

Généralités, équations de la thermomécanique des fluides.

Résumé

Dans ce chapitre nous rappelons que les équations de la dynamique et de la thermique proviennent de l'application de la "Thermodynamique des Processus Irréversibles". La T.P.I. décrit une extension de la "thermodynamique classique" aux "milieux continus". Nous nous gardons ici de faire la théorie complète "propre", nous préférons rappeler rapidement les idées qui sont utilisées. Il s'agit seulement d'introduire les quantités utiles pour établir l'"équation de la chaleur" avec ses conditions aux limites. Les conditions aux limites simplifiées pratiques mettant en jeu le coefficient d'échange seront présentées dans le chapitre suivant.

1 Généralités

1.1 Problème

Connaissant une géométrie dans laquelle s'écoule un fluide, des conditions aux limites et toutes les caractéristiques physiques du fluide et du solide, il nous faut en déduire l'élévation de température, le flux à fournir pour chauffer ou à évacuer pour refroidir...

1.2 Exemples

- étudiant.e.s dans un amphi (chacun.e est une source de 70W)
- chauffage central/ centrale nucléaire/ centrale thermique
- navette spatiale
- réacteurs chimiques : chauffer pour apporter l'énergie de la réaction chimique, ou au contraire refroidir une réaction exothermique.
- moteurs thermiques (voitures avions...)... car pour faire fonctionner un moteur, il faut une source chaude et une source froide...
- la cuisine, de la cuisson à la décongélation...
- processeur, échauffement des composants électroniques
- l'alternance des saisons, les moussons, El Niño..
- ...
- tout !

2 Cadre de la théorie :

Il s'agit en fait d'un rappel de ce que nous avons vu en thermo"statique" dans notre jeunesse, où les échanges étaient toujours produits par des suites d'états d'équilibres quasi statiques et où la dynamique était en fait absente. Notre cadre est celui de la mécanique des "milieux continus". Le milieu est dit "continu" lorsqu'il est étudié à une échelle très supérieure à celle des variations discrètes dues au caractère corpusculaire de la matière. Ces variations rapides sont lissées (une des échelles fondamentales pour un gaz est le libre parcours moyen des molécules, nous en reparlerons plus loin). Le but du jeu est d'adapter la thermostatique à un milieu qui n'est pas homogène, on va donc définir par exemple une énergie interne locale $e(x, y, z, t)$. Mais qui dit énergie, dit conservation ; donc il faut auparavant écrire les lois de bilan.

2.1 Lois de conservation

Les équations fondamentales (*Basic Equations*) de la mécanique des "milieux continus" expriment les lois générales de la physique indépendamment des propriétés "spéciales" des matériaux. Les lois de conservation (*Balance Laws*) pour un domaine D de frontière ∂D peuvent être en toute généralité écrites sous la forme :

variation temporelle = terme de flux + création intérieure

$$\frac{d}{dt} \int_D a dv = - \int_{\partial D} J_A ds + \int_D \varphi_A dv$$

a est la quantité qui est conservée (par unité de masse on posera $a = \rho A$), elle est d'ordre tensoriel quelconque. J_A est le flux associé, φ_A est le terme source volumique.

On écrit aussi

$$\frac{d}{dt} \int_D a dv + \int_{\partial D} J_A ds = \int_D \varphi_A dv$$

Attention on distingue cette équation, qui est une loi de bilan, de l'équation de dérivation de l'intégrale qui permet de la réécrire :

$$\frac{d}{dt} \int_D a dv = \int_D \frac{\partial}{\partial t} a dv + \int_D \underline{\nabla} \cdot (a \underline{u}) dv = \int_D \left(\frac{\partial}{\partial t} a \right) dv + \int_{\partial D} (a \underline{u}) d\underline{S}.$$

Bien entendu, on passe ensuite de la conservation globale à la conservation locale, mais il faut garder à l'esprit que la forme utile pour les schémas numériques et pour la construction générale de la théorie est bien la forme globale. Cette étape de passage au local est délicate, notamment dans le cas où il y a des chocs et où des discontinuités apparaissent (voir le cours d'écoulements compressibles). L'"équation locale" associée à la loi de conservation de a est, comme, compte tenu de la conservation de la masse

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{\rho} \right) = \frac{d}{dt} a - \left(\frac{a}{\rho} \right) \frac{d}{dt} \rho = \frac{d}{dt} a + a \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

et compte tenu de la dérivation d'intégrale, on obtient la forme locale de conservation :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{\rho} \right) + \underline{\nabla} \cdot \underline{J}_A - \varphi_A = 0.$$

Les lois classiques de conservation de la masse de la quantité de mouvement et de l'énergie (nous anticipons en fait sur la suite pour fixer les idées) sont alors :

	a	J_A	φ_A
masse	ρ	0	0
qtt mvt	$\rho \underline{u}$	$-\underline{\underline{\sigma}}$	\underline{f}
énergie	$\rho(e + \frac{1}{2}u^2)$	$\underline{q} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}$	$\underline{f} \cdot \underline{u} + r$

Les équations sont mises sous "forme conservative".

En pratique on peut donc écrire

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho(e + \frac{1}{2}u^2) dv + \int_{\partial D} (\underline{q} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) ds = \int_D \underline{f} \cdot \underline{u} dv + \int_D r dv$$

en dérivant

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t} \rho(e + \frac{1}{2}u^2) dv + \int_D \underline{\nabla} \cdot (\rho(e + \frac{1}{2}u^2) \underline{u}) dv + \int_{\partial D} (\underline{q} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) ds = \int_D \underline{f} \cdot \underline{u} dv + \int_D r dv$$

en regroupant, et comme $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{I} + \underline{\underline{\tau}}$ et $\rho e + p = \rho(e + p/\rho) = \rho h$

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t} \rho(e + \frac{1}{2}u^2) dv + \int_D \underline{\nabla} \cdot (\rho(h + \frac{1}{2}u^2) \underline{u}) dv + \int_D \underline{\nabla} \cdot (\underline{q} - \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{u}) dv = \int_D \underline{f} \cdot \underline{u} dv + \int_D r dv$$

2.2 Vecteur densité flux de chaleur

Il faut ensuite exprimer les relations constitutives entre les quantités qui interviennent au bord (les flux J_A) et les quantités internes a , les sources φ_A étant données : c-à-d, il faut ensuite exprimer les relations constitutives entre le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, le vecteur flux de chaleur \underline{q} et les champs des vitesses et de température. Les sources \underline{f} et r sont des grandeurs données. Le tenseur des contraintes nous est bien connu (nous rappellerons au passage son obtention). Ici nous nous intéressons particulièrement au vecteur \underline{q} . Par définition \underline{q} est le vecteur courant de chaleur (ou densité de flux de chaleur). Il est tel que le taux de chaleur reçu par conduction dans le domaine D est égal par définition à :

$$\dot{Q} = \int_{\partial D} -\underline{q} \cdot \underline{n} ds$$

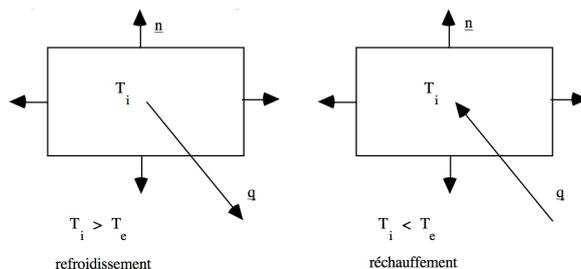


FIGURE 1 – Le flux de chaleur est dans le sens chaud/ froid.

le signe $-$ résulte de la convention adoptée : car \underline{n} est la normale extérieure. Les unités de ce vecteur sont manifestement une puissance par une surface.

Il s'agit maintenant d'établir la loi de comportement pour \underline{q} . Le corpus de la "thermodynamique classique" nous est connu, il traite des phénomènes à l'équilibre en temps et en espace, c'est pourquoi on désignera plutôt la thermodynamique classique sous le nom de "thermostatique". Tout ce que l'on en sait est toujours valable, mais le problème est qu'ici le fluide s'écoule : il y a donc mouvement et donc non équilibre, on fait bien de la thermo" dynamique"... Pour lever cette difficulté, il faut introduire une hypothèse simplificatrice.

2.3 Thermodynamique des Processus Irréversibles

Cette hypothèse fondamentale est "l'hypothèse de l'état local associé" : bien que le système soit en mouvement (donc en déséquilibre), chaque unité de volume élémentaire peut être considérée comme approximativement en équilibre du point de vue thermodynamique. Ce qui veut dire aussi que la mécanique des milieux continus est, non seulement, l'étude des phénomènes à des échelles de longueur plus grandes que les échelles atomiques, mais encore à des échelles de temps plus longues que celles qui permettent à l'assemblée de particules contenues dans ce volume élémentaire de retourner à l'équilibre "thermostatique". Bien entendu, cette approche très puissante possède elle-même des limitations. Elle est donc qualifiée de "Thermodynamique Irréversible Classique" lorsque l'on fait de la "Thermodynamique Irréversible Étendue"... Mais c'est une autre histoire !

Reprenons donc les Principes de la thermostatique et étendons les.

— P0

La thermostatique postule par le principe zéro la possibilité d'équilibre thermodynamique et une sorte de transitivité d'équilibre (A en équilibre avec B, B en équilibre avec C, donc A et C en équilibre). L'existence d'un transfert d'énergie d'une classe à l'autre définit ainsi la notion de température hiérarchisant les classes d'équivalence lors de leur transfert d'énergie.

— P1

Le premier principe définit l'énergie interne et le fait que la variation de l'énergie (interne et cinétique) d'un système est égale à la somme du travail des forces extérieures et de la quantité de chaleur reçue. En mécanique des milieux continus, cette énergie est celle contenue dans l'élément de volume considéré soit : $\rho(e + \frac{1}{2}u^2)$. La variation est temporelle, il s'agit donc de puissances des efforts et de taux de chaleur reçu, au final (après simplification par la conservation de quantité de mouvement et avec le tenseur des taux de déformation $D_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}$ ou encore $\underline{D} = \frac{\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^t}{2}$) :

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\sigma} : \underline{D} - \nabla \cdot \underline{q} + r.$$

Le théorème de l'énergie cinétique est

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -\underline{\sigma} : \underline{D} + \nabla \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{u}) + \underline{u} \cdot \underline{f}$$

la somme des deux est bien la forme conservative présentée dans le tableau de la page précédente. La variation d'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la somme des puissances des efforts intérieurs ($\underline{\sigma} : \underline{D}$) et extérieurs ($\nabla \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{u}) + \underline{u} \cdot \underline{f}$) qui s'exercent sur le volume de contrôle. La variation

d'énergie interne ne tient compte que la la puissance des efforts intérieurs ($\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$) plus les échanges de chaleur ($-\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{q}} + r$).

— **P2**

Le second principe postule l'existence de l'entropie, nous utiliserons donc s l'entropie par unité de masse. Cette fonction s est une fonction d'état des variables e et $(1/\rho)$ telle que par définition :

$$ds = \frac{de}{T} + \left(\frac{p}{T}\right)d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

($-pd(1/\rho)$ est le fameux travail réversible " $-PdV$ ").

En mécanique on écrira (puisque par conservation de la masse on peut faire disparaître $d(1/\rho)/dt$ car : $\rho^{-1}d(\rho)/dt + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{u}} = 0$) :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + p \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{u}}.$$

L'équation issue de **P1** s'écrit donc aussi (en décomposant le tenseur des contraintes en sa partie réversible et une autre $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$) :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} - \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{q}} + r.$$

On peut écrire cette équation sous une forme de variation temporelle avec flux et création intérieure (par intégration par parties) :

$$\rho \frac{ds}{dt} = (-\underline{\nabla} \cdot \frac{\underline{\underline{q}}}{T} + \frac{r}{T}) + \left[\frac{1}{T}\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{q}} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{T}\right].$$

On voit que l'on peut comparer cette formule à l'inégalité fondamentale de la thermostatique qui est :

$$\Delta S \geq \frac{\Delta Q}{T}$$

où $S = \int_D \rho s dv$ est l'entropie totale du volume considéré, et la quantité de chaleur est

$$\int_D r dv + \int_{\partial D} -\underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{n}} ds$$

donc, on identifie la création d'entropie notée $\rho \dot{\sigma}$ à $[\frac{1}{T}\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{q}} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{T}]$.

$$\rho \frac{ds}{dt} + \underline{\nabla} \cdot \left(\frac{\underline{\underline{q}}}{T}\right) - \frac{r}{T} = \rho \dot{\sigma} \geq 0.$$

l'excès positif $\dot{\sigma}$, est le taux de production irréversible d'entropie spécifique. Parfois la variation de S est écrite sous la forme d'une somme de deux contributions, une externe et une interne :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d^e S}{dt} + \frac{d^i S}{dt}$$

avec

$$\frac{d^e S}{dt} = \int_{\partial D} \left(\frac{-\underline{\underline{q}}}{T}\right) \cdot \underline{\underline{n}} ds + \int_D \frac{r}{T} dv \quad \text{et} \quad \frac{d^i S}{dt} = \int_D \rho \dot{\sigma} dv$$

Bien entendu, une des dernières conséquences de l'hypothèse de l'état local est que les propriétés de convexité sont toujours vérifiées. Cela permet de retrouver que la chaleur spécifique (c_v) est positive ainsi que le coefficient de compressibilité isotherme $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T$.

2.4 Inégalité de Clausius Duhem

En éliminant la création de chaleur volumique r avec l'équation de l'énergie et l'inégalité de l'entropie, on obtient l'"inégalité de Clausius Duhem" (Duhem 1861-1916) :

$$\rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \frac{\underline{\underline{q}}}{T} \cdot \underline{\nabla} T \geq 0.$$

Cette inégalité est fondamentale, elle est le socle de la thermodynamique des processus irréversibles (elle est écrite en général avec l'énergie libre (notée ψ) et $d\psi + sdT = de - Tds$ ce qui donne $-\rho(\frac{d\psi}{dt} + s\frac{dT}{dt}) + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \frac{q}{T} \cdot \nabla T \geq 0$.)

En faisant apparaître dans $\underline{\underline{\sigma}}$ la partie réversible (pression) $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$, on en déduit que pour que le second principe soit vérifié :

$$\rho T \dot{\sigma} = \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} - \frac{q}{T} \cdot \nabla T \geq 0.$$

Cette relation met en évidence les sources d'irréversibilité que sont la dissipation visqueuse et la dissipation thermique. Si on introduit d'autres phénomènes (auxquels seront associés des "travaux"), il faudra bien distinguer la partie réversible et la partie irréversible. La première entrera dans la définition de s (par l'introduction de nouvelles variables d'état), la seconde sera un nouveau terme source pour $\dot{\sigma}$. Ces sources sont absentes de la thermostatique (où les déplacements étaient quasistatiques, donc pas de $\underline{\underline{D}}$, et où la température était toujours uniforme, donc pas de ∇T).

2.5 Lois constitutives

On a donc plus d'inconnues que de champs, il convient de fermer le système en introduisant des relations entre $\underline{\underline{\sigma}}$ (6 inconnues), q (3 inconnues),... et ρ , \underline{u} et e (4 champs) car il n'y a uniquement que 5 équations. Pour ce faire, il convient alors de remarquer que le taux de création d'entropie a une structure bilinéaire :

$$\rho \dot{\sigma} = \Sigma_{\alpha} J_{\alpha} X_{\alpha},$$

où les J_{α} sont des "flux" et les X_{α} des "forces" (cette définition possède un certain arbitraire). Leur rang tensoriel est quelconque, et ils ont la propriété d'être nuls à l'équilibre. Dans le cas du transfert de chaleur on identifie : $X_{\alpha} = \nabla T^{-1}$ et $J_{\alpha} = q$.

La nature est complexe, mais pas trop ! Cela nous guide pourrait choisir une forme simple de q en fonction de l'écart de T et de la pression. Autour d'une position d'équilibre $T = T_e$, il n'y a pas de variations de $1/T$, X est bien nul. Par développement limité au voisinage de $X = 0$ et $J = 0$:

$$J = 0 + (\partial J / \partial X)_e X + O(X^2)$$

en posant $L = (\partial J / \partial X)_e$, on en déduit la forme $J = LX$. En posant $k = \frac{L}{T^2}$, on en déduit la forme la plus simple, parmi les formes compliquées pour l'expression du flux de chaleur :

$$q = -k \nabla T$$

C'est la loi de Fourier, comme cette notation est historique (1847), on lui préfère cette forme avec le gradient de la température à celle issue de la théorie (plus récente) avec le gradient de l'inverse de la température. Si k le coefficient de conductivité thermique est positif (et comme T est toujours positif), on a bien :

$$\frac{k}{T} (\nabla T)^2 \geq 0.$$

De même (avec le même type d'arguments appliqués aux tenseurs), dans le cadre de cette théorie du premier gradient on a :

$$\underline{\underline{\tau}} = \lambda \nabla \cdot \underline{\underline{u}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{D}}$$

ou encore :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \lambda \nabla \cdot \underline{\underline{u}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{D}}$$

λ et μ sont les "coefficients de Lamé" du fluide, μ est la "viscosité" (notée η par certains anglo-saxons), on dit aussi que μ est la viscosité dynamique. $K = \lambda + 2/3\mu$ est le coefficient de viscosité volumique. On note $\nu = \mu/\rho$ la viscosité cinématique.

Un fluide qui suit cette loi est un fluide newtonien.

Pour que la dissipation $\dot{\sigma}$ soit positive, on montre qu'il faut que $K > 0$, $k > 0$ et $\mu > 0$. Si ces deux dernières conditions sont bien connues, en revanche $\lambda + 2/3\mu > 0$ l'est moins. Pour un gaz monoatomique : $\lambda + 2/3\mu = 0$, pour un gaz comme l'air, on prend souvent $\lambda = -2/3\mu$, c'est inexact, comme l'ont montré des études en acoustique, mais c'est une approximation usuelle. Ces coefficients dépendent de la température. Leur forme est

obtenue expérimentalement.

Par exemple, pour l'air, μ suit bien la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = (1.711 \cdot 10^{-5}) \sqrt{\frac{T}{273}} \left(\frac{1 + 110.4/273}{1 + 110.4/T} \right)$$

et la conductivité thermique est

$$k(T) = \frac{2.64638 \cdot 10^{-3} T^{3/2}}{T + 254.4 \cdot 10^{-12/T}}$$

et pour mémoire :

$$\lambda + 2/3\mu = (7.821 \exp(-16.8T^{-1/3}))\mu.$$

On peut envisager des complications possibles : par exemple les fluides non newtoniens (μ dépend des invariants du tenseur \underline{D} ...), des théories du second gradient *etc.*

2.6 Mécanismes physiques de transferts...

La théorie précédente est indépendante de ce qui se passe à petite échelle, mais il est intéressant de repartir de la description physique microscopique, pour ensuite trouver la forme macroscopique.

Les Gaz

Pour mémoire, on peut évaluer ces coefficients en repartant de théories microscopiques (thermodynamique statistique). Le cas des gaz monoatomiques est le plus simple, la définition de la température est liée à l'énergie cinétique moyenne ($E_c = \frac{1}{2}m \langle u^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$, ne pas confondre la constante de Boltzmann et la constante de Fourier), la capacité calorifique s'en déduit facilement. Pour aborder les transferts, il faut tenir compte de la taille des atomes (la "section efficace de collision", notée σ , ne pas confondre avec la contrainte!) et supposer que les transferts se produisent lors des chocs. Les coefficients de transport mettent en jeu le libre parcours moyen λ (ne pas confondre avec le coefficient de Lamé!) entre deux chocs, par exemple on peut montrer assez facilement que k est *grosso modo* proportionnel à :

$$k \simeq \rho C_v \langle u \rangle \lambda$$

λ est le libre parcours moyen, $\langle u^2 \rangle$ la vitesse quadratique moyenne. L'ensemble des volumes balayés par les particules dans leur mouvement est le volume entier donc : $n\lambda\sigma \simeq 1$, où σ est la section efficace n le nombre de molécules par unité de volume (k se comporte donc en \sqrt{T}).

Dans les gaz, les coefficients de transport sont du même ordre de grandeur que ce soit pour la viscosité ou pour le coefficient de diffusivité thermique (nous en reparlerons lorsque nous discuterons le nombre de Prandtl). Les phénomènes et les équations se ressemblent beaucoup :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u.$$

on pose $Pr = \frac{\mu c}{k}$, nombre de Prandtl.

Dans le cas des gaz l'ordre de grandeur de un est naturel car le mécanisme de transport de chaleur et celui de quantité de mouvement est le même. Il s'agit tout simplement de chocs entre les molécules. On peut alors relier μ à $\rho \langle u \rangle \lambda$...

On peut être expliquer la différence entre les fluides simples mono ou diatomique et les macro molécules par le fait que les chocs entre macromolécules transmettent la quantité de mouvement mais qu'il est plus difficile de transmettre la chaleur car l'énergie acquise sert à déployer la molécule ou à exciter ses nombreux états internes (rotation et vibration).

Solides/ Liquides

L'expression déduite de la mécanique statistique et de la mécanique quantique de la capacité calorifique est claire : les atomes vibrent autour de leur état d'équilibre. Au premier ordre il s'agit donc d'une assemblée d'oscillateurs harmoniques quantifiés (les fameux "phonons"). L'expression des coefficients de transport dans le cas des liquides et des solides est en revanche plus obscur. La conduction de la chaleur est très bonne car elle n'est pas du même type (il ne s'agit pas de chocs de molécules). Dans les liquides, selon l'hypothèse initiale de Debye (1912), le transfert de chaleur se fait par vibrations non linéaires des atomes autour de leur état d'équilibre (les

phonons n'étant pas de vraies particules ne se "choquent" pas, les ondes linéaires se superposant). Le phénomène est en fait complexe, les premières simulations de Fermi- Pasta- Ulam puis de Kruskal et Zabusky (1965) ont fait apparaître des solitons : il n'y avait donc pas de mise à l'équilibre thermique (voir Kittel). A noter qu'un deuxième mode de transfert de chaleur est possible : (sodium liquide ou mercure). Il se fait par l'intermédiaire des électrons de conduction électrique. Ce dernier processus est très efficace : ce sont de bons conducteurs thermiques qui ont une capacité calorifique élevée...

Le nombre de Prandtl n'est donc pas toujours d'ordre un.

En fait dans le cas des liquides, il faut passer à l'"*Extended Irreversible Thermodynamics*" ou plus simplement "*E.T.*" (qui fait en plus apparaître les variations des flux par rapport au temps dans les relations constitutives), cela permet d'éviter les problèmes de vitesse infinie de propagation de la chaleur. Cattaneo a introduit un temps de relaxation :

$$\tau \frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \underline{q} = -k \underline{\nabla} T, \quad \text{avec} \quad \tau \simeq 10^{-13} \text{ s.}$$

Une théorie sophistiquée récente (Lebon 98) fait intervenir 13 coefficients.

Mais oublions ces subtilités étranges de la "thermodynamique du 3ème type" "E.T." !! (le clin d'oeil est assumé par les experts du domaine : cf. le livre de Lebon), les constantes de temps mises en jeu sont clairement hors du domaine des applications courantes (moins de la pico seconde). D'un point de vue pratique, on ne retiendra que : $\underline{q} = -k \underline{\nabla} T$. Avec k exprimé en $W/m/K$

Ordre de grandeur du nombre de Prandtl $Pr = \frac{\mu c}{k}$

Pour un gaz simple il est d'ordre 1

Hélium, Hydrogène Azote	$\simeq 0.7$
dioxyde de carbone	$\simeq 0.75$
vapeur d'eau	$\simeq 1.06$
air	$\simeq 0.7$
Amoniaque	$\simeq 2$

* pour les liquides Pr est d'autant plus grand que le liquide est "huileux" :

Eau	$\simeq 7$
Glycérine	$\simeq 12.5$
verre fondu	$\simeq 100 \text{ à } 10^3$
Huile de moteur	$\simeq 10400$

* pour les métaux liquides (ou fondus) il est très petit.

mercure	$\simeq 0.025$
sodium liquide	petit petit
soleil	$\simeq 10^{-9}$

2.7 Quelques valeurs de k



Fourrier (sic) dans la fresque "La Fée Électricité" R. Dufy (1936-1937, Paris, musée d'Art moderne de la Ville de Paris) photo PYL

La loi de Fourier

$$\underline{q} = -k \nabla T, \text{ avec } k \text{ en } W/m/K$$

k		matériau	k en $Wm^{-1}K^{-1}$	$k/(\rho c_p)$ en m^2s^{-1} .
0.01	gaz	air	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$
0.1		bois	0.13	$2.4 \cdot 10^{-7}$
1	liquides	glycérine	0.29	$0.98 \cdot 10^{-7}$
		eau	0.60	$1.44 \cdot 10^{-7}$
100	métaux	mercure	8.0	$4.2 \cdot 10^{-6}$
		granit	2.51	$1.1 \cdot 10^{-6}$
		acier	46	$1.2 \cdot 10^{-5}$
		alu	200	$0.86 \cdot 10^{-4}$
		argent	418	$1.71 \cdot 10^{-4}$

Remarques

- $k(T)$ croît avec la température pour les gaz
- $k(T)$ décroît avec la température pour le cuivre, le zinc, les aciers doux, le plomb, mais croît avec la température pour l'aluminium et les aciers inoxydables
- $k(T)$ est quasi constant pour les huiles de moteur
- $k(T)$ pour l'eau augmente avec T , puis diminue (culmine vers 400K)
- Tous les ouvrages de thermique ont des tables avec les valeurs des différents matériaux à différentes températures...

2.8 Valeurs de la capacité calorifique

Les termes de l'équation de l'énergie nous sont donc maintenant acquis :

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} + r.$$

reste l'énergie interne elle même. Nos souvenirs de thermostatique nous ont fait définir deux écritures de la différentielle dQ (coefficients de Clapeyron) ;

$$dQ = c_v dT + l dv \quad \text{ou} \quad dQ = c_p dT + h dp.$$

Donc

$$de = c_v dT + (l - p) dv$$

ou

$$dh = c_p dT + (h - v) dp$$

Par définition : $c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v$ à volume constant et $c_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_p$ à pression constante. Le cas d'un solide est particulièrement simple, les coefficients l et h sont très petits et c_v et c_p sont confondus. Des mesures expérimentales permettent d'obtenir les capacités calorifiques en fonction de la température. ici à 300K

	c_p J/kg/K	ρ kg/m ³	k W/m/K (m ² s ⁻¹)	$(a = k/\rho c_p)$
Alu	903	2702	237	97 10 ⁻⁶
brique	835	1900	0.72	
Acier	480	8000	15	
Fer	447	7870	72	
cuiivre	380	8933	400	
glace	2.0	920	1.88	
chêne	1.3	720	0.16	

...

(d'un point de vue thermodynamique statistique la capacité calorifique suit la loi de Dulong Petit)

le cas des gaz et des liquides est différent car, *a priori*, l'énergie interne e dépend de deux variables thermodynamiques (par exemple $e(s, \rho)$).

Nous verrons plus en détail, en peu plus loin lors du chapitre de ce cours relatif à la "Convection Naturelle & convection libre" le calcul (classique en thermostatique à partir des relations de Clapeyron et de Maxwell) qui mène à l'expression de l'énergie suivante, $e = h - p/\rho$:

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dt}, \quad \text{avec } p(\rho, T)$$

Dans le cas d'un gaz parfait (qui est une très bonne approximation pour les gaz usuels) où $p = \rho r T$ il reste

$$\frac{de}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}(rT) \quad \text{ou encore} \quad \frac{de}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}$$

avec $c_p - c_v = r$, $\gamma = c_p/c_v$ etc, et il nous est aussi bien connu pour un gaz parfait monoatomique $c_v = 3/2r$, et $c_p = 5/2r$ pour l'air $\gamma = 1.4$, $r = 286$, $c_v = 715$, $c_p = 1000$.

Néanmoins, si on étudie un fluide dans l'approximation incompressible c'est le c_p qui est important.

	$c_p 10^{-3}$ J/kg/K	ρ kg/m ³	$k 10^3$ W/m/K
air (250 K)	1.006	1.39	22.3
air (293K)			
air (300K)	1.007	1.16	26.3
NH ₃ (300K)	2.158	0.69	24.7
He(300K)	5.193	0.16	152
O ₂ (300K)	0.92	1.28	26.8
H ₂ -Ovap(380K)	2.06	0.58	24.6

pour les liquides, les effets de la pression étant faibles, on a de même $de \simeq c_p(T)dT$.

	$c_p 10^{-3}$ J/kg/K	ρ kg/m ³	$k 10^3$ W/m/K
eau	4.18	1000	610
fréon	0.97	1.3	73
huiles moteur	1.9	800	145

L'équation de la chaleur s'écrit alors pour ces milieux immobiles :

$$\rho c(T) \frac{\partial}{\partial t} T = \nabla \cdot (k(T) \nabla T)$$

dans ce dernier paragraphe nous avons écrit l'équation de la chaleur sans mouvement. L'art et la manière de résoudre l'équation de la chaleur sans écoulement sont supposés connus, des ouvrages entiers y sont consacrés. Quelques exemples seront vus dans le chapitre suivant et en PC.

3 Le problème complet

3.1 Équations

Ces prémices philosophiques étant rappelés, les équations finales sont les "équations de Navier Stokes" (ici les plus générales possibles) pour un fluide Newtonien compressible :

équation de conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0.$$

équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}.$$

équation de l'énergie :

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \nabla \cdot \underline{q} + r.$$

relations constitutives :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \lambda \nabla \cdot \underline{u} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{D}}$$

$$\underline{q} = -k \nabla T.$$

loi d'état :

$$p(\rho, T)$$

coefficients :

$$c_v(T), \quad c_p(T), \quad \lambda(T), \quad \mu(T), \quad k(T) \dots$$

conditions aux limites T_w **OU** q_w imposés, adhérence à la paroi.

C'est le problème complet pour le fluide. En toute généralité, il faudrait en plus résoudre l'équation de la chaleur (problème de conduction pure) dans les parois qui le bordent, dans ce cas il faut assurer la continuité de T_w **ET** q_w (ou plus exactement de sa composante normale) entre le fluide et le solide.

Puisque l'on a toutes les relations (formes locales + équations constitutives + conditions aux limites...), il "suffit" de résoudre.

3.2 Différents mécanismes

Avant de résoudre plus précisément les équations, nommons rapidement chacun des différents mécanismes que l'on peut mettre en jeu. Pour cela, observons chacun des termes de variation de l'énergie interne

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} + r.$$

- on peut ne retenir que les termes du problème de conduction :

$$\rho c \frac{\partial}{\partial t}(T) = k \underline{\nabla}^2 T$$

- on peut ne retenir que les termes liés à la convection forcée par le mouvement du fluide :

$$\rho c \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T = k \underline{\nabla}^2 T$$

- il y a aussi la convection libre : pas d'écoulement imposé mais ρ varie avec T , donc par l'existence de la gravité ($\underline{f} = \rho \underline{g}$), la variation de densité produit le mouvement.

- Enfin nous disons un mot très rapide sur le rayonnement. Dans ce cas il y a création volumique d'énergie par rayonnement :

$$r = K \sigma T^4$$

Le flux d'énergie du au rayonnement à la paroi est de la forme :

$$\varepsilon \sigma S T^4$$

ε émissivité (caractéristique de la surface), K constante liée au caractère plus ou moins transparent du fluide...
 S aire du corps, T Température, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

Les problèmes de rayonnement ne sont pas simples et nécessitent des techniques particulières faisant l'objet d'ouvrages entiers. Aux températures courantes $\simeq 300\text{K}$ (en général en dessous de 800K) disons que le flux thermique par rayonnement est négligeable par rapport au flux de diffusion, il peut ne pas en être de même dans un réacteur chimique où l'on chauffe beaucoup ou dans une fonderie... Une première approche consiste alors à linéariser le flux de chaleur par rayonnement.

3.3 Exemples :

Reprenons les exemples précédents et caractérisons mieux leurs différents mécanismes :

- centrale nucléaire/ train à vapeur/ frigos/ distillation du calvados : échangeur de vapeur (convection forcée) (on notera que la technologie des fleurons de l'industrie de pointe nucléaire n'est pas si éloignée des machines à vapeur d'il y a 2 siècles, et des alambics du moyen age...)
- chauffage d'une pièce par un radiateur (rayonnement et convection libre)
- l'anémométrie à fil chaud (le moyen de mesure des vitesses en souffleries)
- moteur chaud/ à refroidir convection forcée
- panneau solaire : rayonnement, convection naturelle pour l'air (mais forcée pour le fluide calorporteur).
- four micro onde $r = KI^2$ (I Amplitude de l'onde E.M.)
- le potiron d'Halloween
- météorologie : tous les phénomènes imbriqués !

Quel sera le régime dominant ? Quels termes faut il garder ? c'est tout le problème du cours de Thermique et tout l'art du Thermicien.

4 Résumé et Conclusion

- Il faut savoir que les équations de la thermomécanique sont compliquées et proviennent de considérations subtiles de thermodynamique (c'est à dire d'extension de la thermostatique à un milieu continu au cas où il y a mouvement). Leur forme générale est indiquée au § 1.4.1.

Un résumé ultime de la *Thermodynamique* sera (avec $\frac{dW}{dt} = -P_{int}$) :

$$\begin{aligned} \text{premier principe :} & \quad \frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \\ \text{second principe définition de } S : & \quad dS = \frac{dE}{T} + \frac{dW_{rev}}{T} \\ \text{avec} & \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_{irrev}}{dt} + \frac{dQ_{rev}}{dt} \\ \text{et avec} & \quad \frac{dW}{dt} = \frac{dW_{irrev}}{dt} + \frac{dW_{rev}}{dt} \\ \text{second principe définition de l'irréversibilité :} & \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ_{rev}}{dt} + \dot{\sigma} \end{aligned}$$

par élimination, "l'inégalité de Clausius Duhem" :

$$\dot{\sigma} = \left(\frac{dS}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dE}{dt} \right) + \frac{1}{T} \frac{dQ_{irrev}}{dt} + \frac{1}{T} \frac{dW}{dt} > 0$$

c'est à dire

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{T} \frac{dQ_{irrev}}{dt} + \frac{1}{T} \frac{dW_{irrev}}{dt} > 0$$

- Il est bon d'avoir compris et retenu l'enchaînement logique : lois de conservation et premier principe lié aux puissances, second principe, lois de comportement. Cette démarche reservira pour les transferts de masse. Conceptuellement elle sert à construire des théories pour des matériaux compliqués.

- Ces équations ont été codées (et le seront encore) dans de nombreux codes commerciaux ou universitaires utilisés par les bureaux d'études et les centres de recherche.

- Mais, il ne faut pas céder à la facilité (c'est à dire allumer l'ordinateur et cliquer partout)!

En conséquence la résolution numérique directe (devenue incontournable) doit être épaulée par l'analyse phénoménologique, et surtout par des vérifications expérimentales... L'analyse phénoménologique, en schématisant les écoulements, permet de dégager les mécanismes principaux et sert donc de guide pour "comprendre" et "expliquer" l'écoulement : le résultat d'un calcul brut n'est rien s'il ne peut être expliqué.

Bibliographie ¹

- Jean Dhombres & Jean-Bernard Robert (1998) : "Joseph Fourier", Belin : collection "Un savant, une époque"
- P. Glansdorff & I. Prigogine (1971) "Structure, stabilité et fluctuations" Masson, 288p (ISBN 2-2252-9690-1)
- P. Germain Q.S. Nguyen & P. Suquet (1983) "Continuum Thermodynamics" Transaction of the ASME, Vol 50, december, pp. 1010- 1020.
- P. Germain (1986) "Mécanique X" T I & T II, Ellipses.
- Jou D., Casas- Vasquez J. & Lebon G. (1996) "Extended Irreversible Thermodynamics", 2nd edition, Springer Berlin.
- Kittel (1985) "Physique de l'état solide" Masson.
- P.-Y. Lagrée (2018), cours ENSTA, Généralités, équations de la thermomécanique des fluides.
- G. A. Maugin (1995) "Thermomechanics of complex irreversible behaviours".
- I. Müller (1995) "Thermodynamics", Pitman Advanced Publishing Program.
- J. Padet (1997) "Principes des transferts convectifs" Polytechnica .
- J.F. Sacadura Transferts thermiques – Initiation et approfondissement. Coord., éditions Lavoisier (2015).

1. Clintro.tex OK le 13 février 2019

page blanche