaisseur y_p . On dit que sous cette épaisseur la vitesse suit la loi log tandis qu'au dessus de cette frontière artificielle, la vitesse est solution des équations du système k- ε . On rabouotte les deux en disant que pour le système k-epsilon :

- la vitesse normale (notée U_n) est nulle sur le profil engraisé,
- la vitesse tangentielle (notée U_t) est donnée par la relation (issue de la loi logarithmique de paroi : $\sqrt{2/C_f} = 5.6 \log_{10}(R\delta/L\sqrt{\frac{C_f}{2}}) + 2.4$) et où est n est la coordonnée normale à la paroi :

$$\frac{U_t}{(\nu \partial U_t / \partial n)^{1/2}} = \kappa^{-1} \text{Log}\left(\frac{y_p}{(\nu \partial U_t / \partial n)^{1/2}}\right) + 2.4.$$

Cette relation est implicite en $\partial_n U_t$, d'où un certain ralentissement dans les calculs. Il faut de plus vérifier que l'on est bien dans la région log (où $20 < y^+ < 100$), on doit donc tester si :

$$20 < \frac{y_p}{\sqrt{(\nu \partial U_t / \partial n)}} < 100.$$

Ce type de conditions aux limites fait que le système k-epsilon est théoriquement mauvais pour déterminer la séparation de la couche limite, mais très utilisé en pratique !

5.4.3 k epsilon

Au final il faut résoudre, les équations de Navier Stokes moyennées avec l'hypothèse de fermeture turbulente et les deux équations de transport (compte tenu des valeurs empiriques) :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad \text{et} \quad \rho U_i \frac{\partial}{\partial x_j} U_i = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \langle u'_i u'_j \rangle).$$

$$\langle u'_i u'_j \rangle = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{avec} \quad \nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

$$U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} ((\nu + \sigma_k^{-1} \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j}) - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon.$$

$$U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} ((\nu + \sigma_\varepsilon^{-1} \nu_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}) - c_1 \frac{\nu_t \varepsilon}{k} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k}.$$

$$c_\mu = 0.09, \quad c_1 = 1.44, \quad c_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

avec sur les parois engraisées d'une épaisseur y_p limitant le fluide :

$$U_n = 0, \quad \frac{U_t}{(\nu \partial U_t / \partial n)^{1/2}} = \kappa^{-1} \text{Log}\left(\frac{y_p}{(\nu \partial U_t / \partial n)^{1/2}}\right) + 2.4 \quad \text{où} \quad 20 < \frac{y_p}{(\nu \partial U_t / \partial n)} < 100.$$

Ce système dans sa version complète est très utilisé. Il est devenu un "standard industriel". En fait il n'est pas très bon, et d'autant plus mauvais près des parois... Les flux pariétaux (frottement et flux de chaleur) sont mal évalués.

5.4.4. Reynolds Stress Model $k - \varepsilon$

Il existe des sophistications de $k - \varepsilon$: comme le modèle RNG $k - \varepsilon$ (ReNormalization Group) qui comporte également deux équations de transport. Il existe aussi une famille de modèles appelée Reynolds Stress Models (RSM), en français modèles aux tensions de Reynolds, la fermeture est faite avec six équations de transport portant sur les six composantes du tenseur de Reynolds et une pour epsilon...

5.4.5. Méthode LES

Large Eddy Simulation, ou de manière plus correcte et en Français : "Simulation des Grandes Échelles" est une méthode récente de calcul des écoulements turbulents. De manière très très simplifiée, disons que pour résoudre les équations de NS on filtre avec un "filtre passe bas" de largeur Δx choisie de manière judicieuse. Les fluctuations de petite taille sont alors modélisées de manière ad hoc, les fluctuations de grande longueur d'onde sont elles résolues numériquement. Une autre manière de résoudre est de se placer dans l'espace de Fourier et lors de la résolution distinguer les modes supérieurs à une certaine fréquence de coupure k_c (qui est $\pi/\Delta x$) des modes inférieurs.

Au final on passe toujours par l'introduction d'une viscosité turbulente. Par exemple la viscosité turbulente de "Smagorinsky" est obtenue simplement à partir de la longueur caractéristique de coupure Δx et le tau de cisaillement sous la forme :

$$\nu_t = (C_s \Delta x)^2 (2S_{ij}S_{ij})^{1/2}.$$

C_s est une constante empirique $C_s \sim 0.1$

Pour diminuer ν_t près de la paroi on multiplie par un coefficient de type Van Driest comme nous l'avons déjà vu : $(1 - e^{-y^+/A^+})^2$; $A^+ = 26$.

5.4. Autres exemples classiques :

Couette, le tuyau, le sillage, le jet, le panache, les couches limites d'équilibre, la couche de mélange...



FIG. 10 – la forme du jet est à peu près indépendante du nombre de Reynolds.

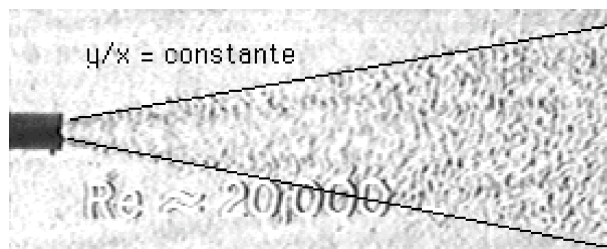


FIG. 11 – L'ouverture (y/x) du jet est constante.

5.5. Application à la thermique.

5.5.1 lois de paroi

Nous seront assez brefs, et nous n'examinons ici que le cas de la plaque plane dans un écoulement uniforme incompressible, à coefficients constants. Le problème dynamique est donc découplé du problème thermique, et nous l'avons étudié plus haut. L'équation de la chaleur devient :

$$\langle u \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} - \langle v'T' \rangle \right) + etc$$

Bien entendu, par analogie avec les fermetures visqueuses, on définira un nombre de Prandtl turbulent tel que :

$$- \langle v'T' \rangle = \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y}$$

Une approximation usuelle est de prendre $Pr_t = 0.85$. On peut définir une température de friction :

$$T_\tau = - \langle q_w \rangle / (\rho c_p u_\tau) \text{ et définir } \theta^+ = \frac{\langle T \rangle - T_w}{T_\tau}.$$

On peut mettre en évidence un profil de température universel :

- avec une région linéaire (pour $y^+ < 20$) :

$$\frac{\langle T \rangle - T_w}{T_\tau} \sim \frac{y\nu Pr_t}{u_\tau}$$

- et une région logarithmique :

$$\frac{\langle T \rangle - T_w}{T_\tau} \sim \frac{Pr_t}{\kappa} \text{Log}\left(\frac{y\nu}{u_\tau}\right) + C(Pr),$$

avec la valeur empirique :

$$C(Pr) \sim 13.7Pr^{2/3} - 7.5$$

une autre qui est proche à quelques pourcents :

$$C(Pr) \sim ((3.85Pr^{1/3} - 1.2)^2 + 2.12\text{Log}(Pr))$$

Donnons une valeur simple empirique du Nusselt moyen pour une plaque plane de longueur L :

$$Nu_L \sim 0.03Re_L^{4/5}.$$

5.5.2. Relation de fermeture de type Cebecci Smith

L'adaptation à l'équation de la chaleur de la relation de fermeture de type Cebecci Smith conduit alors à introduire le coefficient de diffusivité turbulente (le α laminaire est $k/\rho c_p$) :

$$- \langle v'T' \rangle = \alpha_t \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y}.$$

on prend près de la paroi :

$$\alpha_t = \kappa \kappa_T y^2 \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right| (1 - e^{-y^+/A^+})(1 - e^{-y^+/B^+})$$

avec :

$$A^+ = 26, B^+ = 35, \quad \kappa = 0.41, \kappa_T = 0.44 \quad y^+ = u_\tau y / \nu$$

puis en s'éloignant

$$\alpha_t = 0.0168 U_0 \delta_1 Pr_t^{-1}.$$

avec Pr_t le nombre de Prandtl turbulent :

$$Pr_t = \kappa \kappa_T (1 - e^{-y^+/A^+})(1 - e^{-y^+/B^+})$$

qui est vite égal à 0.91.

5.5.3. Modèle $k - \varepsilon$

Cette loi logarithmique précédente servira de loi de paroi dans le cadre de la résolution par les équations de transport $k - \varepsilon$. L'équation supplémentaire est écrite sous la forme (avec h enthalpie du fluide, k_f est ici la constante de la loi de Fourier, pour éviter de confondre k et k) :

$$U_i \frac{\partial(\rho h)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((k_f(1 + Pr_t^{-1}) \frac{\partial h}{\partial x_j}) \right) + U_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}.$$

5.6 Résumé

Pour $R > 10^5$ l'écoulement est turbulent sur une plaque plane. On retiendra l'allure du profil de vitesse et ses trois couches (linéaire/ logarithmique/ de défaut).

La résolution passe ensuite par un processus de moyenne et une modélisation pour la fermeture du système :

- modélisation à zéro équation : longueur de mélange
- modélisations intégrales : utilisation de profils expérimentaux (chapitre suivant et PC 6)
- méthode $k - \varepsilon$ (la plus utilisée en pratique)
- méthode Large Eddy Simulation.

5.7 Bibliographie ¹

- J. Cousteix (1989) : "Turbulence et couche limite", ed Cepadues.
- T. Cebeci & J. Cousteix (1999) "Modeling and computation of boundary layer flows", Springer.
- H. Gersten & H. Herwig (1992) "Strömungsmechanik" Ed. Viewig.
- Ha Minh Hieu (1991) "Physique et modélisation de la turbulence en écoulement de fluides", école de printemps de MFN, Aussois 91.
- P.-Y. Lagrée, "Transferts Thermiques et Massiques dans les fluides", cours ENSTA, chapitre Transferts turbulents.
- L. Landau & E. Lifshitz (1989) "Mécanique des fluides" ed MIR.
- Mohammadi & O. Pironneau (1994) "Analysis of the k-epsilon turbulence model", Wiley & Masson.
- J. Piquet (1983) : "La turbulence et sa modélisation" ENSTA.
- R. Schistel (1993) "Modélisation et simulation des écoulements turbulents".
- Schlichting (1987) "Boundary layer theory" Mac Graw Hill.
- H.Tennekes & J.L Lumley (1978) : "A first course in turbulence" MIT Press.
- "Turbulence" Encyclopaedia Britannica (cassette vidéo).

¹ 11/09

