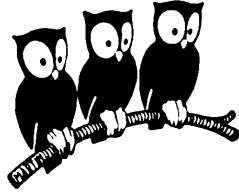


ECOLE NORMALE SUPERIEURE
Département de Physique



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI
spécialité : Physique Théorique

Dynamique des Superfluides:
Nucléation de vortex et
Transition de phase du premier ordre.

présentée par

Christophe JOSSERAND

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris VI

Soutenance prévue le 24 Septembre 1997 devant le jury composé de :

Rapporteurs : M. P. COULLET
M. P. CLAVIN

M. H. BERESTYCKI
M. D. D'HUMIERES
M. M. MOREAU
M. Y. POMEAU
M. A. PUMIR
M. S. RICA

Table des matières

Introduction générale	3
Partie I Théorie cinétique et Hélium superfluide.	5
1 L'Hélium Superfluide	7
1.1 Spectre d'excitations et critère de Landau	7
1.2 Le Modèle à deux fluides	7
1.3 Vortex quantiques	8
2 Cinétique quantique	9
3 Propriétés de l'équation de Gross-Pitaevskiĭ	13
3.1 Densité et vitesse superfluides	13
3.2 Spectre d'excitation	14
3.3 Vortex quantiques dans G-P	14
3.4 Longueur de cohérence	14
3.5 L'équation adimensionnée	15
Partie II Nucléation de vortex.	17
Chapitre 1 Instabilités des solitons gris de NLS	19
1 Solitons de NLS.	19
2 Stabilité des solitons.	20
3 Collapse du soliton	22
4 Critères de nucléation des vortex.	25
5 Conclusion	27
Chapitre 2 Transition transonique dans NLS	29
1 Introduction	29
2 Equation de phase stationnaire	29
3 L'équation d'Euler-Tricomi	33

4	Propriétés de l'équation d'Euler-Tricomi	36
5	Solution homogène de l'équation d'Euler-Tricomi	38
6	Equations d'amplitudes	40
Partie III Modèle de superfluide avec transition liquide/vapeur		45
Chapitre 1 Ecoulements dans l'équation de Schrödinger non-linéaire sous-critique		47
1	Introduction	47
2	L'équation de Schrödinger non-linéaire sous critique	48
3	Propriétés de l'équation SNLS	51
4	Écoulement autour d'un obstacle	54
4.1	Métastabilité du liquide	55
4.2	Instabilité du liquide	55
4.3	Critère de nucléation de vortex	55
4.4	Comparaison des vitesses pour l'écoulement autour d'un disque	55
5	Interprétation des résultats numériques	56
5.1	Écoulements stationnaires	56
5.2	Transition vers la dissipation	57
6	Conclusion	59
Chapitre 2 Cavitation par explosion puissante		61
1	La cavitation.	61
2	Expérience dans l'Hélium Superfluide.	61
2.1	Focalisation d'ondes hémisphériques.	61
2.2	Observation expérimentale.	62
3	Explosion puissante dans SNLS	62
4	Cavitation par explosion	63
5	Physique de l'explosion.	65
6	Conclusion-Perspectives	68
Partie IV Coalescence dans un système diphasique		69
1	Optique Non-Linéaire	71
2	Coalescence dans un système linéairement instable	72
3	Solutions solitaires de SNLS.	77
4	Stabilité des solutions solitaires	79
5	Auto-similarité et exposants d'échelle	80

5.1	Facteur de structure en dimension deux ($\rho_0 \simeq \rho_c$)	81
5.2	Résultats en une et trois dimensions spatiales	84
5.3	Dépendance à la densité moyenne	84
5.4	Explication des lois d'échelle	84
6	Conclusion.	86
Conclusion		87
Annexe A Calcul		89
1	Calcul des conditions de solvabilités	89
Bibliographie		93
Publications		95

Introduction générale

Depuis sa liquéfaction par K. Onnes en 1908 à Leyden, l'Hélium, par ses propriétés spectaculaires et par sa simplicité atomique, a été l'objet d'attention tant par les expérimentateurs que par les théoriciens. Gaz rare, tardivement découvert en 1868 par Janssen, il n'en existe que deux isotopes stables: l' He^4 auquel cette thèse réfère, et l' He^3 beaucoup plus rare.

De par les faibles interactions entre les atomes, l'Hélium fut le dernier élément à être liquéfié et il reste même liquide lorsque l'on tend vers le zéro absolu pour des pressions de quelques bars. Il reste ainsi liquide à des températures où les effets quantiques deviennent prépondérants.

Théoriquement, Lev Landau expliqua la superfluidité et développa par là même le concept de quasi-particule [1]. La modélisation de l'Hélium superfluide présente d'ailleurs de multiples intérêts: modélisation d'un liquide quantique, étude d'un liquide inviscide via une équation différentielle originale, propriétés générales des équations aux dérivées partielles.

Cette thèse traite donc de différents modèles de superfluides et s'articule autour de quatre parties.

Tout d'abord nous dérivons l'équation de Schrödinger Non-Linéaire de manière originale, en étudiant les équations hiérarchiques d'une théorie cinétique quantique dans une limite simple.

Puis, nous nous intéressons à la nucléation de vortex dans un tel modèle, d'une part par instabilité de solitons propres du modèle, d'autre part par transition transonique autour d'un obstacle. Afin d'améliorer l'équation modèle, en vue de reproduire la transition de phase liquide/gaz que respecte l'Hélium, nous dérivons et étudions pour un écoulement simple une équation différentielle de Schrödinger sous-critique.

Finalement, cette équation permet d'étudier la coalescence par décomposition spinodale dans un système liquide gaz où les deux états stables ont des propriétés radicalement différentes.

Première partie

**Théorie cinétique et Hélium
superfluide.**

1 L'Hélium Superfluide

Pour une température $T_\lambda = 2.17$ Kelvin, l'Hélium⁴ liquide admet une transition de phase du second ordre. En dessous de cette température, qui décrit ce que l'on appelle le point- λ , l'Hélium adopte plusieurs propriétés inhabituelles dont la plus connue est la superfluidité: le liquide peut alors s'écouler sans frottement à l'intérieur d'un capillaire mince, pour de faibles vitesses. Deplus, au delà d'une certaine vitesse, l'écoulement n'est plus inviscide.

1.1 Spectre d'excitations et critère de Landau

La superfluidité fut expliquée par L. Landau, en 1941, dans un article qui lui valut le Prix Nobel.[1]

Il établit notamment la forme du spectre d'excitation de plus basse énergie $\epsilon(p)$ (\mathbf{p} étant le moment associé à l'excitation), le seul important à très basses températures. Il met en avant les deux propriétés fondamentales de ce spectre (voir figure):

- pour les faibles moments, les excitations sont typiquement des phonons: $\epsilon = c \cdot p$, c étant la vitesse du son dans l'Hélium ($\sim 250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$);
- autour d'un moment plus élevé, correspondant à une longueur d'onde légèrement inférieure à la dimension atomique de l'Hélium⁴, le spectre admet un minimum.

Landau montre alors, via une analyse effectuée à température nulle comparant l'énergie d'un liquide quantique en translation à vitesse uniforme \mathbf{v} , le long d'un mur dans le référentiel propre au liquide d'une part, dans le référentiel attaché à l'obstacle d'autre part, que le mur peut émettre une excitation de moment \mathbf{p} , et donc ainsi le liquide être freiné si et seulement si:

$$v \geq \frac{\epsilon(p)}{p}$$

Ainsi, pour des vitesses telles que:

$$v \leq \min_p \frac{\epsilon(p)}{p}$$

le liquide s'écoule sans frottement le long du mur.

Ce critère de transition, appelé critère de Landau, entre un écoulement superfluide et un écoulement dissipatif, est donc fondé simplement sur les propriétés du spectre d'excitation. Il permet notamment de montrer qu'un gaz de Bose-Einstein sans interaction n'est jamais superfluide.

1.2 Le Modèle à deux fluides

A température finie, on peut considérer qu'une partie du liquide est composé d'excitations thermiques (essentiellement des phonons à basse température); d'autre part le fluide adopte, hors de ces excitations, un mouvement collectif similaire à celui décrit à température nulle.

Le modèle à deux fluides consiste donc à séparer la dynamique du superfluide à température non nulle, en celle d'un fluide normal, composé des excitations et qui transporte notamment l'entropie, et celle d'un superfluide à température nulle. On définit alors en tout point une densité et une vitesse respectivement normales (ρ_n et \mathbf{v}_n) et superfluides (ρ_s et \mathbf{v}_s) telles que:

$$\rho = \rho_s + \rho_n$$

$$\rho \mathbf{v} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n$$

où ρ et \mathbf{v} sont la densité et la vitesse du fluide.

1.3 Vortex quantiques

Dans son article, Landau met l'accent sur le fait que le rotationnel de la vitesse, dans un liquide quantique, n'admet pas une transition continue entre un écoulement potentiel et un mouvement vortical. Onsager, plus tard, suggère que la circulation du champ de vitesse dans un superfluide est quantifiée, le quantum de circulation valant: $\frac{h}{m}$ [2].

Ces quanta de vorticité correspondent à des lignes vorticales, où la densité superfluide s'annule. Ainsi, dans le modèle à deux fluides, le superfluide est en fait en écoulement potentiel.

2 Cinétique quantique

Afin de modéliser un superfluide de type Hélium 4, nous nous plaçons dans le cadre d'une théorie d'un système de Bosons avec interactions, à température nulle. Cela revient à négliger, dans le cadre de la théorie à deux fluides de Landau, la présence de fluide normal et son interaction avec la partie superfluide. On peut en effet noter que, pour une température de l'ordre de 1 degré Kelvin le fluide normal ne représente encore qu'un pourcent de la densité totale. Cependant, les possibilités de transformation et d'échange entre les composantes normale et superfluide du liquide jouent un rôle fondamental dans les processus hydrodynamiques (interactions avec les obstacles, conditions au bord, coeur des vortex...). Notre modèle, à l'ordre considéré ne prend donc pas du tout en compte ces transformations possibles de superfluide en fluide normal et vice-versa. Notamment, l'inexistence d'entropie dans cette modélisation nous interdit de considérer tout flux de chaleur et changement de température. En ce sens, le modèle décrit un système à température nulle certes, mais étant donné la faible présence de fluide normal jusqu'à des températures de l'ordre du Kelvin, il peut s'appliquer aussi à un superfluide à faible température, à la restriction près que cette température est figée et que l'on ne considère pas du tout l'équilibre et les échanges thermique dans le fluide.

Notre système étant à température nulle, il se trouve naturellement dans son état fondamental. Cependant, cet état admet, si l'on tient compte des contraintes de type hydrodynamique qu'on lui impose (écoulement collectif, présence d'obstacle, vibrations...), une dynamique non- triviale, que nous allons décrire à l'aide du formalisme des matrices densités.

Ainsi la fonction d'onde de N bosons peut s'écrire:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N; t)$$

où $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ sont les positions des N bosons (nous utiliserons de manière équivalente, pour simplifier, l'écriture $\mathbf{1}$ à la place de \mathbf{x}_1 , $\mathbf{2}$ à la place de \mathbf{x}_2 ...). Ψ est une fonction symétrique des positions des particules et vérifie la condition de normalisation:

$$\int |\Psi|^2 d\mathbf{1} d\mathbf{2} \dots d\mathbf{N} = 1.$$

Son évolution temporelle est régie par l'équation de Schrödinger, avec pour Hamiltonien:

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(\mathbf{1}, \mathbf{2} \dots \mathbf{N})$$

Où les \mathbf{p}_i représentent les impulsions des particules i , m la masse de chaque particule et $U(\mathbf{1}, \mathbf{2} \dots \mathbf{N})$ le terme d'interaction entre les particules (nous supposons qu'il ne dépend pas explicitement du temps). Utilisant la relation $\mathbf{p}_i = \frac{\hbar}{i} \nabla$, le Hamiltonien du système s'écrit finalement:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i + U(\mathbf{1}, \mathbf{2} \dots \mathbf{N})$$

l'équation de Schrödinger pour cette fonction d'onde à N particules s'écrit alors:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i \Psi + U \Psi$$

Nous n'allons considérer dans un premier temps que les interactions à deux particules, *i.e.* que le terme d'énergie d'interactions s'écrit:

$$U(\mathbf{1}, \mathbf{2} \dots \mathbf{N}) = \sum_{i < j} u(x_{i,j})$$

avec $x_{i,j} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$.

L'hypothèse de champ moyen consiste à considérer que la portée du potentiel u , $1/\gamma$, est grande devant la distance inter-atomique. Ainsi les fluctuations du nombre de particules dans la sphère d'interaction peuvent être négligées. Un potentiel de portée $1/\gamma$ peut s'écrire en général:

$$u(\mathbf{r}) = \gamma^D w(\gamma r)$$

D étant la dimension de l'espace physique. Notons enfin que pour l'Hélium superfluide, la section efficace de diffusion, qui avec notre écriture, ne dépend pas de γ , est positive (forces de répulsion entre les atomes):

$$\int w(r) d\mathbf{r} > 0$$

Nous allons donc faire tendre $\gamma \rightarrow 0$ dans ce cadre, ce qui revient bien à prendre la portée des interactions grandes devant la section efficace de diffusion. Ainsi, notre étude cinétique se fera dans le cas où il y a beaucoup de particules dans la sphère d'interaction.

Connaissant la fonction d'onde du système, on peut donc expliciter la matrice densité à N particules:

$$R_N(\mathbf{1}, \mathbf{2} \dots \mathbf{N}; \mathbf{1}', \mathbf{2}' \dots \mathbf{N}'; t) = N! \Psi(\mathbf{1}, \mathbf{2} \dots \mathbf{N}; t) \Psi^*(\mathbf{1}', \mathbf{2}' \dots \mathbf{N}'; t)$$

Plus généralement on définit la matrice densité réduite, d'ordre k , comme étant la trace sur $N - k$ coordonnées de la matrice densité (au facteur de normalisation près):

$$R_k(\mathbf{1}, \mathbf{2} \dots \mathbf{k}; \mathbf{1}', \mathbf{2}' \dots \mathbf{k}'; t) = \frac{1}{(N - k)!} \int d\mathbf{k} + \mathbf{1} \dots d\mathbf{N} \\ R_N(\mathbf{1} \dots \mathbf{N}; \mathbf{1}' \dots \mathbf{k}', \mathbf{k} + \mathbf{1} \dots \mathbf{N}; t)$$

Ces matrices sont symétriques des positions des particules (comme ψ) et par définition hermitiques:

$$R_k(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_k; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k; t) = R_k^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k; \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_k; t)$$

Remarquons de plus que, grâce à la normalisation introduite, $R_1(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ représente la densité de particules en \mathbf{x} .

La dynamique de la matrice densité à N particules s'écrit alors:

$$i\hbar \frac{\partial R_N}{\partial t} = \mathcal{H} R_N - \mathcal{H}' R_N$$

où \mathcal{H}' est l'hamiltonien appliqué aux variables primes.

Ainsi, pour chaque matrice densité réduite d'ordre k , l'équation d'évolution s'écrit:

$$i\hbar \frac{\partial R_k}{\partial t}(\mathbf{1} \dots \mathbf{k}; \mathbf{1}' \dots \mathbf{k}'; t) = \sum_{i=1}^k -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_i - \Delta_{i'}) R_k + \sum_{i < j \leq k} (u(x_{ij}) - u(x_{i'j'})) R_k \\ + \int d(\mathbf{k} + \mathbf{1}) \sum_{i=1}^k (u(x_{i(k+1)}) - u(x_{i'(k+1)})) R_{k+1}(\mathbf{1} \dots \mathbf{k} + \mathbf{1}; \mathbf{1}' \dots \mathbf{k}', \mathbf{k} + \mathbf{1}; t) \quad (0.1)$$

avec la convention $R_{N+1} = 0$.

Cette dynamique peut-être considérée comme une équation hiérarchique pour une théorie cinétique quantique. Ainsi l'équation d'évolution de la matrice réduite d'ordre k fait appel à la somme de toutes les interactions entre une de ces k particules avec une des $N - k$ autres particules; ce

terme de collision fait ainsi apparaître la matrice d'ordre $k + 1$. Notons que cette hiérarchie ne relie les matrices densités réduites que de proche en proche (R_1 avec R_2 , puis R_2 avec $R_3...$) et que cela est la simple conséquence que l'on a pris un potentiel d'interaction ne comportant que les interactions à deux particules. Par exemple lorsque l'on tient compte des interactions à trois particules, l'équation d'évolution de la matrice densité d'ordre k mettra en jeu les matrices réduites d'ordre $k + 1$ et $k + 2$.

Les matrices densités étant reliées à des variables physiques du problème tels que la densité de particules en un point, on peut considérer que, dans la limite $\gamma \rightarrow 0$, les R_k sont toutes d'ordre 0 en γ . On peut ainsi évaluer l'ordre en γ des deux derniers termes de l'équation (0.1):

-la contribution $\sum(u(\mathbf{x}_{ij}) - u(\mathbf{x}_{i',j'}))R_k = \gamma^D \sum(w(\gamma\mathbf{x}_{ij}) - w(\gamma\mathbf{x}_{i',j'}))R_k$ est donc d'ordre $k^2\gamma^D$

-en revanche, l'intégrale :

$$\begin{aligned} & \int d(\mathbf{k} + \mathbf{1}) \sum_{i=1}^k (u(\mathbf{x}_{i(k+1)}) - u(\mathbf{x}_{i'(k+1)})) R_{k+1}(\mathbf{1} \dots \mathbf{k} + \mathbf{1}; \mathbf{1}' \dots \mathbf{k}', \mathbf{k} + \mathbf{1}; t) \\ &= \int \gamma^D d(\mathbf{k} + \mathbf{1}) \sum_{i=1}^k (w(\mathbf{x}_{i(k+1)}) - w(\mathbf{x}_{i'(k+1)})) R_{k+1} \\ &= \int d\mathbf{r} \sum_{i=1}^k (w(|\mathbf{x}_i - \mathbf{r}|) - w(|\mathbf{x}_{i'} - \mathbf{r}|)) R_{k+1}(\mathbf{1} \dots \frac{\mathbf{r}}{\gamma}; \mathbf{1}' \dots \mathbf{k}', \frac{\mathbf{r}}{\gamma}; t) \end{aligned}$$

est d'ordre 0 en γ (on suppose pour cela que R_{k+1} varie peu sur une portée du potentiel, de telle sorte que le fait d'intégrer R_{k+1} sur \mathbf{r} avec l'argument \mathbf{r}/γ n'apporte pas de contributions significatives en γ).

On voit donc que pour des valeurs de k telles que $k^2\gamma^D \ll 1$, le terme de collision direct est négligeable et on remarque alors que pour les petits k , il existe une solution factorisée du problème. Ecrivons simplement, ψ étant un champ complexe:

$$R_k(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{k}; \mathbf{1}' \dots \mathbf{k}'; t) = \psi(\mathbf{1}; t) \cdot \psi(\mathbf{2}; t) \dots \psi(\mathbf{k}; t) \cdot \psi^*(\mathbf{1}'; t) \dots \psi^*(\mathbf{k}'; t)$$

Sous cette condition, l'équation (0.1) pour R_k devient:

$$\begin{aligned} R_k \sum_{j=1}^k i\hbar \left(\frac{\partial_t \psi(\mathbf{j}; t)}{\psi(\mathbf{j}; t)} + \frac{\partial_t \psi^*(\mathbf{j}'; t)}{\psi^*(\mathbf{j}'; t)} \right) &= -\frac{\hbar^2}{2m} R_k \sum_{j=1}^k \left(\frac{\Delta_j \psi(\mathbf{j}; t)}{\psi(\mathbf{j}; t)} - \frac{\Delta_{j'} \psi^*(\mathbf{j}'; t)}{\psi^*(\mathbf{j}'; t)} \right) \\ &+ R_k \int d(\mathbf{k} + \mathbf{1}) \sum_{j=1}^k (u(\mathbf{x}_{j(k+1)}) - u(\mathbf{x}_{j'(k+1)})) |\psi(\mathbf{k} + \mathbf{1}; t)|^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne par séparation l'équation d'évolution de la fonction d'onde ψ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}; t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{x}; t) + \psi(\mathbf{x}; t) \int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}; t)|^2 u(\mathbf{r}) \quad (0.2)$$

Nous venons ainsi de dériver l'équation de Gross-Pitaevskiï, appelée aussi équation de Schrödinger non-linéaire (que l'on écrira G-P). La justification de cette équation comme équation modèle d'un superfluide n'est pas claire: Pitaevskiï, d'une part, établit cette équation dans le cadre d'une théorie phénoménologique pour la transition de phase proche du point lambda de l'Hélium 4; il décrit cette transition à l'aide d'un paramètre d'ordre complexe $\psi(\mathbf{r}) = \eta e^{i\phi}$ tel que la densité superfluide ρ_s et la vitesse superfluide \mathbf{v}_s lui soient reliées par [4] [5]:

$$\rho_s(\mathbf{r}) = m_{He} |\psi(\mathbf{r})|^2; \quad \mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{r})$$

m_{He} , masse de l'atome d'Hélium.

Cette théorie est donc valide à priori seulement pour des températures proches de T_λ et pour de faibles densités superfluides.

D'autre part, s'inspirant du calcul effectué par Bogolubov pour un gaz de boson raréfié et faiblement dégénéré (*i.e.* qu'il n'a considéré que de faibles répulsions entre paire d'atomes) [6], à température nulle, il retrouve cette équation pour l'évolution de l'opérateur champ dans une écriture du problème en deuxième quantification. [8]

Gross, par ailleurs[7], utilisant l'approximation d'Hartree, c'est à dire qu'il considère toutes les particules dans le même état quantique (il écrit donc la fonction d'onde du système sous la forme: $\Psi(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{N}; t) = \prod g(\mathbf{i})$, décrit l'équation d'évolution de cette fonction d'onde pour une particule à l'aide de l'équation de Gross-Pitaevskiï. A nouveau, considérer toutes les particules dans le même état semble être une approximation trop violente pour que l'on puisse se satisfaire d'une telle approche.

Notre dérivation de l'équation de G-P semble, à première vue, éviter ces écueils; en effet, nous considérons que la fonction ψ solution de G-P ne factorise que les matrices densités réduites d'ordre très faible, *i.e.* qu'en aucun cas la fonction d'onde du système ne peut être considérée comme factorisable; notre calcul s'établit de plus dans la limite gaz dense, plus appropriée à l'Hélium liquide. En fait, l'Hélium liquide ne peut ni être considéré comme un gaz dense, ni comme un gaz dilué: la portée des interactions $1/\gamma$, vaut $3.5A$, tandis que la densité particulaire est $n \sim 1/45 \text{atome} \cdot A^{-3}$. Il n'y a donc que quelques atomes dans la sphère d'interaction.

Toute la validité du calcul tient dans le fait que l'on fait tendre γ , la portée des interactions vers zéro, tout en gardant la section efficace totale constante. On a considéré ces deux longueurs caractéristiques indépendamment, or elles sont liées l'une à l'autre; faire tendre l'une vers zéro en gardant l'autre constante n'est donc pas réaliste; cependant cela permet de montrer une dérivation formellement correcte de G-P.

Cette approche de champ moyen pour une théorie cinétique quantique est d'ailleurs fortement inspirée de celle développée par Kac, Uhlenbeck et Hemmer [9] pour dériver l'équation de Van Der Waals rigoureusement: de même, la limite $\gamma \rightarrow 0$, peu réaliste pourtant, permettrait d'obtenir l'équation d'état des gaz.[10]

3 Propriétés de l'équation de Gross-Pitaevskiï

L'équation de Schrödinger non-linéaire est intégrable à une dimension spatiale (elle ne l'est plus au delà) et sa dynamique possède principalement deux invariants:

- le nombre de particule, le système est conservatif:

$$N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}$$

- l'énergie totale, la dynamique est hamiltonienne, *i.e.* que l'on peut définir l'énergie \mathcal{H} telle que $i\hbar\partial_t\psi = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\psi^*}$:

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{r} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + |\psi(\mathbf{r})|^2 \int ds u(|\mathbf{r} - \mathbf{s}|) |\psi(\mathbf{s})|^2 \right)$$

De plus, il est important de noter que G-P admet quatre symétries conséquences des invariances suivantes:

- invariance par translation.
- invariance de phase (symétrie $U(1)$).
- invariance galiléenne: $\psi(\mathbf{r} - \mathbf{v} \cdot t; t) e^{im(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - v^2 t/2)/\hbar}$ est solution de G-P si $\psi(\mathbf{r}; t)$ l'est.
- invariance par dilatation: $\lambda\psi(\lambda\mathbf{r}; \lambda^2 t)$ est solution de G-P si $\psi(\mathbf{r}; t)$ l'est.

3.1 Densité et vitesse superfluides

On a défini $R_1(1; \mathbf{1}'; t)$ de telle sorte que $R_1(1; \mathbf{1}; 1)$ soit la densité particulière de fluide. Ainsi si on écrit la fonction d'onde ψ sous la forme:

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{-ip\hbar}$$

ρ n'est rien d'autre que la densité du fluide.

De même, le courant de particules peut s'écrire:

$$\vec{j}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(N-1)!} \frac{\hbar}{2i} \int_{\mathbf{R}'=\mathbf{R}} d\mathbf{2} \dots d\mathbf{N} (\vec{\nabla}_R - \vec{\nabla}_{R'}) R_N(\mathbf{R}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{N}; \mathbf{R}', \mathbf{2}, \dots, \mathbf{N}; t)$$

Ce qui donne pour la vitesse du superfluide, déterminée par $\vec{j} = m\rho \cdot \vec{v}$ (m masse de chaque particule du fluide):

$$\vec{v} = -\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \phi$$

On peut alors écrire le système d'équations hydrodynamiques équivalent à G-P:

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{0.3}$$

$$\partial_t \phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \rho^{1/2}}{\rho^{1/2}} + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \phi)^2 + \int ds u(\mathbf{r} - \mathbf{s}) \rho(\mathbf{s}) \tag{0.4}$$

La première équation (0.3) est l'équation de continuité tandis que la seconde (0.4) correspond à l'équation de Bernoulli pour un fluide parfait irrotationnel ($\frac{\hbar}{m}\phi$ potentiel de vitesse) modulo le terme en laplacien que l'on appelle le terme de pression quantique (il s'annule dans la limite $\hbar \rightarrow 0$).

3.2 Spectre d'excitation

Les solutions homogènes de l'équation s'écrivent sous la forme, en fonction de la densité homogène ρ_0 :

$$\psi_0(\mathbf{r}; t) = \sqrt{\rho_0} e^{-\frac{E_0 t}{\hbar}}$$

avec la fréquence $E_0 = \rho_0 \int d\mathbf{r} u(r)$; les perturbation linéaires autour d'une telle solution donnent l'équation de dispersion (pour $\psi = \psi_0 + \delta\psi e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})/\hbar}$):

$$\hbar\omega_k = \frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\frac{k^4}{4} + \frac{m}{\hbar^2} \rho_0 v(k) k^2}$$

avec $v(k) = \int u(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ la transformée de Fourier du potentiel.

Dans la limite hydrodynamique, (grandes longueurs d'onde, $k \rightarrow 0$) les perturbations sont des phonons ($\hbar\omega_k = c_s \hbar k$) de vitesse du son:

$$c_s = \sqrt{\frac{\rho_0 v(0)}{m}}$$

G-P admet donc un spectre de phonons dans la limite hydrodynamique et satisfait alors le critère de Landau de superfluidité si $v(0) > 0$ (ce qui est vrai pour l'Hélium⁴, car $v(0)$ est par ailleurs relié à la section efficace de diffusion du fluide); de plus, Pomeau et Rica [3] ont montré que pour un potentiel $u(r)$ non-local, de type sphère molle, on pouvait retrouver le minimum roton dans le spectre des excitations.

3.3 Vortex quantiques dans G-P

Intrinséquement la fonction d'onde ψ décrit un mouvement potentiel. Ainsi, partout où ψ est non nul l'écoulement est irrotationnel; en outre, la circulation de la phase le long d'un parcours fermé doit être proportionnel à 2π afin de respecter l'univalence de la fonction d'onde ψ . Alors ψ admet des vortex en tant que défauts topologiques de codimension 2. En géométrie bidimensionnelle, il s'agit de points, à trois dimensions d'espace ce sont des lignes de vorticité.

3.4 Longueur de cohérence

Dans la limite hydrodynamique, on peut considérer $u(x) \rightarrow u(0)\delta(x)$. G-P admet alors une seule longueur caractéristique, appelée longueur de cohérence, notée ξ_0 , rentrant en jeu dans les solutions de G-P:

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\rho_0 u(0)}}$$

Pour la consistance du modèle, cette longueur de cohérence doit être plus grande que la longueur interatomique ($\sim 3.6 \text{Angst.}$). Or, partant de la vitesse du son dans l'Hélium on obtient $\xi \sim 0.47 \text{Angst.}$

La validité du modèle que l'on va étudier est mise alors à mal, et on peut accuser différentes causes de cette ab erration:

- d'une part, la dernière approximation $u(x) = u(0)\delta(x)$ a fait perdre au modèle toute liberté dans la longueur caractéristique;

-d'autre part, rappelons nous que G-P s'obtient justement en jouant sur des limites de portée d'interaction et on a donc bien chamboulé les longueurs typiques du problème pour arriver à notre modèle.

Cependant, notons que G-P, malgré ce problème présente, au regard de sa facilité d'utilisation (analytique et numérique), un nombre d'ingrédients suffisant d'une dynamique superfluide afin d'être couramment utilisée comme modèle.

3.5 L'équation adimensionnée

Durant toute cette thèse, nous allons plutôt utiliser la version adimensionnée de G-P: via des redimensionnalisations linéaires triviales du temps t et des coordonnées spatiales, on obtient l'équation;

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\Delta\psi + |\psi|^2\psi \quad (0.5)$$

Bien sûr, l'équation (0.5), que nous appellerons dorénavant NLS, possède les mêmes propriétés que G-P. Notons cependant, que pour une solution de densité homogène ρ_0 , la vitesse du son vaut alors $c_s = \sqrt{\rho_0}$ et la longueur de cohérence, $\xi_0 = 1/\sqrt{\rho_0}$.

Deuxième partie
Nucléation de vortex.

Chapitre 1

Instabilités des solitons gris de NLS

Dans les écoulements superfluides la transition vers la dissipation se manifeste souvent par l'apparition, localement, de vorticité: par exemple, Frisch, Pomeau et Rica ont montré comment, lors d'un écoulement modélisé par NLS, le dépassement de la vitesse critique en un point conduisait à la nucléation de vortex[13]. De plus, l'apparition de vortex quantifiés dans un superfluide (et bien sûr dans NLS) semble intimement li  e à la notion de vitesse critique d  velopp  e par Landau. Cependant, les observations expérimentales de ces vortex quantiques sont essentiellement indirectes (excepté pour l'expérience de Yarmchuk *et al* dont nous parlons plus bas): on observe par exemple le moment angulaire du liquide dans un cylindre en rotation [14] ou la dépendance du moment d'inertie de disques immergés dans l'Hélium liquide. Il est à noter en outre que la vitesse critique prédite par Landau, ($v_{Landau} \sim 60m \cdot s^{-1}$ dans l'H  lium⁴) est bien plus grande que les vitesses de transition réellement observ  es: $v_{obs} \sim 2 - 3cm \cdot s^{-1} \ll v_{Landau}$. Il apparaît donc clairement que d'autres causes de nucléation de vorticité sont à prendre en compte. Ainsi, lors d'une expérience r  alis  e afin de visualiser des lignes de vortex superfluides, Yarmchuk, Gordon et Packard ont remarqué que les vibrations, et plus généralement les accélérations pouvaient nucléer des lignes de vorticité: " Monotonic acceleration from rest always produces a state with fewer vortices than the absolute equilibrium state. Similarly, deceleration can produce states with more vortices than the equilibrium state" [15]. Utilisant l'instabilité des solitons monodimensionnels de NLS à plus d'une dimension nous proposons une explication possible de cette génération de vorticité.

1 Solitons de NLS.

Nous allons décrire le superfluide par la solution de NLS adimensionn  e 0.5, écrite sous la forme, le terme linéaire n'ajoutant rien à la dynamique (cela ne fait qu'ajouter un terme de fréquence constant):

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\Delta\psi - \psi(1 - |\psi|^2) \quad (1.1)$$

Cette équation admet, à une dimension, une famille de solutions exactes à un paramètre, de type soliton, se propageant à vitesse constante, appel  es solitons gris:

$$\psi(x, t) = \nu \cdot \tanh(\nu(x - \chi t)) + i\chi \quad (1.2)$$

avec ν et χ constantes ≤ 1 telles que $\nu^2 + \chi^2 = 1$.

La densité de fluide d'une telle solution est:

$$\rho = 1 - \frac{\nu^2}{ch^2(\nu(x - x_0 - \chi t))}$$

Cette solution peut donc se comprendre comme un "trou" de densité de profondeur ν^2 se déplaçant dans le fluide à vitesse constante $\sqrt{1 - \nu^2}$.

De plus, cette solution représente un saut de phase entre $+\infty$ et $-\infty$ ($\Delta\phi = 2\text{Arctan}(\frac{\chi}{\nu})$). La densité et la phase d'un soliton pour $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sont représentées sur la figure 1.1.

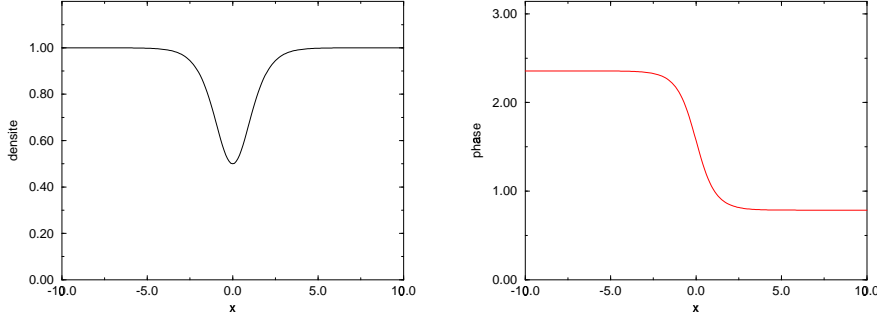


FIG. 1.1 – Profil de densité et phase d'un soliton de NLS pour $\nu = 0.707$.

En plus des propriétés typiques des solitons, une propriété remarquable de cette famille de solution, due à la non linéarité de NLS, est que plus le soliton est profond, moins il est rapide. Ceci est en effet lié au fait que la vitesse du son dans un fluide modélisé par l'équation de NLS vérifie: $c_s^2 = \rho$, ρ étant la densité moyenne autour du point considéré.

Cette solution peut bien sûr être considérée à plus d'une dimension et représente alors typiquement une solution de type onde plane solitaire (voir figure (1.2) à deux dimensions).

2 Stabilité des solitons.

À une dimension d'espace, les solitons gris sont des solutions linéairement stables de NLS, ce qui revient à dire que plus généralement ils sont stables par rapport à des perturbations longitudinales. En revanche, le front d'onde est instable aux dimensions supérieures; en effet Kusnetsov et Turitsyn ont montré que les solitons gris de NLS étaient linéairement instables à plus d'une dimension [16]: leur analyse, fondée sur la méthode inverse, utilise notamment le parallèle entre NLS et l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP) bidimensionnelle [17]:

$$\partial_t (n_t + \frac{3}{2}n \cdot n_x - \frac{1}{8}n_{xxx}) = -\frac{1}{2}n_{yy}$$

Dans la limite des petites variations de densités, le module de la fonction d'onde de NLS obéit à cette équation [18]. Les solitons d'une telle équation sont connus pour être instables par l'instabilité de Kadomtsev-Petviashvili (ou instabilité Benjamin-Feir dans les fluides).

Nous nous intéressons dorénavant au cas bidimensionnel (le passage aux dimensions supérieures n'ajoutant rien au comportement linéaire de l'instabilité) et pour clarifier nous allons considérer

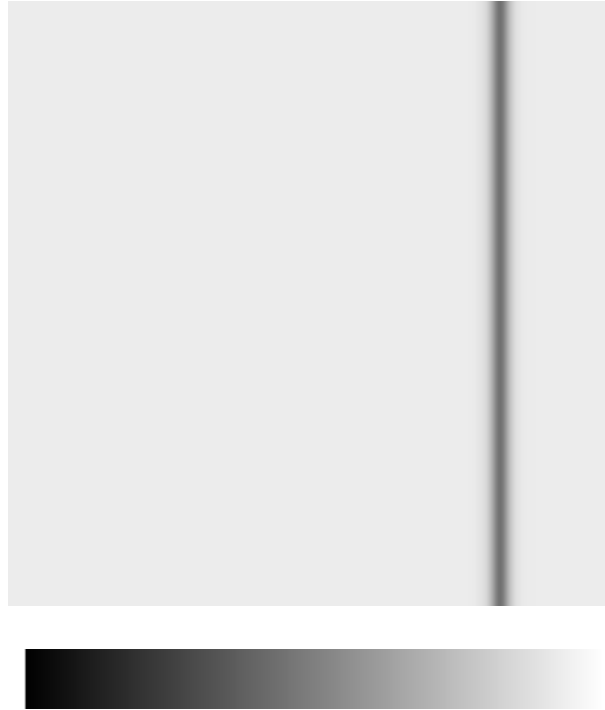


FIG. 1.2 – Soliton gris pour $\nu = 0.75$; la densité de la solution est représentée, ainsi que la palette couleur utilisée: les basses densités sont visualisées par la partie gauche de la palette (noir pour densité nulle), de manière croissante de gauche à droite. Le gris clair représente la densité liquide ($\rho = 1$) et le soliton (ligne gris foncé) va de la droite vers la gauche. Les simulations dans ce chapitre ont été réalisées sur une boîte 256×256 avec $dx = 0.5$.

que l'axe le long duquel se déplace le soliton est l'axe des-x, celui correspondant à l'invariance par translation du soliton initial étant l'axe des-y.

Cela se traduit notamment par le fait que la solution bi-dimensionnelle que l'on considère comme condition initiale s'écrit simplement comme la formule (1.2). Géométriquement, cette instabilité se comprend aisément et provient de la combinaison de deux causes: d'une part, imaginons une perturbation de densité longitudinale, *i.e.* portant sur une variation de la profondeur du soliton; la courbe de densité minimale, une droite initialement, aura alors une vitesse différente en chaque point, cette variation de vitesse étant due à la variation de la profondeur du soliton unidimensionnel que l'on peut définir le long de cette droite.

Ce problème peut s'analyser en prenant en fait comme condition initiale en $t = 0$ une solution non stationnaire où on fait varier la profondeur du soliton le long de la direction y :

$$\psi(\vec{r}, t = 0) = \nu(y) \cdot \tanh(\nu(y)x) + i\chi(y)$$

Où $\nu(y)$ est une fonction lentement variable de y . ($\nu'(y) \ll 1$) et $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$ le rayon vecteur. Cela revient à considérer que l'on peut associer à chaque ordonnée y un soliton unidimensionnel de paramètre $\nu(y)$ et en première approximation il semble clair que la dynamique de cette solution sera régie simplement par la dynamique en chaque ordonnée du soliton unidimensionnel associé.

On peut, par exemple s'intéresser au point particulier de cette droite où la profondeur du soliton associé est maximale (*i.e.* là où $\nu(y)$ est maximale): linéairement, comme on vient de le dire, chaque soliton unidimensionnel que l'on peut associer à une ordonnée y aura une vitesse de déplacement $\chi(y) = \sqrt{1 - \nu(y)}$. Alors, le profil du soliton, initialement une droite va se courber

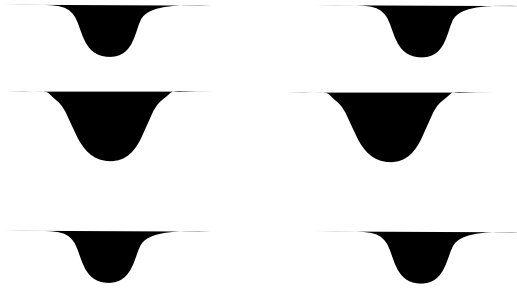


FIG. 1.3 – Explication de l’instabilité transverse: lorsque une région de la ligne du soliton est, par exemple plus profonde que ses voisines, elle avancera moins vite et ainsi la solution s’incurvera.

autour des ordonnées correspondant au maxima de $\nu(y)$ (voir figure (1.3)).

D’autre part, on peut imaginer par la pensée comme condition initiale un soliton gris légèrement incurvé; la fonction d’onde à $t = 0$ aurait la forme:

$$\psi(\vec{r}, t = 0) = \nu \cdot \tanh(\nu \vec{n}(y) \cdot \vec{r}) + i\chi$$

Avec $\vec{n}(y)$ vecteur unitaire lentement variable, quasiment parallèle à \vec{e}_x .

On peut alors réitérer l’analyse linéaire précédente consistant à dire qu’en première approximation, cette solution bidimensionnelle obéit simplement aux dynamiques propres des solitons unidimensionnels. Ainsi, dans cette approximation linéaire, le soliton associé à l’ordonnée y se déplace suivant la direction $\vec{n}(y)$ et donc une solution initiale où le profil est sinusoïdal évoluera vers une solution où la profondeur du soliton se concentrera particulièrement aux points d’inflexion du profil initial par un effet d’étirement de la solution en avant de la sinusoïde et à contrario par un effet d’accumulation pour les points en arrière du profil (voir figure (1.4); ainsi les zones de faibles densités convergent vers les régions qui sont en arrière du soliton, diminuant encore la densité de ces régions, et donc, les ralentissant, ce qui va alors augmenter à nouveau la courbure du soliton. Ce mécanisme est à proprement parler celui de l’instabilité de Benjamin-Feir.

Ces deux causes d’instabilités transverses du soliton s’accroissent l’une l’autre et on peut légitimement supposer que la moindre perturbation transverse (quelconque à priori) d’un soliton bidimensionnel, conduira par ces deux processus entremêlés à un changement du profil du soliton. L’étude numérique d’un tel problème montrera alors que le profil de la solution va dans un premier se courber, créant ainsi des dépressions de plus en plus profondes aux points d’inflexion du profil, comme nous l’avons montré précédemment; ces dépressions peuvent aboutir à un "trou", *i.e.* un endroit où la densité s’annule, ce que Turitsyn et Kusnetsov ont appelé le collapse du soliton.

3 Collapse du soliton

Afin d’observer numériquement l’instabilité à laquelle est soumise la solution, nous allons étudier un soliton à deux dimensions, solution à laquelle nous avons ajouté pendant un court instant un bruit blanc, afin d’exciter tous les modes (longitudinaux et transversaux) du système. Tout d’abord, on observe une fragmentation du soliton à une longueur d’onde transversale caractéristique: le mode le plus instable croît le plus vite, sélectionnant ainsi une longueur de

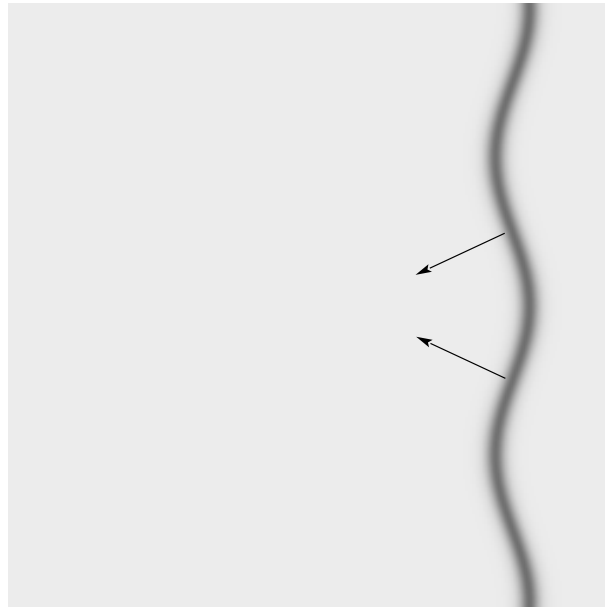


FIG. 1.4 – *Densité d'un soliton modulé sinusoïdalement; les flèches représente l'effet de cette modulation sur la direction de la vitesse du front en deux points du soliton. L'étirement longitudinal qui en résulte, près des points d'inflexion notamment, crée une modulation de la profondeur du soliton. Les zones en arrière voient leur vitesse diminuer, celle en avant, augmenter, tout ceci augmentant alors la modulation de la ligne du soliton.*

fragmentation (voir figure 1.5).

Si on observe maintenant l'évolution de la solution fragmentée sur une longueur d'onde caractéristique (le long de l'axe y), on remarque que, par le processus explicité précédemment pour les profils courbés, toute la région de basse densité (dépression), correspondant grosso modo au profil de la solution, se concentre au point d'inflexion du profil issu de la fragmentation de la solution droite. En ces points se crée alors des structures isolées de très basse densité, avançant à une vitesse nettement inférieure au soliton initial(voir figure (1.6)).

Il est clair que si la dépression totale contenue sur une longueur d'onde caractéristique de l'instabilité, concentrée en une faible région autour du point d'inflexion obtenu par la fragmentation du soliton est suffisamment grande, la densité en cette région peut s'annuler. On observe alors qu'il se forme une paire de vortex contrarotatifs en chaque point d'inflexion du profil fragmenté (voir le champ de vorticité de la fonction d'onde figure (1.7)).

Il n'était pas évident de prédire que le collapse du soliton conduirait nécessairement à la création d'une paire de vortex: d'une part, si le soliton initial est de trop faible amplitude, on observe simplement une structure dépressionnaire, ne contenant aucun champ de phase complexe de type vortex (et bien sûr en aucun point la densité ne s'annule); d'autre part, un zéro de NLS n'a pas forcément à correspondre à une solution vorticale.

En revanche, cette solution paire de vortex possède toutes les propriétés de l'écoulement étudié: la charge topologique de la paire de vortex étant nulle, elle ne change pas le champ de phase à longue portée de la solution; une paire de vortex contrarotatifs ayant une cinétique triviale de mouvement de translation uniforme à vitesse constante, cette solution respecte la conservation

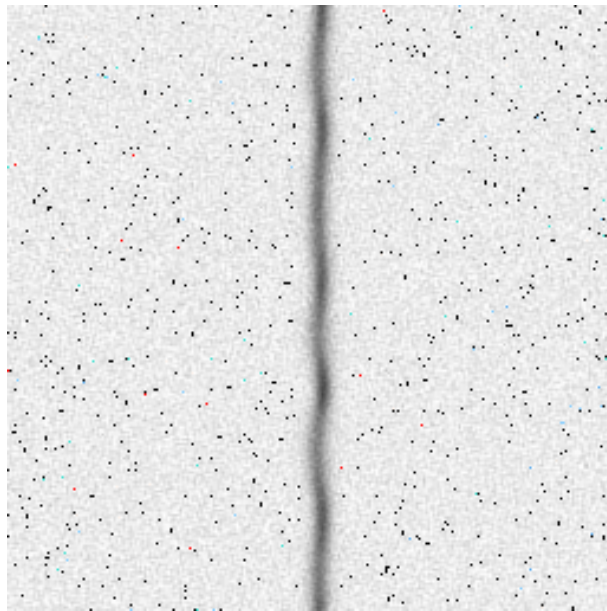


FIG. 1.5 – *densité du soliton pour $\nu = 0.75$, 30 unités de temps après avoir ajouté un bruit blanc à la solution.*

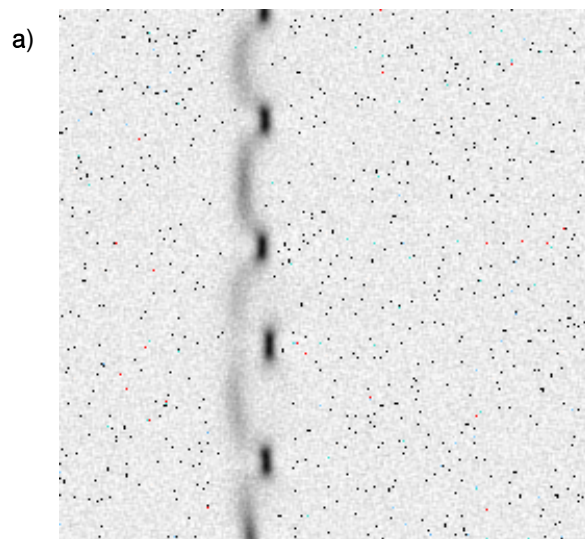


FIG. 1.6 – *Densité de la solution précédente plus tard; la fragmentation a fait convergé les zones de basse densité, créant des structures isolées de très basse densité, à tel point que l'on peut obtenir un "trou".*

b)

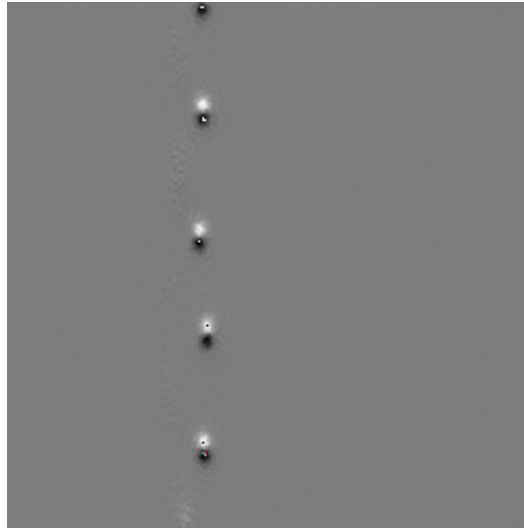


FIG. 1.7 – Le champ de vorticité de la solution de la figure précédente montre que les structures isolées sont des paires de vortex contrarotatifs (un de charge $+1$, l'autre de charge -1), les vortex étant représentés par les points blancs ou noirs (suivant le signe).

de l'impulsion contenue dans NLS.

Pour de faibles ν , l'instabilité existe mais elle ne conduit pas à la nucléation de la paire de vortex, et crée simplement une région de basse densité se déplaçant le long de l'axe horizontal à vitesse constante. Dans tous les cas (*i.e.* creux à ν faibles ou vortex à ν plus grand), après quelques centaines d'unités de temps, ces structures décroissent inélastiquement dans le spectre de phonons. Il ne nous est pas clair si cette décroissance est seulement due à un effet numérique ou si elle correspond à un processus physique (ce qui par ailleurs pourrait être alors un argument contre l'existence de vortex gelés dans les superfluides).

4 Critères de nucléation des vortex.

Un argument simple, fondé sur les lois de conservation de NLS, permet d'expliquer pourquoi les paires de vortex ne sont nucléées par instabilité de Benjamin-Feir d'un soliton gris qu'à partir d'un ν assez grand.

Le point important est que l'on suppose que pour nucléer une paire de vortex, il faut une quantité d'énergie finie ainsi qu'un défaut de masse fini (différence de masse entre le soliton et la solution homogène de densité $\rho_0 = 1$ dans notre cas). Les vortex ayant une largeur typique de l'ordre de la longueur de cohérence, la fonction d'onde s'annulant au coeur du vortex, on peut estimer le défaut de masse dû à une paire de vortex:

$$\delta N \sim 2 \cdot \pi \xi_0^2 \cdot \rho_0$$

Où la longueur de cohérence ξ_0 et la densité moyenne du liquide ρ_0 sont pour les solitons de l'équation NLS adimensionnée égales à 1.

Numériquement, on observe que les vortex de la paire sont séparés l'un l'autre de quelques longueurs de cohérence. On peut considérer la longueur de cohérence comme distance minimale

séparant les deux vortex (il semble d'ailleurs qu'en dessous d'une telle distance la notion de pair de vortex distincts ne soit plus très claire) ce qui donne une énergie minimale non nulle de nucléation d'une telle paire.

Pour l'équation de KP, on connaît le taux de croissance γ d'une instabilité de vecteur d'onde transverse k , pour des solitons de faible amplitude:

$$\gamma = \frac{k}{\sqrt{3}} \left(\nu^2 - \frac{2k}{\sqrt{3}} \right)$$

Notre analyse consistera à considérer cette formule valide pour les solitons gris de NLS d'une part, puis à étudier dans la limite $\nu \rightarrow 0$ les différents bilans des quantités conservées d'autre part. Cette limite est précisément celle qui nous intéresse, dans la mesure où on a observé qu'alors l'instabilité ne conduisait pas à la nucléation de paires de vortex, mais simplement à des structures dépressionnaires bidimensionnelles cohérentes.

Le taux de croissance est maximal pour $k_m = \nu^2 / \sqrt{3}$.

Si l'on considère que ce mode est dominant dans le mécanisme de l'instabilité, il sélectionne ainsi la longueur d'onde typique suivant laquelle le phénomène de courbure du soliton apparaît.

On peut ainsi calculer tout d'abord la différence de masse accumulée par le collapse du soliton. Calculons en fait la différence de masse par unité de longueur (transversalement *i.e.* le long de l'axe des abscisses- x), entre le soliton et la solution homogène:

$$\delta N_l = \int \frac{\nu^2}{ch^2(\nu(x - x_0 - \chi t))} dx = 2\nu$$

Ainsi, la quantité de masse mise en jeu dans le collapse pour une longueur transverse définie par le mode le plus instable est simplement:

$$\delta N = 2\nu \times \frac{2\pi}{k_m} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{\nu}.$$

On remarque immédiatement que pour les petits solitons l'instabilité se développant sur une distance caractéristique d'autant plus grande, il y a toujours assez de lacune en masse pour pouvoir obtenir une paire de vortex.

Effectuons maintenant le même raisonnement pour l'énergie; par unité de longueur suivant l'axe- x , l'énergie contenue dans un soliton de paramètre ν vaut:

$$\delta H_l = \int \left(\frac{\nu^2}{ch^2(\nu(x - x_0 - \chi t))} \right)^2 dx = \frac{4\nu^3}{3}$$

et donc l'énergie contenue dans chaque collapse du soliton vaut:

$$H = \frac{4\nu^3}{3} \times \frac{2\pi}{k_m} = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \times \nu.$$

On voit alors que pour les solitons de faible amplitude le collapse ne concentre pas assez d'énergie pour nucléer une paire de vortex.

Il est remarquable de noter que le critère restreignant la nucléation de paires de vortex n'est pas le manque de masse, mais plutôt le manque d'énergie contenue dans les solitons gris dans la limite $\nu \rightarrow 0$.

5 Conclusion

On a mis ainsi en évidence un mécanisme simple de nucléation de vorticité par l'instabilité de KP des solitons gris de NLS.

Ce mécanisme peut s'avérer très important expérimentalement: on peut en effet supposer que les vibrations, inhérentes à tout système expérimental et inévitables excitent divers modes propres du superfluide, dont notamment des ondes solitaires voire des solitons. Pour des vibrations suffisamment fortes, le mécanisme décrit précédemment permet de prédire la nucléation *in fine* de paires de vortex à deux dimensions spatiales (dans les films d'Hélium superfluide par exemple) et plus généralement d'anneaux de vorticité ou de lignes de vorticité accrochées aux paroi du récipient à trois dimensions d'espace.

On aurait ainsi une explication consistente de la forte proportion de vorticité observée expérimentalement.

Chapitre 2

Transition transsonique dans NLS

1 Introduction

En mécanique des fluides, le simple problème de l'écoulement autour d'un obstacle est riche d'enseignements pour l'étude de comportement à grand nombre de Reynolds, ou aussi, par exemple pour la transition entre régime laminaire et régime turbulent[19]. A deux dimensions, on prendra typiquement un disque comme obstacle.¹ L'étude de tels flots à l'aide de l'équation de Gross-Pitaevskiï possède plusieurs avantages: cette équation étant invariante par transformation Galiléenne, il est aisé, notamment numériquement, d'obtenir un écoulement à vitesse constante, par simple opération sur la solution au repos. Ainsi, un tel problème à deux dimensions se modélise simplement en imposant une densité et une vitesse constantes à l'infini, ajoutées à des conditions aux limites adéquates sur l'obstacle. De plus, cette question constitue en quelque sorte un cas d'école pour la théorie de la vitesse critique de Landau: en effet, pour de faibles vitesses à l'infini, une solution stationnaire est possible, sans force résultante sur l'obstacle, alors que, au delà d'une vitesse critique, le critère de Landau est atteint puis dépassé (sur l'obstacle tout d'abord) en une petite région où il est alors possible de voir à quel phénomène physique ce critère correspond.

Ce problème a déjà été étudié par Frisch, Pomeau et Rica [13]. Ils ont montré que pour NLS, à partir d'une certaine vitesse à l'infini, la stationnarité était remplacée par la nucléation périodique d'un vortex à chaque pôle du disque, ces vortex étant de signes opposés, si bien que la vorticité totale est conserv e(voir figure). Cette observation présente une surprise par rapport au critère de Landau, qui prédirait *a priori* l'émission d'ondes sonores.

2 Equation de phase stationnaire

Nous allons donc nous intéresser à l'écoulement, en dimension deux², autour d'un disque de rayon R , d'un fluide dont l'équation d'évolution est d termin e par NLS. Par analogie avec un écoulement incompressible (que NLS ne modélise évidemment pas), il est clair que le maximum du courant \mathbf{j} sera atteint en premier sur le bord de l'obstacle, sur les pôles du disque; si bien que nous allons considérer un de ces deux pôles comme origine de nos coordonnées, l'axe des x étant parallèle à la direction de l'écoulement à l'infini. (voir figure 2.1)

Le rayon du disque R est pris bien plus grand que la seule longueur caractéristique du système,

1. Notons cependant que dans le cas bidimensionnel du cylindre infini, la loi de Stokes admet une divergence en $\ln(Re)$ pour les faibles nombres de Reynolds.

2. en trois dimensions d'espace, ce sont des anneaux de vorticité qui sont nucl s

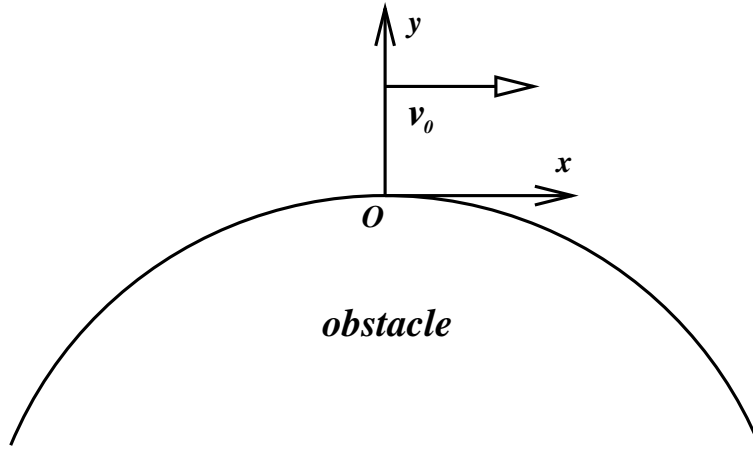


FIG. 2.1 – Repère utilisé pour écrire les équations d'évolution de l'écoulement autour d'un disque à deux dimensions. v_0 est la vitesse du fluide en l'origine O .

$\xi_0 \sim \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}$, ρ_0 étant la densité du fluide à l'infini; la condition au bord sur l'obstacle, d'après un argument de Ginzburg et Pitaevskiï est:

$$\psi = 0$$

ce qui, en introduisant dans NLS (on obtient alors $\Delta\psi = 0$) donne la condition standard de mécanique des fluides:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = 0 \quad (2.1)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal à l'obstacle au point considéré.

L'apparition de vortex correspond à une brisure de la stationnarité de l'écoulement; plaçons nous donc dans le cas stationnaire, et nous allons chercher à décrire ce processus. Pour cela, nous partons des équations hydrodynamiques issues de NLS, dans lesquelles nous négligeons le terme de pression quantique $\frac{1}{2\rho^2}\Delta\rho^2$:

$$\partial_t\rho = -\nabla \cdot (\rho\nabla\phi) \quad (2.2)$$

$$\partial_t\phi = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \rho \quad (2.3)$$

Lors d'un écoulement stationnaire, $\partial_t\rho = 0$ alors que $\partial_t\phi$ est une constante déterminée par les conditions à l'infini: densité ρ_0 et vitesse v_∞ . Ainsi l'équation de Bernoulli associée à NLS donne une relation entre la densité superfluide et la vitesse locale:

$$\rho(v) = \rho_0 - \frac{1}{2}(v^2 - v_\infty^2) \quad (2.4)$$

que nous allons donc introduire dans l'équation de continuité 2.2. On obtient alors:

$$\frac{\partial\rho}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \rho \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Or, proche de l'origine, la vitesse est essentiellement parallèle à l'écoulement (du fait des conditions aux limites), ce qui permet de négliger le terme $\frac{\partial\rho}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial y}$ devant les autres. On obtient alors, en considérant aussi que ($v \simeq \frac{\partial\phi}{\partial x}$):

$$\partial_v(\rho(v)v)\partial_{xx}\phi + \rho\partial_{yy}\phi = 0 \quad (2.5)$$

Cette équation, elliptique pour de faibles vitesses, devient hyperbolique lorsque $\partial_v(\rho(v)v)$ devient négatif. Le critère de la transition correspond donc à $\partial_v(\rho(v)v) = 0$, ce qui signifie que le courant de matière est maximal. Ce critère peut être montré directement et sans approximations via la transformée de l'hodographe; on obtient alors aussi que $\partial_v(\rho(v)v)$ s'annule d'abord sur l'obstacle[19].

Frisch, Pomeau et Rica ont montré que la perte de la stationnarité observée numériquement par l'apparition de vortex de signes opposés à chaque pôle du disque, apparaissait lors de cette transition entre un comportement elliptique et un comportement hyperbolique de l'équation de phase. De manière analytique, une équation elliptique est de la même classe d'universalité que l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$ et admet donc des solutions régulières pour des conditions au bord raisonnable, alors qu'une équation hyperbolique, correspond à une équation de propagation d'onde qui ne peut satisfaire les conditions aux limites sur l'obstacle.

Le critère $\partial_v(\rho(v)v) = 0$ donne la valeur critique de la vitesse:

$$v_c^2 = \frac{2}{3}\rho_0 + \frac{1}{3}v_\infty^2 = \frac{2c_s^2 + v_\infty^2}{3}.$$

c_s étant la vitesse du son du fluide à l'infini ($c_s = \sqrt{\rho_0} \sim \frac{1}{\xi_0}$). Notez que cette valeur critique correspond à la relation: $v_c^2 = \rho(v_c)$ et donc que v_c est juste égale alors à la vitesse du son locale (puisque dans NLS on a $c_s(\rho)^2 = \rho$). Ceci donne ainsi une généralisation du critère de Landau qui correspond localement à une transition supersonique. Dans le cadre d'une approximation de fluide incompressible, la vitesse au bord de l'obstacle, sur le pôle étant le double de la vitesse de l'écoulement à l'infini, on trouve un critère de transition de l'écoulement sur la vitesse à l'infini: $v_c(\infty) = \sqrt{\frac{2}{11}}c_s = 0.426c_s$ qui donne une vitesse critique sur l'obstacle: $v_c = \sqrt{\frac{8}{11}}c_s$ (en bon accord avec les observations numériques).

Cette nucléation de vortex aux pôles abaisse localement la vitesse et restaure ainsi l'ellipticité de l'équation de phase, ce qui a un effet stabilisant pour le développement de l'instabilité. Les vortex sont cependant advectés par l'écoulement, leur effet stabilisateur vers les pôles diminue alors si bien que la vitesse au pôle atteint à nouveau la valeur critique et donc une nouvelle paire de vortex est émise, etc... On a ainsi mis en évidence un processus de nucléation périodique de vortex quantique aux pôles de l'obstacle.

Génériquement, ce processus correspond à une transition noeud-col: en effet en dessous de la vitesse critique, il existe notamment deux solutions stationnaires au problème de l'écoulement, une stable correspondant à un écoulement Dalemberien, l'autre instable consistant en la présence d'un vortex à une distance déterminée de la paroi de l'obstacle. En fait le champ de phase de cette solution est déterminé par la superposition du champ de phase de la solution stationnaire stable, avec le champ de phase d'une paire de vortex contrarotatif, l'un proche de la paroi, dans le fluide, l'autre proche de la paroi, dans l'obstacle, appelé vortex image. (voir figure (2.2))

Cette transition peut être décrite formellement près du seuil à l'aide d'un paramètre de contrôle ϵ (qui dans notre problème est lié à la distance à la valeur critique de la vitesse du fluide, soit $\epsilon \sim (v_0 - v_c)$) et par la dynamique d'une variable a , dans un potentiel qui pour des valeurs du paramètre de contrôle proche de la valeur critique (ici $\epsilon = 0$) peut s'écrire $V(a, \epsilon) = -\epsilon a - \frac{a^3}{3}$: Pour $\epsilon < 0$, il existe deux solutions stationnaires $a = \pm\sqrt{-\epsilon}$, l'une stable ($a = -\sqrt{-\epsilon}$), l'autre instable ($a = +\sqrt{-\epsilon}$); à $\epsilon = 0$ les deux solutions collapsent et le système n'a plus de solutions stationnaires pour $\epsilon > 0$. (voir figure (2.3)) Ce scénario permet notamment de prédire, près du seuil, la barrière de potentiel de nucléation du vortex et donc d'apparition de la solution stationnaire; en effet, la différence d'énergie entre les deux solutions stationnaires est en $(v - v_c)^{3/2}$. On a de plus, pour un modèle classique de vortex ponctuel, le champ de vitesse issu d'un vortex

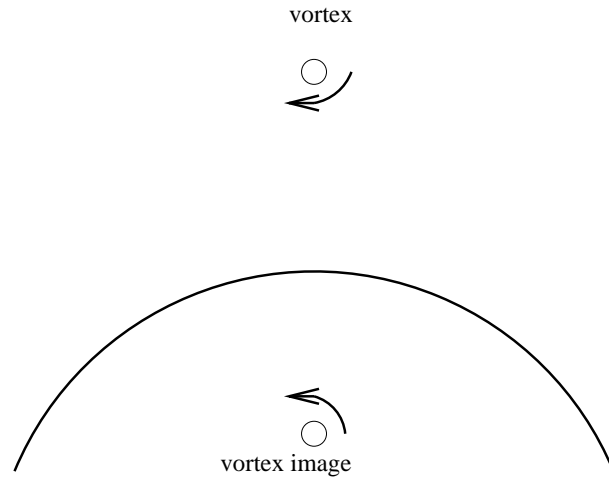


FIG. 2.2 – Position des vortex de la solution instable stationnaire

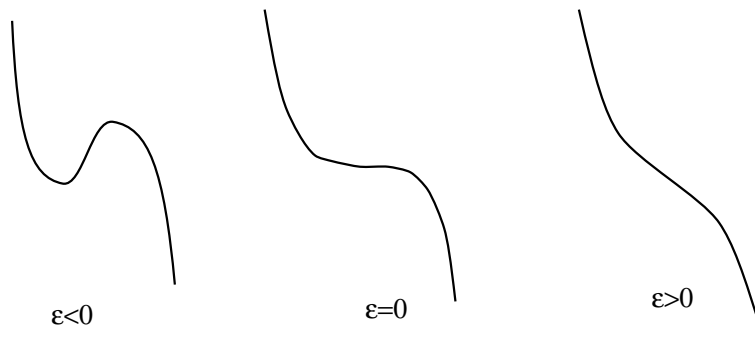


FIG. 2.3 – évolution du potentiel lors d'une transition noeud-col: on voit clairement les deux solutions stationnaires, extrema du potentiel collapser pour $\epsilon = 0$ donnant une dynamique instationnaire pour $\epsilon > 0$.

qui vérifie, pour un vortex de charge 1, $v = 1/r$ où r est la distance au coeur du vortex. Ainsi pour que le vortex soit immobile sous l'action du champ de vitesse extérieur, de vitesse horizontale près de la paroi v_0 et de la vitesse induite par le vortex image, il faut que la distance entre les deux vortex d , vérifie: $d = 1/v_0$. Pour de faibles vitesses la barrière d'énergie est en $\Delta E \sim |\log(v_0)|$

3 L'équation d'Euler-Tricomi

Afin d'étudier le processus de nucléation, c'est à dire comment un vortex est émis d'une paroi lorsque la vitesse proche de la paroi passe continûment d'une valeur inférieure à une valeur supérieure à v_c , nous allons supposer la vitesse près du pôle, v_0 proche de v_c . Ainsi il est commode d'introduire le petit paramètre $\epsilon = (v_0 - v_c)/c_s$. Ainsi les équations ont deux petits paramètres de développement: d'une part ϵ , la distance relative à la vitesse critique, d'autre part le rapport ξ_0/R entre la longueur de cohérence, qui détermine notamment la taille caractéristique d'un vortex, et le rayon du disque. Toute notre analyse consistera à jongler avec ces deux paramètres; implicitement nous les supposerons tous deux petits mais surtout à priori indépendants.

Près du pôle, où la vitesse, horizontale vaut v_0 , la phase se développe sous la forme $\phi = v_0 \cdot x + \chi$, avec χ petit, *i.e.* $|\nabla\chi| \ll v_0$. L'équation de phase 2.5 s'écrit alors:

$$\frac{3}{2}(v_c^2 - v^2)\partial_{xx}\chi + v_c^2\partial_{yy}\chi = 0$$

On s'est limité aux termes d'ordre 0 en ϵ et en $|\nabla\chi|$ devant le terme $\partial_{yy}\chi$; par contre, le coefficient devant $\partial_{xx}\chi$ s'annule justement pour $v = v_c$ et est de l'ordre de ϵ ; on conserve alors naturellement aussi le premier terme non linéaire en χ , qui n'a aucune raison, à priori d'être négligé devant ϵ . On trouve alors:

$$-3v_c^2\left(\epsilon + \frac{\partial_x\chi}{v_c}\right)\partial_{xx}\chi + v_c^2\partial_{yy}\chi = 0$$

et, via une redimensionnalisation $\epsilon' = 3\epsilon$ et $\chi' = \chi/v_c$, (on omettra les primes dans la suite des calculs), on obtient finalement:

$$-(\epsilon + \partial_x\chi)\partial_{xx}\chi + \partial_{yy}\chi = 0 \tag{2.6}$$

Dans l'équation 2.6, on remarque immédiatement que la transition supersonique, à l'ordre linéaire en χ , se traduit par un changement de classe de cette équation, par le changement de signe de ϵ .

Les conditions aux bords 2.1, sur l'obstacle, proche de l'origine c'est à dire au point de coordonnées $y \sim -\frac{x^2}{2R}$ donnent comme contrainte, au premier ordre en $|\nabla\chi|$ et x/R :

$$\mathbf{n}(x, y = -\frac{x^2}{2R}) \cdot \mathbf{v} = (x/R, 1) \cdot (v_0 + v_c\partial_x\chi, v_c\partial_y\chi) = 0$$

où $(a, b) \cdot (a', b')$ correspond au produit scalaire standard: $aa' + bb'$.

A l'ordre 1, on peut négliger $\partial_x\chi$ si bien que la condition au bord devient:

$$\partial_y\chi = -M\frac{x}{R} \quad \text{en} \quad y = -\frac{x^2}{2R}. \tag{2.7}$$

avec $M = \frac{v_0}{v_c}$ correspondant au nombre de Mach sur le pôle (on a en fait pour notre problème $M \sim 1$).

Il existe en fait une solution exacte de ce problème à cet ordre:

$$\chi_0 = -M\frac{xy}{R}$$

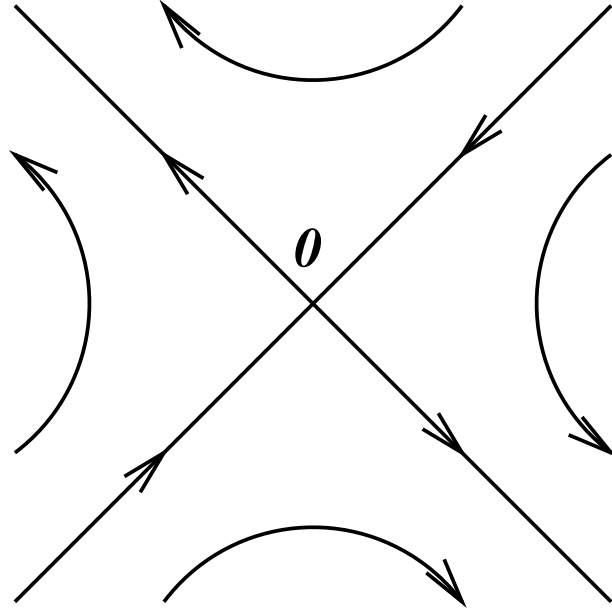


FIG. 2.4 – écoulement autour d'un point hyperbolique (l'origine O); le potentiel de vitesse est du type $\phi = -xy$.

Cette solution indique juste la première correction, proche de l'origine à la vitesse v_0 ; cette solution indique que l'origine est un point hyperbolique (voir figure 2.4). On voit aussi que cette correction à la vitesse v_0 correspond à l'effet de la présence de l'obstacle de rayon de courbure R à l'origine.

Par contre, cette solution ne rend aucunement compte de la transition supersonique; pour cela, il faut pousser le développement à l'ordre suivant; écrivons donc $\chi = \chi_0 + \varphi$, l'équation de phase 2.6 devient:

$$-(\epsilon - M \frac{y}{R} + \partial_x \varphi) \partial_{xx} \varphi + \partial_{yy} \varphi = 0. \quad (2.8)$$

Pour la condition sur l'obstacle, il suffit d'observer que le vecteur normal au disque à l'ordre supérieur s'écrit: $\mathbf{n}(M) = (\frac{x}{R}, 1 - \frac{x^2}{2R^2})$. Ainsi la condition de nullité de flux entrant dans l'obstacle donne:

$$(\frac{x}{R}, 1 - \frac{x^2}{2R^2}) \cdot (v_0 - v_0 \frac{y}{R} + v_c \partial_x \varphi, -v_0 \frac{x}{R} + v_c \partial_y \varphi) = 0$$

Soit, finalement:

$$\partial_y \varphi = -M \frac{x^3}{R^3} \quad \text{en} \quad y = -\frac{x^2}{2R}. \quad (2.9)$$

Les équations 2.8 et 2.9 peuvent se simplifier dans un premier temps, tenant compte des échelles en ϵ qu'elles déterminent. En effet, de l'équation 2.8 on obtient:

$$y \sim \frac{R\epsilon}{M} \quad \text{et} \quad x \sim \frac{R\epsilon^{\frac{3}{2}}}{M}$$

Pour φ , l'équation au bord donne:

$$\varphi \sim \frac{R\epsilon^{\frac{11}{2}}}{M^3}$$

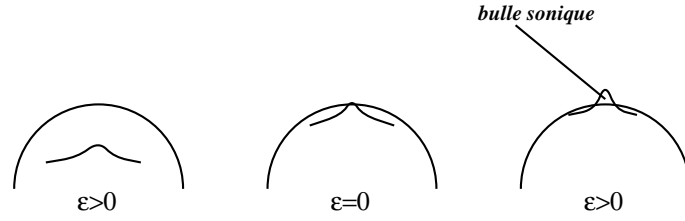


FIG. 2.5 – évolution de la ligne sonique dans l'écoulement lors de la transition supersonique. Pour $\epsilon < 0$ la "catastrophe" supersonique a lieu dans une région de l'espace où l'écoulement a un sens fictif, puisque défini par simple prolongement analytique de la solution physique. Par contre pour $\epsilon > 0$ la région supersonique sort de l'obstacle et "entre" ainsi dans l'espace physique.

Ces comportements indiquent qu'à l'ordre dominant, $\partial_x \varphi \sim \frac{\epsilon^4}{M^2} \ll \frac{My}{R}$ et que, pour la condition au bord, $\frac{x^2}{2R} \ll y$ si bien que l'on peut considérer que cette condition doit être vérifiée en $y = 0$. Cela signifie que l'on a désormais un obstacle plan, occupant le demi-plan $y < 0$ avec un écoulement dans le demi-plan $y > 0$. Cela indique aussi que la courbure de l'obstacle est prise en compte dans la solution particulière et la valeur de la dérivée sur le demi-plan.

On obtient alors finalement le problème linéaire à l'ordre dominant suivant:

$$-(\epsilon - M \frac{y}{R}) \partial_{xx} \varphi + \partial_{yy} \varphi = 0 \quad (2.10)$$

$$\partial_y \varphi = -M \frac{x^3}{R^3} \quad \text{en } y = 0. \quad (2.11)$$

L'équation 2.10 est connue sous le nom d'équation d'Euler-Tricomi (citer Landau); elle entre fréquemment en jeu lors des transitions supersoniques dans les gaz. Cependant, habituellement, cette équation est satisfaite dans l'espace de la transformation d'hodographe et non dans l'espace géométrique. La difficulté alors consiste à pouvoir inverser la transformé hodographe lorsque la solution du problème est solution d'une équation du type Euler-Tricomi. Dans notre cas, c'est la solution de l'équation d'Euler-Tricomi en elle-même qui nous intéresse.

Cette équation s'interprète ainsi: le terme $-(\epsilon - M \frac{y}{R})$ représente en fait génériquement la vitesse tangentielle proche de l'obstacle, cette vitesse diminuant lorsque l'on s'éloigne du disque. Le nombre de Mach est égal à l'unité lorsque cette vitesse s'annule, soit pour $y = \epsilon \frac{R}{M}$. Si l'on appelle la ligne sonique la ligne de nombre de Mach unité, soit là où l'écoulement passe de subsonique (ou elliptique) à supersonique (hyperbolique), la transition que l'on étudie correspond en fait à la sortie de cette ligne de l'intérieur du disque (où on peut considérer la solution par prolongement analytique de la solution du problème) vers l'espace physique de l'écoulement. (voir figure 2.5)

Dans un premier temps, on peut remarquer que les équations 2.10 et 2.11 admettent une solution exacte ϕ_0 telle que:

$$\phi_0 = -M \frac{x^3 y}{R^3} - \epsilon M \frac{x y^3}{R^3} + M^2 \frac{x y^4}{2 R^4} \quad (2.12)$$

Dès lors, un scénario possible de résolution du problème consiste à établir un développement de Taylor de la solution en évaluant notamment la condition au bord de l'obstacle à chaque ordre. Pourtant, un tel développement, s'il converge vraisemblablement, est peu lisible et si on considère qu'on peut dorénavant négliger les termes d'ordre supérieur dans la condition aux limites, nous allons plutôt nous intéresser à la solution de l'équation d'Euler-Tricomi avec conditions libres. En effet, si on écrit la phase solution des équations 2.10 et 2.11 comme la somme de la solution

particulière ϕ_0 et d'une phase que nous appellerons par commodité encore φ , solution alors à l'ordre dominant, de l'équation linéaire d'Euler-Tricomi 2.10 avec la condition aux bords libre:

$$\partial_y \varphi = 0 \quad \text{en } y = 0. \quad (2.13)$$

Nous avons finalement simplifié notre problème, notamment en le rendant linéaire. Cependant il ne faut pas perdre de vue, d'une part que la nouvelle solution particulière introduite 2.12 produit de nouveaux termes dans l'équation 2.10 que l'on a négligé dans un premier temps; d'autre part, il subsiste toujours de fait un terme non-linéaire dans 2.10 que l'on a aussi négligé tout d'abord pour des raisons d'ordre de grandeur en ϵ ; nous allons donc résoudre le problème général, linéaire de l'équation d'Euler-Tricomi, avant de traiter ces différents termes comme des termes de source, perturbatifs, afin d'établir une équation d'amplitude de notre solution.

4 Propriétés de l'équation d'Euler-Tricomi

L'équation d'Euler-Tricomi possède de nombreuses propriétés décrites notamment dans le paragraphe 118 du tome 6 du cours de physique théorique de Landau & Lifchitz [19]. Cette richesse de comportement vient du fait que les solutions de cette équations peuvent être décrites par des fonctions hypergéométriques de Gauss. Cependant, si l'on s'affranchit dans un premier temps des conditions aux limites à vérifier, il est intéressant de regarder les solutions générales de l'équation 2.10.

Une solution exotique, mise en avant par F. Frankl, et faisant partie d'une famille typique de solutions issues de racines de polynômes à coefficients variables, est particulièrement intéressante; à défaut de donner pour notre problème la solution exacte, elle donne une idée vraisemblable du scénario de disparition des solutions stationnaires au delà de la transition.

Ainsi, les racines $z(x, y)$ du polynome:

$$z^3 + 3\left(\frac{M}{R}\right)^{1/3}(y - \epsilon\frac{R}{M}) + 3x = 0 \quad (2.14)$$

sont solutions de l'équation d'Euler-Tricomi 2.10. En effet, en différentiant la relation 2.14 suivant x et y , on obtient:

$$z_x = -\frac{1}{z^2 + \left(\frac{M}{R}\right)^{1/3}(y - \epsilon\frac{R}{M})} \quad \text{et}$$

$$z_y = -\frac{\left(\frac{M}{R}\right)^{1/3}z}{z^2 + \left(\frac{M}{R}\right)^{1/3}(y - \epsilon\frac{R}{M})} = \left(\frac{M}{R}\right)^{1/3}z z_x$$

puis en réitérant l'opération:

$$z_{xx} = -\frac{2z \cdot z_x}{z^2 + \left(\frac{M}{R}\right)^{1/3}(y - \epsilon\frac{R}{M})} \quad \text{et} \quad z_{yy} = -\frac{2z_y(z \cdot z_y + \left(\frac{M}{R}\right)^{1/3})}{z^2 + \left(\frac{M}{R}\right)^{1/3}(y - \epsilon\frac{R}{M})}$$

On note alors que:

$$z \cdot z_y + \left(\frac{M}{R}\right)^{1/3} = -\left(\frac{M}{R}\right)^{2/3}(y - \epsilon\frac{R}{M})z_x$$

et donc finalement que $z_{yy} = -\frac{M}{R}(y - \epsilon\frac{R}{M})z_{xx}$ soit que $z(x, y)$ est solution de 2.10.

Les racines réelles de ce polynome sont représentées schématiquement par la figure 2.6.

On remarque notamment que pour des points $M(x, y)$ à l'intérieur de la caustique définie par l'équation semi-cubique $\frac{9}{4}x^2 = \frac{M}{R}(\epsilon\frac{R}{M} - y)^3$, il existe trois racines réelles. Ainsi si l'on tente

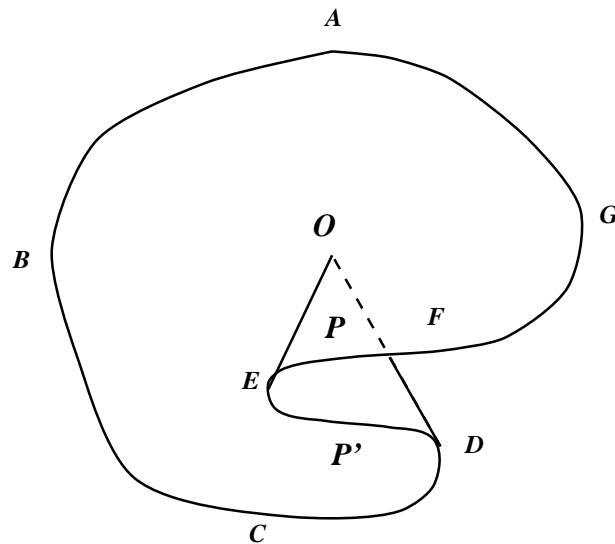


FIG. 2.6 – structure de la solution $z(x, y)$, pour $\epsilon = 0$ autour de l'origine. cette image se translate vers le haut pour des ϵ positifs, si bien que la partie multivaluée de la fonction se trouve dans l'espace physique où une solution stationnaire est cherchée.

de suivre la solution autour de l'origine, pour $\epsilon = 0$ par exemple, continûment depuis le point A, d'une part en passant par B, soit en allant dans le sens trigonométrique, d'autre part en passant d'abord par G, on se rend compte que lorsque l'on arrive, dans le premier cas en C (respectivement D), par l'autre chemin en E (respectivement F), on ne peut passer continument de C à E sans "revenir en arrière" ce qui revient à dire que la solution du problème cherchée devient multivaluée.

En fait, on peut proposer, d'après cette analyse, un scénario phénoménologique de nucléation de vortex. En effet, un vortex sortant de la paroi de l'obstacle, correspondrait, proche de l'origine, à un saut de phase et si l'on tient compte des termes non-linéaires dans l'équation de phase, on peut espérer que ces termes non-linéaires, de même que la viscosité lors de la formation d'onde de choc, pourrait régulariser le saut de phase apparaissant entre les points P et P' (voir figure 2.6). Cette régularisation proviendrait en fait du terme de pression quantique et se traduirait donc par une variation très rapide de la phase sur une distance typique de l'ordre de la longueur de cohérence ξ_0 ; la nucléation du vortex interviendrait lorsque, soit par un processus dynamique que l'on doit définir, soit statiquement, le saut de phase serait de l'ordre de π , et alors le vortex se détacherait de la paroi et suivrait alors l'écoulement.

Une manière de comprendre ce scénario consiste à considérer à nouveau la solution sous forme de racine d'un polynôme $z(x, y)$: en effet, on a vu que cette fonction vérifiait la propriété: $z_y = z \cdot z_x$; on peut donc remarquer que si on identifie y avec $-t$, l'équation différentielle satisfaite par z devient alors l'équation de Burgers et ainsi, partant d'une solution régulière pour y grand, soit pour des temps très reculés, on va former un choc lorsque y s'approche de l'obstacle, c'est à dire lorsque l'on fait évoluer l'équation de Burgers.

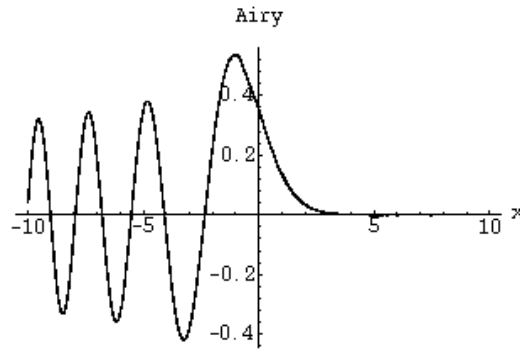


FIG. 2.7 – Fonction d’Airy.

5 Solution homogène de l’équation d’Euler-Tricomi

Pour développer l’analyse précédente, nous allons chercher dans un premier temps les solutions de 2.10 avec 2.13 sous la forme $\varphi_\nu = e^{i\nu x}\xi(y)$; on trouve alors que ξ satisfait une équation différentielle du type de l’équation d’Airy:

$$\xi'' + \nu^2\left(\epsilon - M\frac{y}{R}\right)\xi = 0 \quad (2.15)$$

Les solutions de cette équation peuvent donc s’exprimer en fonction de la fonction d’Airy $\Phi(\cdot)$, représentée figure 2.7, suivant:

$$\varphi_\nu = A \cdot e^{i\nu x} \Phi\left(\left(\frac{\nu^2 M}{R}\right)^{\frac{1}{3}}\left(y - \frac{R\epsilon}{M}\right)\right).$$

A constante.

La condition au bord 2.13 s’écrit maintenant:

$$\Phi'\left(-\left(\frac{\nu R}{M}\right)^{\frac{2}{3}}\epsilon\right) = 0.$$

or la figure 2.7 montre que la fonction d’Airy $\Phi(s)$ ne possède des extrema que pour s négatif. Ceci donne ainsi explicitement que pour ϵ négatif il n’y a pas de solution homogène de l’équation d’Euler-Tricomi. Pour ϵ positif, cette contrainte donne une relation entre le nombre d’onde ν , ϵ et s_n , le nième zéro de Φ :

$$\nu_n^{\frac{2}{3}} = \frac{-s_n}{\epsilon} \cdot \left(\frac{M}{R}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.16)$$

On a notamment $s_1 = -1.01879$, $s_2 = -3.2482$.

Cette formule indique clairement que quelque soit $\epsilon > 0$, il existe un nombre d’onde ν_n satisfaisant 2.16, *i.e.* tel que une solution homogène puisse se développer. On remarque notamment que, en terme de développement d’une équation d’amplitude d’une solution pour le nombre d’onde ν , pour tout $\nu > \nu_n$, l’équation d’amplitude sera linéaire du type $\partial_t A_\nu = (\nu - \nu_n)A$ (on verra plus tard les détails d’une telle dérivation). En d’autres termes, pour un $\epsilon > 0$ donné il y a une bande infiniment large de modes tels que la condition de quantification a été atteinte. Particulièrement, telles solutions de très courtes longueurs d’onde ne satisfairont plus cette relation si on tient

compte du terme de pression quantique. En effet, ce terme a pour effet d'éviter le développement de perturbations de faibles longueur d'onde.

Pour introduire simplement la contribution de la pression quantique à l'équation de phase 2.6, il suffit d'évaluer le terme de pression quantique à rajouter dans l'équation de Bernoulli, à l'ordre linéaire en ϕ (ou ξ). On traite le terme de pression quantique $\frac{1}{4\rho}(\Delta\rho - \frac{(\nabla\rho)^2}{2\rho})$ apparaissant dans l'équation hydrodynamique issue de NLS comme un terme perturbatif, *i.e.* que l'on va l'évaluer à partir de la relation classique entre la densité et le potentiel vitesse 2.4. Cela donne à l'ordre linéaire une nouvelle relation de Bernoulli, adapté à notre configuration:

$$\rho = \rho_0 - \frac{1}{2}((\nabla\phi)^2 - v_\infty^2) - \frac{1}{4}\partial^3\phi\partial x^3$$

Finalement, ce terme donne dans l'équation d'Euler-Tricomi, la contribution:

$$-(\epsilon - M\frac{y}{R})\partial_{xx}\varphi + \partial_{yy}\varphi - \alpha\xi_0^2\partial_x^4\varphi$$

où α est une fraction, (qui vaut $\frac{2}{11}$ si on suppose que la vitesse au pôle du disque est le double de la vitesse à l'infini, ce qui est valide pour un fluide incompressible) que par commodité de calcul on prendra égale à l'unité dans la suite. On obtient alors l'équation de phase:

$$-(\epsilon - M\frac{y}{R})\partial_{xx}\varphi + \partial_{yy}\varphi - \xi_0^2\partial_x^4\varphi \quad (2.17)$$

Effectuant la même transformation $\varphi_\nu = e^{i\nu x}\xi(y)$ on aboutit à nouveau à une équation d'Airy satisfaite par la fonction ξ :

$$\xi'' + \nu^2(\epsilon - \xi_0^2\nu^2 - M\frac{y}{R})\xi = 0 \quad (2.18)$$

dont la solution s'écrit à nouveau en fonction de la fonction d'Airy Φ , sous la forme:

$$\varphi_\nu = A \cdot e^{i\nu x}\Phi\left(\left(\frac{\nu^2 M}{R}\right)^{\frac{1}{3}}\left(y - \frac{R}{M}(\epsilon - \nu^2\xi_0^2)\right)\right).$$

qui donne la condition de quantification entre ϵ et ν :

$$\epsilon = \left(\frac{M}{R}\right)^{\frac{2}{3}}(-s_n)\nu^{\frac{2}{3}} + \xi_0^2\nu^2 \quad (2.19)$$

que l'on a représenté figure 2.8.

On remarque alors que maintenant pour un ϵ positif donné, seul une bande bornée de nombre d'onde a atteint la condition de quantification. De plus, d'une part, juste au dessus de la transition seul la contribution du premier zéro de la fonction d'Airy intervient, d'autre part, notons qu'une solution de type Airy ne peut se développer qu'au dessus d'un ϵ_c critique correspondant au minimum de la courbe 2.8.

Ceci a pour conséquence de décaler la transition vers la nucléation de vortex; en effet pour $\epsilon < \epsilon_c$, seule la solution nulle est solution d'Euler-Tricomi avec les conditions aux bords homogènes et donc la solution instable, si on considère qu'elle consiste en un développement d'amplitude de cette fonction d'Airy, ne peut se développer. Le minimum de la courbe $\epsilon(\nu)$ donne le décalage suivant:

$$\epsilon_c = 4 \cdot \left(\frac{-s_1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{M\xi_0}{R}} = 4\xi_0^2\nu_c^2$$

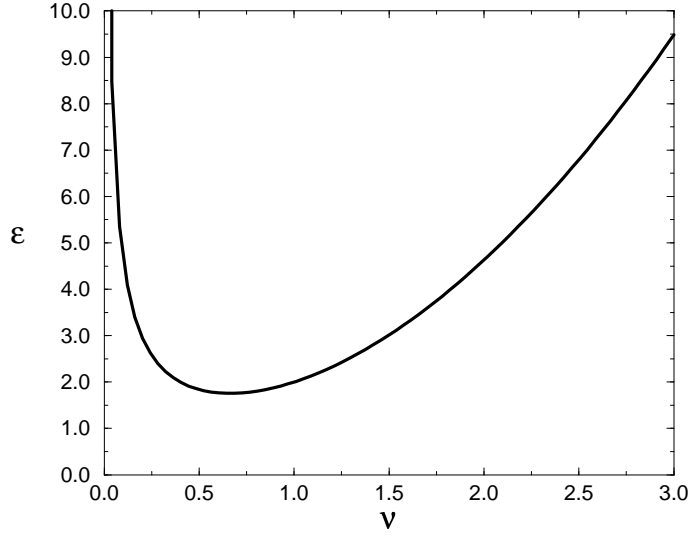


FIG. 2.8 – Relation de quantification entre ϵ et ν le nombre d'onde.

avec $\nu_c = \left(\frac{-s_1}{3}\right)^{\frac{3}{8}} \cdot \left(\frac{M}{R\xi_0^3}\right)^{\frac{1}{4}}$. Le nombre d'onde correspondant à ce minimum.

Le déroulement de notre calcul est dorénavant bien défini: nous allons chercher la solution globale du problème proche du seuil $\epsilon \sim \epsilon_c$ pour un nombre d'onde ν_c , sous la forme:

$$\varphi = A(x, t) \Phi\left(\left(\frac{\nu_c^2 M}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \left(y - 3\frac{R}{M}\nu_c^2 \xi_0^2\right)\right) e^{i\nu_c x}$$

l'amplitude A variant sur des distances grandes par rapport à $1/\nu_c$. En réintroduisant d'une part la contribution due à la condition particulière ϕ_0 2.12 par l'intermédiaire du terme non linéaire, d'autre part celle directement due au terme non linéaire, nous allons établir l'équation d'amplitude gouvernant $A(x, t)$ grâce à des calculs de conditions de solvabilité.

On remarque notamment que la fonction $\xi(y) = \Phi\left(\left(\frac{\nu_c^2 M}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \left(y - 3\frac{R}{M}\nu_c^2 \xi_0^2\right)\right) = \Phi\left(\left(\frac{\nu_c^2 M}{R}\right)^{\frac{1}{3}} y + s_1\right)$ est solution de l'équation différentielle:

$$\mathcal{L}_0 \xi = \left(\partial_{yy} + \nu_c^2 (3\xi_0^2 \nu_c^2 - M \frac{y}{R})\right) \xi = 0 \quad (2.20)$$

6 Equations d'amplitudes

Nous allons établir ces équations d'amplitude en deux étapes: tout d'abord, nous allons considérer non pas $A(x, t)$ mais plutôt la solution d'amplitude stationnaire $A(x)$ afin de tenir compte de la contribution due aux termes croisés non linéaires dans l'équation de phase. En effet, le terme non linéaire $-\partial_x \varphi \partial_{xx} \varphi$ de l'équation 2.8 fait apparaître des termes linéaire en φ lorsque l'on tient compte de la solution particulière ϕ_0 : d'une part le terme $\partial_x \phi_0 \partial_{xx} \varphi$, d'autre part le terme $\partial_{xx} \phi_0 \partial_x \varphi$. Ces termes sont du même type que celui issu de la solution particulière ξ_0 qui avait permis d'obtenir l'équation d'Euler-Tricomi explicitement. Pour simplifier, nous n'allons considérer que la correction au terme linéaire en y dans l'équation de phase, ce qui donne:

$$-(\epsilon - M \frac{y}{R} (1 + 3 \frac{x^2}{R^2})) \partial_{xx} \varphi + \partial_{yy} \varphi - \xi_0^2 \partial_x^4 \varphi \quad (2.21)$$

Introduisant la solution cherchée sous la forme:

$$\varphi = A(x) \xi(y) e^{i\nu_c x}$$

on obtient, en arrêtant le développement en dérivé de A à la dérivée seconde et en se limitant au terme d'ordre ϵ_c apparaissant devant les dérivés de A :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(A(x) \xi(y) e^{i\nu_c x}) &= [\nu_c^2 (-\epsilon - \epsilon_c) + 3M \frac{y x^2}{R^3}] A(x) \\ &+ 2i\nu_c (\frac{\epsilon_c}{2} - M \frac{y}{R}) A'(x) - (\frac{\epsilon_c}{2} + m \frac{y}{R}) A''(x) \xi(y) \end{aligned}$$

Suivant la méthode standard de condition de solvabilité, cette équation admet des solutions si et seulement si le membre de droite n'appartient pas au noyau de l'opérateur \mathcal{L}_0 ce qui se traduit, via le produit scalaire suivant la direction y :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(y) g(y) dy$$

et considérant que ξ appartient au noyau de \mathcal{L}_0 :

$$A''(x) + (\frac{\epsilon - \epsilon_c}{4\xi_0^2} - \frac{3\nu_c^2 x^2}{2R^2}) A(x) = 0$$

(voir Annexe pour plus de détails).

On reconnaît ainsi l'équation de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique et on sait donc qu'il existe des solutions pour des valeurs particulières de ϵ . Nous allons donc nous intéresser à l'apparition de cette première solution non nulle du problème. Ceci arrive pour un nouveau seuil de transition, ϵ'_c tel que:

$$\epsilon'_c - \epsilon_c = \sqrt{6\epsilon_c} \frac{\xi_0}{R}$$

et on a alors: $A(x) = A \cdot f(x)$, avec:

$$f(x) = \exp(-\frac{(\epsilon'_c - \epsilon_c) x^2}{8\xi_0^2}) = \exp(-\frac{x^2}{2l^2})$$

l étant la distance caractéristique de variation de $A(x)$ ($l = 2\sqrt{\xi_0 R} / (6\epsilon_c)^{\frac{1}{4}}$). On note que l'on a bien, suivant nos hypothèses: $(\nu_c l)^2 \sim (\frac{R}{\xi_0})^{\frac{3}{4}} \gg 1$.

On peut dès lors aborder le problème complet en cherchant l'évolution temporelle de l'amplitude de la solution que l'on vient d'établir. Pour cela on considérera notamment le terme non-linéaire $-\partial_x \varphi \partial_{xx} \varphi$ que l'on avait négligé jusqu'à présent, hormis lors de l'apparition de termes linéaires croisés. De plus, il va falloir introduire les variations temporelles de la phase; pour cela, il faut se souvenir que l'équation que l'on a considéré jusqu'à présent n'est rien d'autre que la version stationnaire de l'équation de continuité: $div(\rho \mathbf{v}) = -\partial_t \rho$. Considérant alors l'équation hydrodynamique vérifiée par ρ (négligeant la contribution des termes de pression quantique, étant donné

que l'on cherche la dynamique de la phase à l'ordre dominant, la pression quantique apportant à ceci un terme perturbatif):

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{2}(v_\infty^2 - (\nabla\phi)^2) - \partial_t\phi$$

on a lors des paragraphes précédent établi que: $\phi = v_0x + \frac{v_c}{3}(\chi_0 + \phi_0 + \varphi)$, avec χ_0 et ϕ_0 des solution indépendantes du temps. On obtient alors;

$$\partial_t\rho = -v_0\frac{v_c}{3}\partial_{xt}\varphi - \frac{v_c}{3}\partial_{tt}\varphi$$

Ce qui donne finalement pour l'équation de phase temporelle au premier ordre:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_c^2}\partial_t^2\varphi + \frac{M}{v_c}\partial_{tx}\varphi = \\ & -(\epsilon - M\frac{y}{R}(1 + 3\frac{x^2}{R^2}) + \partial_x\varphi)\partial_{xx}\varphi + \partial_{yy}\varphi - \xi_0^2\partial_{x^4}\varphi - \partial_x\phi_0\partial_{xx}\phi_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nous allons étudier les solutions réelles de cette équation sous la forme:

$$\varphi = (A(t)\sin(\nu_c x) + B(t)\cos(\nu_c x))f(x)\xi(y)$$

En effet, comme l'analyse n'est plus linéaire il faut bien prendre garde de prendre des solutions réelles et non complexes comme on pouvait le faire précédemment.

L'analyse des conditions de solvabilités à satisfaire, d'une part suivant la variable y , d'autre part suivant la variable x , est explicitée en annexe. Notamment, pour le comportement près du seuil, $\epsilon \sim \epsilon'_c$, les constantes issues d'intégration des différents moments de la fonction d'Airy Φ étant unitaires (ils ne dépendent nullement des différentes variables physique R , ξ_0 , ϵ_c), on peut les prendre égales à l'unité pour simplifier le problème (cela ne change en rien le contenu physique des équations bien sûr). On obtient le système d'équations différentielles:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_c^2}A''(t) - M\frac{\nu_c}{v_c}B'(t) &= \nu_c^2(\epsilon - \epsilon'_c)A(t) + \delta e^{-\frac{\nu_c^2 t^2}{2}} + \nu_c^3(A^2(t) - B^2(t))e^{-\frac{\nu_c^2 t^2}{6}} \\ \frac{1}{v_c^2}B''(t) + M\frac{\nu_c}{v_c}A'(t) &= \nu_c^2(\epsilon - \epsilon'_c)B(t) + \nu_c^3A(t)B(t)e^{-\frac{\nu_c^2 t^2}{6}} \end{aligned}$$

Sachant $\delta \sim \frac{\xi_0}{R^2}$.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux solutions stationnaires d'un tel système d'équations: pour des raisons de symétries d'un tel écoulement (notamment le fait que la vitesse suivant l'axe y en $x = 0$ est nulle dans le cas stationnaire), la phase cherchée φ doit être impaire en x et donc les solutions stationnaires vérifie la condition $B = 0$. On trouve alors que l'amplitude A est solution du polynome du deuxième degré:

$$\nu_c^3 A^2 + \nu_c^2(\epsilon - \epsilon'_c)e^{-\frac{\nu_c^2 t^2}{6}} A + \delta e^{-\frac{\nu_c^2 t^2}{3}} = 0$$

Ce polynome admet deux racines réelles pour $(\epsilon - \epsilon'_c)^2 > \frac{4\delta}{\nu_c}e^{-\frac{2\nu_c^2 t^2}{3}}$; il s'agit de:

$$A_{\pm} = \frac{-\nu_c^2(\epsilon - \epsilon'_c) \pm \sqrt{\Delta}}{2\nu_c^3} e^{-\frac{\nu_c^2 t^2}{6}} \quad \text{avec} \quad \Delta = \nu_c^4(\epsilon - \epsilon'_c) - 4\delta\nu_c^3 e^{-\frac{2\nu_c^2 t^2}{3}}$$

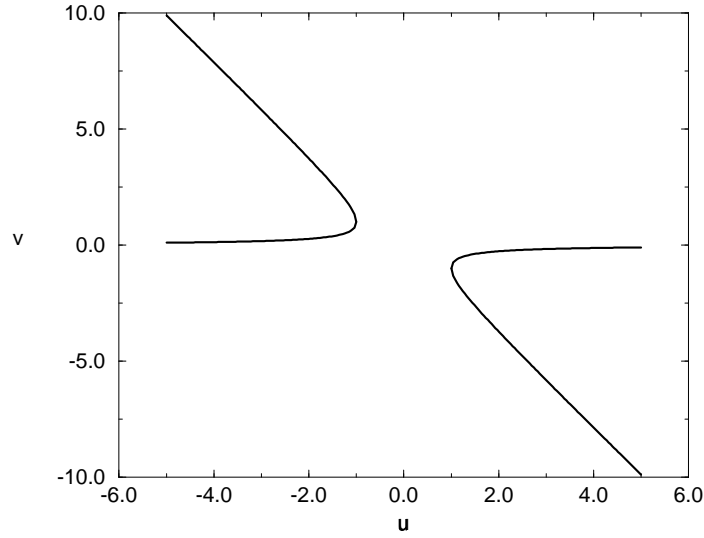


FIG. 2.9 – Amplitude stationnaire du problème de phase, avec $v \sim A$ et $u \sim (\epsilon - \epsilon_c)$.

voir sur la figure 2.9 les deux branches de solutions stationnaires, l'une pour $(\epsilon - \epsilon'_c) < 0$, l'autre pour $(\epsilon - \epsilon'_c) > 0$. On remarque notamment que pour $(\epsilon - \epsilon'_c)^2 < \frac{4\delta}{\nu_c} e^{-\frac{2\nu_c^2 t^2}{3}}$, il n'y a pas de solutions stationnaires du problème.

L'analyse de stabilité est intéressante si l'on néglige les termes de dérivées premières devant ceux de dérivées secondes. Cela revient à dire que on considère que les temps mis en jeu dans l'étude de stabilité sont petits devant $\frac{1}{\nu_c \nu_c}$. Alors, si on écrit la solution générales sous la forme $A_{\pm} + A(t)$, les équations de stabilité deviennent:

$$\frac{1}{\nu_c^2} A''(t) = \pm \sqrt{\Delta} A(t) \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{\nu_c^2} B''(t) = \frac{\nu_c^2 (\epsilon - \epsilon'_c) \pm \sqrt{\Delta}}{2} B(t) \quad (2.24)$$

-pour la branche de solutions où $(\epsilon - \epsilon'_c) < 0$, la solution A_- est linéairement stable, alors que A_+ est instable ($B = 0$ est alors stable linéairement). Le scénario de disparition des solutions stationnaires apparait bien alors via le collapse entre une solution stable et une instable.

-pour la branche de solutions où $(\epsilon - \epsilon'_c) > 0$, on a les deux solutions instables du fait de l'instabilité linéaire de la solution $B = 0$ (pour A_+ on a aussi l'instabilité linéaire pour la solution A).

Ainsi le mécanisme de transition vers la dissipation via la nucléation de vortex apparait bien comme une bifurcation de type noeud-col pour une valeur du paramètre de contrôle:

$$\epsilon_t = \epsilon'_c - 2\sqrt{\frac{\delta}{\nu_c}} e^{-\frac{\nu_c^2 t^2}{3}}$$

lorsque le paramètre de contrôle dépasse cette valeur critique, il y a disparition de solutions stationnaire, de plus la possibilité de solutions stationnaires pour de plus grandes valeurs du

paramètre de contrôle (deuxième branche de solution de la figure 2.9) ne joue pas de rôle dans la mesure où ces solutions sont toutes instables et donc que l'écoulement ne peut les atteindre. La nucléation des vortex découle de la croissance exponentielle des amplitudes $A(t)$ et $B(t)$, conduisant à des variations de phase de plus en plus importantes sur une courte distance ($\sim \frac{2\xi_0}{\epsilon_c}$), le long de la paroi (là où la fonction d'Airy est maximale); lorsque ces variations de phase sont de l'ordre de π un vortex se détache de la paroi. (ici je compte mettre le numérique montrant qu'un saut de phase apparaît puis croît sur la paroi jusqu'au détachement du vortex).

Troisième partie

Modèle de superfluide avec transition liquide/vapeur

Chapitre 1

Écoulements dans l'équation de Schrödinger non-linéaire sous-critique

1 Introduction

Comme nous l'avons montré auparavant, l'équation de Schrödinger non linéaire, si on prend la non-linéarité la plus simple qui soit, respectant les symétries de la mécanique quantique, est un modèle satisfaisant de superfluide: cette équation permet ainsi de décrire un liquide sans viscosité, dont la vorticité est quantifiée et dont le spectre d'excitation de grande longueur d'onde est linéaire. Cependant, une des propriétés fondamentales des fluides réels ne peut être décrite par un modèle aussi simple. En effet, la densité d'énergie potentielle d'une telle dynamique, fonction de la densité locale ρ , n'a qu'un minimum si bien qu'il est seulement possible de décrire un état thermodynamique stable. Particulièrement, on ne peut étudier avec un tel modèle des phénomènes de changement d'état. Pour un système dont la densité moyenne est ρ_0 , la densité d'énergie \mathcal{H} , dans le cadre de la dynamique adimensionnée, vaut pour une valeur locale de la densité ρ :

$$\mathcal{H}(\rho) = \frac{1}{2}(\rho - \rho_0)^2.$$

Expérimentalement, il apparaît dans l'Hélium 4, lorsqu'on l'étire suffisamment, des bulles gazeuses; la pression de décomposition spinodale, *i.e.* la pression en dessous de laquelle le liquide est linéairement instable peut être extrapolée proche de -9 bars.[20]

En s'inspirant de l'équation de Schrödinger non linéaire utilisée jusqu'à présent, il est possible, tout en conservant les propriétés de fluide parfait, de quantification de la vorticité et le spectre de phonons, de construire un modèle décrivant un système où deux phases peuvent être localement stables (nous ne nous soucions pas tout d'abord de la métastabilité). D'un point de vue mathématique, il suffit de rajouter un paramètre dans l'énergie potentielle afin d'avoir un degré de liberté supplémentaire permettant de définir un nouvel état stable. La manière la plus simple d'introduire un tel changement consiste à développer la non-linéarité au terme d'ordre supérieur. On considère donc que l'énergie est maintenant un polynôme de degré 3 en ρ . Ainsi dans l'équation de Schrödinger, on ajoute un terme en $|\psi|^4\psi$.

2 L'équation de Schrödinger non-linéaire sous critique

On propose, dans un premier temps, pour l'étude d'un superfluide avec une équation d'état plus complexe l'équation d'évolution de la fonction d'onde suivante:

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\Delta\psi + \alpha|\psi|^2\psi + \beta|\psi|^4\psi \quad (1.1)$$

ψ représente toujours le paramètre d'ordre dont le carré du module représente la densité du liquide, et la phase le potentiel de vitesse.

Il convient cependant de relier ces paramètres α et β à des données physiques.

Dans un premier temps, on peut se rendre compte que cette équation se retrouve facilement dans le cadre de l'étude d'un système de bosons à l'aide du formalisme des matrices densité; en effet, si on considère le potentiel d'interaction non seulement composé des termes d'interactions à deux particules, mais aussi de ceux à trois particules, *i.e.*:

$$U(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{N}) = \sum_{i < j} u(\mathbf{i}, \mathbf{j}) + \sum_{i < j < k} v(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

alors, en procédant comme dans l'introduction, on trouve l'équation régissant l'évolution des matrices densités d'ordre k :

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial R_k}{\partial t}(\mathbf{1}..\mathbf{k}; \mathbf{1}'..\mathbf{k}'; t) &= \sum_{i=1}^k -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_i - \Delta_{i'})R_k + \sum_{i < j \leq k} (u(\mathbf{x}_{i,j}) - u(\mathbf{x}_{i',j'}))R_k \\ &+ \int d(\mathbf{k} + \mathbf{1}) \sum_{i=1}^k (u(\mathbf{x}_{i,k+1}) - u(\mathbf{x}_{i',k+1}))R_{k+1}(\mathbf{1}..\mathbf{k} + \mathbf{1}; \mathbf{1}'..\mathbf{k}', \mathbf{k} + \mathbf{1}; t) \\ &+ \sum_{i < j < l \leq k} (v(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{l}) - v(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{l}'))R_k \\ &+ \sum_{i < j \leq k} \int d(\mathbf{k} + \mathbf{1}) (v(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} + \mathbf{1}) - v(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k} + \mathbf{1}))R_{k+1}(\mathbf{1}..\mathbf{k} + \mathbf{1}; \mathbf{1}'..\mathbf{k}', \mathbf{k} + \mathbf{1}; t) \\ &+ \sum_{i \leq k} \int \int d(\mathbf{k} + \mathbf{1}) d(\mathbf{k} + \mathbf{2}) (v(\mathbf{i}, \mathbf{k} + \mathbf{1}, \mathbf{k} + \mathbf{2}) - v(\mathbf{i}', \mathbf{k} + \mathbf{1}, \mathbf{k} + \mathbf{2})) \cdot \\ &R_{k+2}(\mathbf{1}..\mathbf{k} + \mathbf{2}; \mathbf{1}'..\mathbf{k}', \mathbf{k} + \mathbf{1}, \mathbf{k} + \mathbf{2}; t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

on peut écrire alors:

$$u(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \gamma^D w(\gamma\mathbf{i}, \gamma\mathbf{j})$$

et:

$$v(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{l}) = \gamma^{2D} s(\gamma\mathbf{i}, \gamma\mathbf{j}, \gamma\mathbf{l})$$

Cette relation se justifie dans la mesure où le potentiel v peut être comparé à un terme de collision à trois particules et il paraît raisonnable de considérer que ce terme se comporte comme le carré du terme de collision à deux particules.

Alors, en réitérant les arguments développés précédemment, on peut trouver une fonction ψ factorisant les matrices densités d'ordre k petit, vérifiant alors:

$$i\hbar R_k \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial_t \psi(\mathbf{j}; t)}{\psi(\mathbf{j}; t)} + \frac{\partial_t \psi^*(\mathbf{j}'; t)}{\psi^*(\mathbf{j}'; t)} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} R_k \sum_{j=1}^k \left(\frac{\Delta_j \psi(\mathbf{j}; t)}{\psi(\mathbf{j}; t)} - \frac{\Delta_{j'} \psi^*(\mathbf{j}'; t)}{\psi^*(\mathbf{j}'; t)} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + R_k \int d(\mathbf{k} + \mathbf{1}) \sum_{j=1}^k (u(\mathbf{j}, \mathbf{k} + \mathbf{1}) - u(\mathbf{j}', \mathbf{k} + \mathbf{1})) |\psi(\mathbf{k} + \mathbf{1}; t)|^2 + \\
& R_k \int \int d(\mathbf{k} + \mathbf{1}) d(\mathbf{k} + \mathbf{2}) \sum_{j=1}^k (v(\mathbf{j}, \mathbf{k} + \mathbf{1}, \mathbf{k} + \mathbf{2}) - v(\mathbf{j}', \mathbf{k} + \mathbf{1}, \mathbf{k} + \mathbf{2})) \cdot \\
& |\psi(\mathbf{k} + \mathbf{1}; t)|^2 |\psi(\mathbf{k} + \mathbf{2}; t)|^2
\end{aligned}$$

Soit pour la fonction $\psi(\mathbf{x}; t)$:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}; t)}{\partial t} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{x}; t) + \psi(\mathbf{x}; t) \int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}; t)|^2 u(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \\
& + \psi(\mathbf{x}; t) \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{s} |\psi(\mathbf{r}; t)|^2 |\psi(\mathbf{s}; t)|^2 v(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{s})
\end{aligned}$$

Alors, si finalement on prend $w(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = a\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s})$ et $s(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) = b\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})$ on trouve:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}; t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{x}; t) + a|\psi|^2 \psi(\mathbf{x}; t) + b|\psi|^4 \psi(\mathbf{x}; t)$$

Ce qui, en adimensionnant les coefficients donne bien l'équation (1.1).

Le signe des coefficients α et β peut être déterminé par des arguments généraux déduits des comportements connus de l'équation de Schrödinger non-linéaire et des propriétés générales des formes normales: en effet si α est positif, le modèle ne nécessite nullement la présence de termes d'ordre 5 pour obtenir des solutions homogènes stables; par contre, si α est négatif, on se trouve, à faible densité avec l'équation de Schrödinger non-linéaire focalisante, utilisée en optique non-linéaire; cette équation conduit à une instabilité que le terme en $|\psi|^4 \psi$ permet de régulariser si β est positif.

Tout ceci se voit aisément grâce à l'étude de l'énergie potentielle (adimensionnée) déterminée, comme dans le cas simple par:

$$i\partial_t \psi = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}$$

En effet le changement de non-linéarité ne perturbe en rien le caractère hamiltonien de la dynamique, de même que la conservation du nombre total de particules.

Cette énergie se décompose en deux termes, un d'énergie cinétique $K = \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2$, l'autre étant le terme d'énergie d'interaction, que nous noterons \mathcal{H}_1 ; il ne dépend que de la densité du superfluide ρ et est donc celui qui nous intéresse pour déterminer les états homogènes linéairement stables:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{3} \rho^3 + \frac{\alpha}{2} \rho^2$$

L'idée consiste donc à relier les différentes constantes α , β aux données physiques permettant de décrire un fluide: la densité moyenne ρ_0 déterminée par la pression extérieure (dans notre cas ρ_0 est lié au nombre total de particules); et la densité de décomposition spinodale ρ_c .

En fait, en redimensionnant les échelles de temps et d'espace, on peut se persuader que seul le rapport α/β joue un rôle et donc que l'on peut prendre $\beta = 1$. Par contre, l'étude de l'énergie \mathcal{H}_1 , pour être complète, doit tenir compte du fait que l'on s'intéresse à la densité locale d'énergie pour un système où le nombre total de particules (ou la densité moyenne) est fixé. Cela se traduit, comme lors du paragraphe introductif par l'étude de la fonction $\mathcal{H}_1 - \mu\rho$ où μ joue le rôle du

potentiel chimique et est en fait la variable de Lagrange liée à la conservation de la masse.

Ainsi, on a :

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{H}_1 - \mu\rho = \frac{1}{3}\rho^3 + \frac{\alpha}{2}\rho^2 - \mu\rho$$

Il s'agit d'un terme d'énergie libre du système (n'oublions pas cependant que le système est hamiltonien!). On définit bien sûr de même l'énergie libre totale du système en rajoutant les termes cinétiques à l'énergie \mathcal{H}_1 .

On veut en fait tout simplement que $\rho = \rho_0$ soit un minimal local de \mathcal{F}_1 ; donc: $\frac{\delta\mathcal{F}_1}{\delta\rho}(\rho_0) = 0$, soit:

$$\mu = \rho_0(\alpha - \rho_0)$$

L'autre extremum de \mathcal{F}_1 correspond alors à une densité: $\rho = \alpha - \rho_0$. La densité de décomposition spinodale est la densité moyenne telle que les deux extremum de \mathcal{F}_1 coïncident, signifiant alors la disparition d'une solution homogène (comme lors d'une transition noeud-col on observe la disparition de solutions stationnaires). Ainsi on trouve que ρ_c doit vérifier:

$$\rho_c = \alpha - \rho_c$$

soit $\alpha = 2\rho_c$.

On pouvait trouver cette relation en cherchant $\rho_c = \rho_0$ tel que $\mathcal{F}_1(\rho_c) = \mathcal{F}_1(\alpha - \rho_c)$.

Ce modèle contient formellement un autre extremum de l'énergie, compte tenu du fait que la fonction \mathcal{F}_1 n'est définie que pour ρ positif, ainsi $\rho = 0$, est aussi un extremum de \mathcal{F}_1 . De plus, si $\mu > 0$, il représente un minimum d'énergie et $\rho = 0$ est donc un état localement stable de notre système. Considérant expérimentalement que la densité de vapeur de l'Hélium à basse température est très faible devant la densité du liquide à pression nulle, de plus étant donné que l'on peut considérer qu'un tel gaz peut difficilement être représenté par une fonction d'onde ayant un ordre de phase à longue portée, cet état $\rho = 0$ décrit la phase gazeuse du fluide que nous cherchons à modéliser. Cela donne une condition pour que notre modèle admette bien deux états stables: $2\rho_c > \rho_0$.

Finalement l'équation de Schrödinger que nous allons utiliser dans ce chapitre, que nous appellerons équation de Schrödinger sous critique (SNLS) s'écrit, sous forme adimensionnée:

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{x};t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi(\mathbf{x};t) + (2\rho_c - \rho_0)\rho_0\psi(\mathbf{x};t) - 2\rho_c|\psi|^2\psi(\mathbf{x};t) + |\psi|^4\psi(\mathbf{x};t) \quad (1.3)$$

Cette équation est aussi appelée l'équation de Schrödinger cubique-quintique et a été étudiée, dans le cadre de la superfluidité par Ginzburg et Sobaynin [21] [22], pour un système de bosons avec une interaction attractive à deux corps et répulsive à trois corps, elle a été établie par Kovalev et Kosevitch [23], tandis qu'elle a été introduite par Kartavenko dans le cadre d'un modèle nucléaire [24]. Elle consiste en l'évolution d'un paramètre d'ordre ψ (à partir duquel, comme pour NLS on peut déduire densité et vitesse superfluides) conditionné par les valeurs du paramètre de contrôle ρ_c/ρ_0 .

Nous avons introduit dans la dynamique le terme issu du coefficient de Lagrange relatif à la conservation de la masse. Ce terme ne joue aucun rôle dans la dynamique et donne juste une fréquence propre à la phase globale de la solution.

Le raisonnement appliqué sur l'énergie libre du système est très proche des raisonnements fondés sur l'étude d'une fonctionnelle de densité [20]; notamment l'étude des états homogènes stationnaires, de leur stabilité linéaire et de leur métastabilité relative est similaire. Cependant l'outil

mis en place est utilisé dans deux contextes différents: pour le cas de SNLS, on étudie la dynamique des solutions, qui est hamiltonienne; il n'y a pas de minimisation de l'énergie libre et donc pas de thermodynamique, ce qui traduit le fait que notre modèle est formellement un modèle de superfluide à température nulle; par contre le formalisme des fonctionnelles densité permet en principe de construire une thermodynamique à température finie du superfluide; en contrepartie, il ne donne aucune information dynamique sur le système!! De plus, dans notre analyse, il était élégant de s'intéresser à l'énergie libre du système, mais comme nous l'avons rappelé, la dynamique étant hamiltonienne, les extrema d'une telle fonction ne jouent pas forcément un rôle prépondérant et nous verrons par la suite que le critère plus judicieux pour l'étude détaillée de ce système est celui de la pression locale dans le fluide.

3 Propriétés de l'équation SNLS

Bien sûr, SNLS et NLS étant des équations de même classe (hamiltoniennes, invariantes de phase, de translation et galiléennes) elles ont donc beaucoup de propriétés en commun:

- SNLS conserve le nombre de particules.

- la description du système se faisant toujours à l'aide d'un paramètre d'ordre complexe, la partie liquide admet des vortex quantifiés; si on cherche la solution vortex sous la forme: $\psi = \sqrt{\rho_0} R(\rho_0 r) e^{im\phi}$, m entier, on obtient l'équation satisfaite par $R(s)$:

$$-\frac{1}{2}\left(R'' + \frac{R}{s} - \frac{m^2}{s^2}R\right) + \left(\frac{2\rho_c}{\rho_0} - 1\right)R - \frac{2\rho_c}{\rho_0}R^3 + R^5 = 0 \quad (1.4)$$

les conditions aux limites pour R étant: $R(0) = 0$, $R(\infty) = 1$ et on cherche une solution telle que pour $s \rightarrow 0$, $R(s) \sim \lambda_m(\rho_c/rho_0)s$.

Pour de telles dynamiques seuls les vortex avec $|m| = 1$ sont stables linéairement, et la méthode du tir [25] permet de déterminer λ_1 numériquement pour une valeur du paramètre de contrôle proche de celle correspondant à l'Hélium superfluide à pression atmosphérique; on trouve $\lambda_1 = 0.286 \pm 0.001$. (voir figure (1.1))

- pour une solution homogène dans tout l'espace, de densité ρ_0 (la densité moyenne), le spectre d'excitations est du même type que pour l'équation de Gross-Pitaevskiï:

$$\omega^2 = 2\rho_0(\rho_0 - \rho_c)k^2 + \frac{k^4}{4}$$

Il comporte une partie de type phonon pour les excitations de grandes longueurs d'onde, avec une vitesse du son: $c = \sqrt{2\rho_0(\rho_0 - \rho_c)}$, ainsi que pour les petites longueurs d'onde un spectre de particules libres; il n'y a pas dans ce modèle d'excitations rotons. On remarque immédiatement que la consistance des ondes sonores implique que $\rho_0 > \rho_c$, *i.e.* que la densité moyenne soit supérieure à la densité de décomposition spinodale. Plus généralement, on peut considérer le spectre d'excitations autour d'une solution de densité ρ pas forcément égale à ρ_0 . En effet, le modèle autorise le partage de l'espace en domaines de densités distinctes séparés par des interfaces (interface liquide-gaz de fait séparant une "bulle" d'une "goutte"). Le spectre d'excitation est à nouveau du même type, avec une partie phonon (la vitesse du son est alors: $c\sqrt{2\rho(\rho - \rho_c)}$)

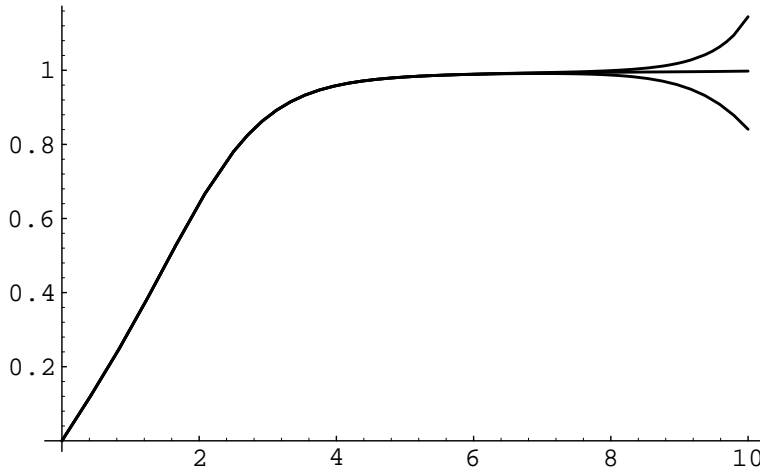


FIG. 1.1 – solution vortex $R(s)$ pour $m^2 = 1$ avec $\rho_c/\rho_0 = 0.625$. On intègre l'équation 1.4 à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2; on cherche à déterminer le paramètre λ_1 . Pour cela on procède par dichotomie, sachant que la fonction doit tendre vers 1 à l'infini. Sur le graphe on voit les solutions pour $\lambda = 0.285$ (la courbe redescend) $\lambda = 0.286$ (la courbe semble converger vers 1 pour les grands s) et $\lambda = 0.287$ (la courbe diverge).

et une partie particule libre.

-l'énergie libre comme fonction de la densité locale ρ , pour un système de densité moyenne ρ_0 permet d'étudier la stabilité relative entre les deux états linéairement stables: pour $\rho_c < \rho_0 < 2\rho_c$ on a vu que notre modèle comportait deux minima d'énergie, l'un pour $\rho = \rho_0$, l'autre pour $\rho = 0$; la valeur de l'énergie libre dans ces deux états permet de déterminer leur métastabilité relative: ainsi pour $\rho_0 > \frac{3}{2}\rho_c$ le gaz est métastable tandis que pour $\rho_0 < \frac{3}{2}\rho_c$ le liquide devient métastable (voir figure (1.2)).

-l'écriture hydrodynamique de SNLS donne:

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (1.5)$$

$$\partial_t \phi = \frac{1}{2\rho^{1/2}} \Delta(\rho^{1/2}) - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \rho^2 + 2\rho_c \rho - \rho_0(2\rho_c - \rho_0) \quad (1.6)$$

on reconnaît comme pour NLS l'équation de continuité (1.5), et l'équation de type Bernoulli (1.6), au terme de pression quantique près.

-l'équation d'état statique est cependant différente: en effet de l'équation (1.6) on peut extraire la densité d'enthalpie $h = \rho^2 - 2\rho_c \rho + \rho_0(2\rho_c - \rho_0)$. Ainsi comme pour NLS on déduit de l'enthalpie la pression suivant: $\nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla P$ (prenant la pression de la phase gazeuse nulle):

$$P = \frac{2}{3}\rho^3 - \rho_c \rho^2$$

On retrouve alors la vitesse du son par $c^2 = \frac{dP}{d\rho}$. La figure (1.3) montre la pression en fonction de la densité ainsi que la vitesse du son, fonction de la pression. Cette figure montre d'ailleurs que la pression est nulle pour $\rho = 0$ mais aussi pour une densité du liquide bien déterminée ($\rho = \frac{3}{2}\rho_c$),

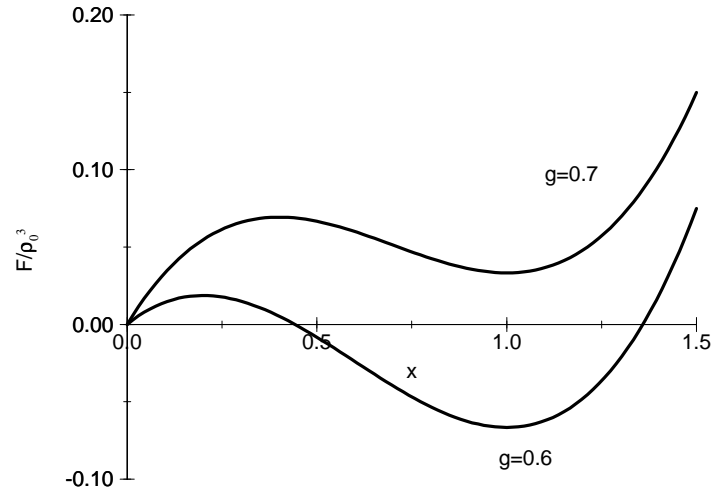


FIG. 1.2 – Diagramme de l'énergie en fonction de la densité, pour différentes valeurs du paramètre $g = \frac{\rho_c}{\rho_0}$. On remarque que pour $g = 0.6$ le liquide est l'état stable de plus basse énergie, alors qu'il est métastable pour $g = 0.7$.

ce qui permet de prédire que l'interface liquide-vapeur que permet de construire un tel modèle séparera deux domaines, l'un de densité nulle, l'autre de densité $\frac{3}{2}\rho_c$ (voir partie suivante pour le profil d'une telle interface ainsi que pour le calcul de la tension de surface qui en découle). En termes de pression, le critère de métastabilité se traduit par le fait que pour une densité locale plus faible que $\frac{3}{2}\rho_c$ la pression du liquide est plus faible que celle du gaz.

Le modèle peut alors être comparé à l'Hélium superfluide via quelques caractéristiques fondamentales: ici nous allons nous intéresser particulièrement au comportement de la pression proche du point de décomposition spinodale et au rapport entre la densité du liquide à pression nulle et celle correspondant à la décomposition spinodale); ceci n'est pas nécessaire formellement dans la mesure où SNLS apporte suffisamment d'"ingrédients" physique d'une transition de phase du

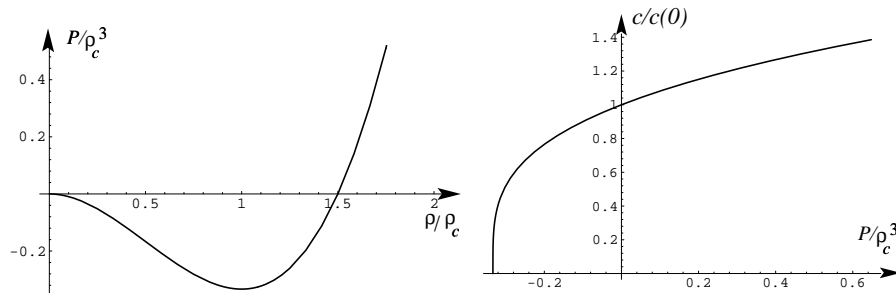


FIG. 1.3 – Diagramme de la pression en fonction de la densité a) et de la vitesse du son comme fonction de la pression en deçà du point de décomposition spinodale b). $c(0)$ est la vitesse du son à pression nulle. On remarque notamment que la vitesse du son s'annule au point de décomposition spinodale.

premier ordre dans un fluide sans viscosité pour que son étude soit riche d'enseignement par elle-même.

Au point de décomposition spinodale, la pression vaut $P_c = -\frac{1}{3}\rho_c^3$ et l'équation d'état peut alors s'écrire:

$$P - P_c \sim \rho_c(\rho - \rho_c)^2 \sim \frac{c^4}{4\rho_c}$$

ce comportement proche de P_c n'est pas en accord quantitatif avec les expériences; en effet pour des pressions positives il semblerait que la relation $c \sim (P - P_c)^{\frac{1}{3}}$ soit plus valide [26]; cependant ces mesures étant loin de P_c , on ne peut assurer leur validité pour des pressions négatives proche de P_c [27]. Un paramètre adimensionné que l'on peut par ailleurs déduire de ce modèle est le rapport entre la densité de liquide à pression nulle (on trouve cette densité égale à $\frac{3}{2}\rho_c$) et la densité de décomposition spinodale ρ_c : pour notre modèle ce rapport vaut donc $\frac{3}{2}$ alors que pour l'Hélium superfluide il vaut: $0.145/0.095 = 1.52$!!!

4 Écoulement autour d'un obstacle

Nous allons nous intéresser à l'écoulement d'un fluide modélisé par SNLS autour d'un obstacle; plus particulièrement nous étudierons l'écoulement bidimensionnel autour d'un disque de rayon R . Il s'agit du même problème que celui étudié dans la partie précédente. En revanche, cette fois, nous n'allons pas entrer dans les détails précis de la nucléation des vortex; nous considérerons le seuil d'apparition de la vorticité à l'ordre 0 en ξ_0/R , *i.e.* que nous prendrons comme critère $\partial_v(\rho(v)v) = 0$. Cependant ce critère de nucléation n'est pas le seul à prendre en compte. En effet, par effet Bernoulli, là où la vitesse est grande, la pression est basse et il convient d'analyser la stabilité de la phase liquide alors. Notamment il est important de regarder si, de ce fait, on ne nucléerait pas une phase gazeuse au bord de l'obstacle avant d'atteindre l'instabilité hyperbolique.

On considère donc le même problème que pour NLS: dans une géométrie bidimensionnelle, on observe un écoulement via SNLS autour d'un disque de rayon R , la vitesse et la densité à l'infini étant v_∞ et ρ_0 . La vitesse du son à l'infini, que nous noterons c_s vaut: $c_s^2 = 2\rho_0(\rho_0 - \rho_c)$. Nous nous placerons dans la situation où le liquide est l'état stable, la phase gazeuse étant métastable. ($\rho_c < \frac{2}{3}\rho_0$)

Nous allons donc nous intéresser, analytiquement et numériquement aux différents comportements que peut avoir un tel liquide dans ce contexte; analytiquement, d'un point de vue interaction liquide-vapeur, on peut distinguer trois cas suivant la vitesse locale du fluide, dans l'hypothèse d'un écoulement stationnaire: la phase liquide est toujours la phase thermodynamiquement stable; elle peut devenir, du fait de l'effet Bernoulli, métastable; enfin, la phase liquide est linéairement instable pour la même raison. Ces différentes vitesses typiques caractérisant le passage d'un état énergétique à un autre doivent être étudiées à l'aune de la possibilité que le fluide nuclée ou non des vortex quantiques. Ceux-ci apparaissent en effet pour une vitesse critique donnée et donc la manière dont ces différentes vitesses caractéristique s'ordonnent est fondamentale pour le comportement de l'écoulement *in fine*.

Pour le calcul de ces différentes vitesses, nous utiliserons l'équation 1.6 comme équation donnant la densité ρ du liquide en fonction de la vitesse locale v (de même que précédemment). Négligeant le terme de pression quantique et, tenant compte des valeurs à l'infini pour déterminer la

constante $\partial_t \phi$, on déduit l'équation implicite suivante:

$$\rho^2 - 2\rho_c \rho = \rho_0(\rho_0 - 2\rho_c) + \frac{1}{2}(v_\infty^2 - v^2) \quad (1.7)$$

Pour une vitesse donnée, il existe soit aucune solution pour ρ , soit deux solutions propriété fondamentale pour la cavitation (une solution correspondant au liquide, une au gaz).

4.1 Métastabilité du liquide

Le liquide devient métastable, au regard de la formation d'une interface liquide-vapeur lorsque la densité locale vaut, d'après la figure (1.3): $\rho = \frac{3}{2}\rho_c$; ceci donne une vitesse caractéristique, suivant la relation (??):

$$v_M^2 = v_\infty^2 + (\rho_0 - \frac{3}{2}\rho_c)(2\rho_0 - \rho_c)$$

4.2 Instabilité du liquide

Par un raisonnement similaire, on montre que le liquide devient instable lorsque la densité locale devient égale à ρ_c , densité critique. Par effet Bernoulli, le système atteint le point de décomposition spinodale. Cela donne:

$$v_{ins}^2 = v_\infty^2 + 2(\rho_0 - \rho_c)^2 = v_M^2 + \frac{1}{2}\rho_c^2$$

Naturellement, on a $v_{ins} > v_M$; en augmentant la vitesse, le liquide devient métastable avant de devenir instable !!

4.3 Critère de nucléation de vortex

A l'ordre 0 en ξ_0/R , le critère de nucléation de vortex correspond au passage de l'équation de phase d'elliptique à hyperbolique, ce qui arrive lorsque $\partial_v(\rho(v)v) = 0$. Pour cela on tire de (1.7) une solution approchée de ρ pour des valeurs proches de ρ_0 :

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{v^2 - v_\infty^2}{2c_s^2}\right)$$

Ainsi le critère de nucléation donne:

$$v_c^2 = \frac{v_\infty^2 + 2c_s^2}{3}$$

4.4 Comparaison des vitesses pour l'écoulement autour d'un disque

La vitesse est maximale dans ce cas sur le bord du disque et en faisant l'hypothèse d'un écoulement incompressible, elle vaut $2 \cdot v_\infty$ aux deux pôles du disque. Cette hypothèse n'est pas absolument exacte, puisqu'elle implique que le champ de vitesse est le même que dans le cas incompressible. Cependant, elle permet d'établir les ordres de grandeurs des différentes vitesses caractéristiques que l'on peut alors comparer afin d'observer l'ordre dans lequel les différents changements apparaissent lorsque la vitesse du fluide à l'infini croît.

On trouve donc, si l'on note ces différentes vitesses avec l'indice ∞ :

$$v_M^\infty = \sqrt{\frac{(\rho_0 - \frac{3}{2}\rho_c)(2\rho_0 - \rho_c)}{3}} \quad v_{ins}^\infty = \sqrt{\frac{2}{3}}(\rho_0 - \rho_c)$$

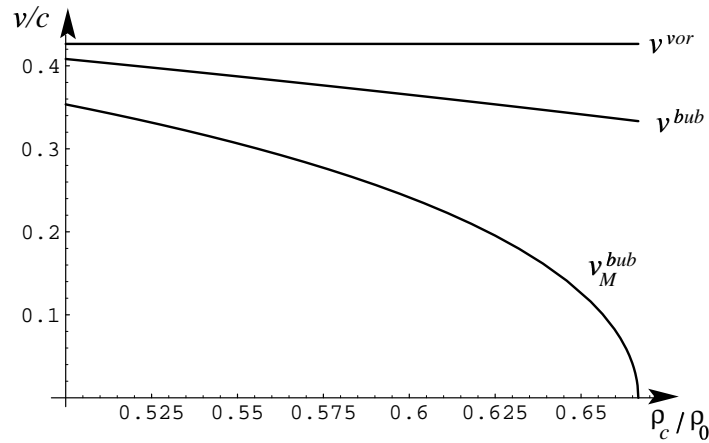


FIG. 1.4 – Les courbes v/c_s en fonction du paramètre g pour $1/2 < g < 2/3$ c'est à dire là où le liquide à l'infini est dans un état stable. v^{vor} , v^{bub} et v_M^{bub} correspondent respectivement à v_c^∞ , v_{ins}^∞ et v_M^∞ .

$$v_c^\infty = \sqrt{\frac{2}{11}} c_s = \sqrt{\frac{4\rho_0(\rho_0 - \rho_c)}{11}}$$

La figure (1.4) montre les rapports v/ρ_0 en fonction de $g = \rho_c/\rho_0$. On se rend compte sur cette figure que le critère le plus difficile à remplir est celui de nucléation de vortex qui, pour des situations où le liquide à l'infini est dans un état stable apparaît toujours à des vitesses supérieures à celles de l'instabilité du liquide. La courbe v_M^∞ s'annule naturellement pour $g = 2/3$, là où les deux états stables ont la même énergie et la même pression et où alors la moindre vitesse abaissera la pression dans le liquide par effet Bernoulli.

5 Interprétation des résultats numériques

Afin d'observer comment ces différents comportements interagissent, nous avons examiné l'écoulement pour des valeurs croissantes de la vitesse à l'infini, à rapport de densité $g = 0.6625$ constant. Cette valeur correspond justement à l'Hélium superfluide à des pressions de l'ordre d'1 bar. Pour une telle valeur du paramètre, les différentes valeurs des vitesses critiques sont alors: $c_s = 0.82$, $v_M^\infty = 0.0528 = 0.064c_s$, $v_{ins}^\infty = 0.276 = 0.34c_s$ et $v_c^\infty = 0.35 = 0.426c_s$. La condition au bord de l'obstacle est à nouveau $\psi = 0$.

5.1 Écoulements stationnaires

Pour de faibles vitesses à l'infini, jusqu'à des vitesses légèrement supérieure à v_M^∞ , un écoulement stationnaire s'instaure autour du disque. (voir figure (1.5 a)) On s'aperçoit de plus que la couche limite autour de l'obstacle, qui permet de passer de $\psi = 0$ sur le disque à $\psi = \rho_0$ à l'infini, se déforme, s'étirant notamment aux pôles, là où la vitesse est maximale. Ce profil de la couche limite peut être interprété grâce à l'équation (1.6). En effet, si on suppose que les variations de ce profil sont essentiellement radiales, écrivant $\psi = \sqrt{\rho_0} f(r, \theta) e^{i\phi}$, f doit satisfaire:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left[\frac{\Delta v^2}{2} + (2\rho_c - \rho_0)\rho_0 \right] f - 2\rho_c\rho_0 f^3 + \rho_0^2 f^5 = 0 \quad (1.8)$$

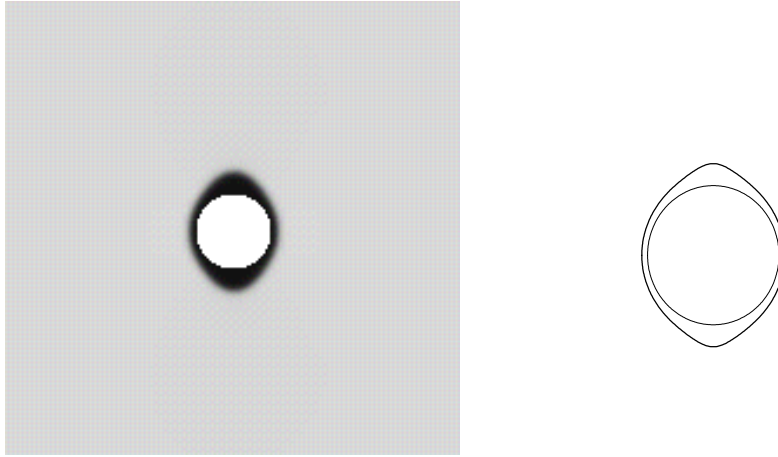


FIG. 1.5 – a) dessin de gauche: module de la fonction d'onde pour un écoulement stationnaire autour d'un disque de rayon $R = 10$; la vitesse à l'infini est légèrement supérieure à v_M^∞ : $v = 0.1$. Par effet Bernoulli, l'interface liquide-vapeur est étirée; la densité va croissante du noir ($\rho = 0$) vers le gris ($\rho = 1$). b) dessin de droite: profil déterminé par la formule approximative déduite de la solution pour un écoulement incompressible; on a pris: $\epsilon = 0.1$ et $(v_\infty/v_M^\infty)^2 = 0.9$. Bien que en fait on ait $v_\infty/v_M^\infty > 1$ et que l'on a pas tenu compte de la décroissance de la vitesse lorsque l'on s'éloigne de l'obstacle, cette formule est en bon accord avec le résultat numérique.

avec $\Delta v^2 = v^2 - v_\infty^2$, fonction de l'angle θ et lentement variable de r .

On peut remarquer tout d'abord que lorsque $v \rightarrow v_M$ la largeur de la couche limite diverge puisqu'alors le gaz a le même potentiel chimique que le liquide. De la structure de l'équation (1.8), cette largeur diverge comme $(v_M - v)^{-2}$. Cependant cette divergence est fictive car en fait v décroît lorsque l'on s'éloigne de l'obstacle, ce qui explique que même pour des valeurs de la vitesse à l'infini légèrement supérieure à v_M^∞ , un écoulement stationnaire, *i.e.* d'une certaine manière une solution de (1.8) s'instaure.

En partant de la solution incompressible de l'écoulement bidimensionnel autour d'un disque on peut établir une formule approximative du profil de l'interface, pour de faibles vitesses, proches de v_M . Sur le disque, et avec cette approximation: $v^2 = v_\infty^2 \sin^2(\theta)$ où l'angle θ est pris à partir de l'axe des x , on trouve pour le profil une équation polaire générique du type:

$$\frac{r(\theta)}{R} = 1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \frac{v_\infty^2}{(v_M^\infty)^2}(\sin^2(\theta) - \frac{\cos^2(\theta)}{3})}}$$

où ϵ est une fraction du rapport entre longueur de cohérence et rayon du disque.

Cette formule, malgré de multiples approximations, est en bon accord qualitatif avec le profil stationnaire à basses vitesses (voir figure (1.5 b)). Ainsi, comme pour le cas de NLS étudié précédemment, et cela n'a rien de surprenant, une solution stationnaire s'établit pour de faibles vitesses; ceci signifie d'après le théorème de d'Alembert qu'un écoulement sans dissipation existe alors.

5.2 Transition vers la dissipation

Pour des vitesses supérieures, à partir d'un seuil difficile à déterminer précisément, le liquide n'arrive plus à établir une couche limite stationnaire permettant de passer de la surface de

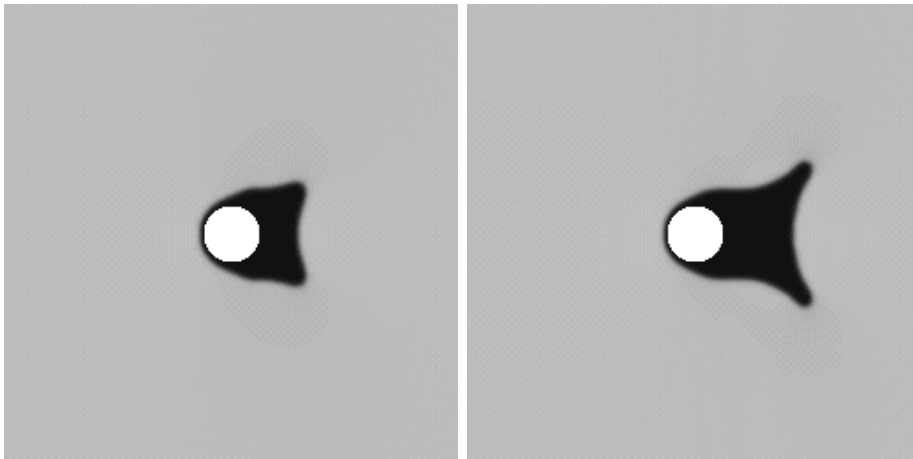


FIG. 1.6 – module de la fonction d'onde ψ à deux temps successifs pour une vitesse $v_\infty = 0.18$; la déformation de l'interface a accéléré le liquide localement à tel point qu'une paire de vortex a pu être nucléée; ces vortex, advectés par le courant, conduisent à une advection de la vapeur vers l'arrière du disque ainsi qu'à une croissance de la phase gazeuse. On identifie clairement les vortex comme les pointes rondes aux extrémités de la vapeur. Dans le dessin de droite, on remarque que la bulle n'avance quasiment plus sous l'impulsion des vortex qui vont pouvoir alors se détacher de la phase gazeuse.

l'obstacle où la densité est nulle au liquide loin de l'obstacle. Cela se traduit dans un premier temps par un étirement "sans fin" de la couche limite près des pôles. En fait il se développe une région de vapeur à cet endroit; tout d'abord une poche de gaz croît là où la pression est la plus faible, c'est à dire perpendiculairement à l'écoulement, à partir des pôles. Ainsi l'étirement de la couche limite par effet Bernoulli sur la surface montre que l'obstacle se comporte dans notre modèle comme une source de cavitation, chose bien connue pour les fluides ordinaires. Ce processus est de plus auto-entretenu: en effet, dans la mesure où une région où $\psi = 0$ se développe, vis à vis de notre fluide, elle va jouer le même rôle que jouerait un obstacle épousant les formes de cette bulle (ceci est valide car on peut négliger la vitesse de l'interface devant la vitesse caractéristique de l'écoulement v_∞). Formellement, on peut considérer que notre solide se déforme et qu'il prend une forme ovale (le début de formation de cet ovale est d'ailleurs initié sur la figure (1.5)); le rayon de courbure de l'obstacle diminuant, le fluide proche de l'interface est accéléré, augmentant alors d'autant la croissance de la bulle, etc... Une manière naïve de comprendre ce phénomène est de considérer que lorsque l'obstacle se déforme en augmentant une de ses dimensions, il doit "expulser" plus de matière arrivant à flux constant (imposé par la vitesse à l'infini); pour ce faire la vitesse locale est augmentée, ce qui accroît la déformation de l'obstacle.

Ainsi les vitesses locales au bord de cette bulle qui grossit atteignent rapidement les valeurs critiques v_{ins} puis v_c et l'on observe numériquement la nucléation de vortex au bord de cette bulle. Ces vortex, comme dans le cas de NLS simple sont advectés par le flot et "tirent" l'interface gazeuse avec eux, comme le montrent les figures (1.6).

Les vortex se détachent de la bulle lorsqu'ils sont suffisamment loin de l'obstacle (voir figure (1.7)); l'interface liquide vapeur ne peut en effet s'étendre à l'infini, et à une certaine distance de l'obstacle, le coût en énergie de l'accroissement de la bulle permet aux vortex de se détacher de cette bulle. Comme pour NLS, lorsque les vortex se sont éloignés, la vitesse locale près de l'obstacle, qui avait décré du fait de la nucléation de ces vortex, augmente à nouveau et de nouveaux vortex sont émis plus ou moins périodiquement. A cela se rajoute le comportement de

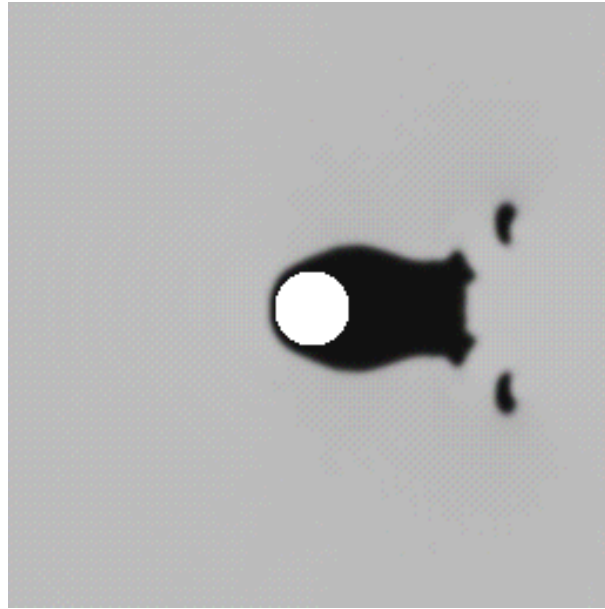


FIG. 1.7 – Lorsque la bulle étirée par l’advection des vortex dans le champs extérieure de vitesse est suffisamment grande, les vortex peuvent se détacher de la bulle de Kirchhoff, qui amorce alors un comportement périodique, alternant étirement du à la nucléation des vortex et rétraction lorsque les vortex se détachent.

la bulle gazeuse située à l’arrière de l’obstacle: une fois que les vortex sont détachés de cette bulle, elle se rétracte vers l’obstacle, d’une part car la phase thermodynamique la plus stable est alors le liquide, d’autre part du fait du terme de tension de surface; cependant d’autres vortex sont émis qui étirent la bulle comme précédemment, jusqu’à ce que, à nouveau, ces vortex se détachent, à la même distance de l’obstacle que les premiers; la bulle aussi admet donc un comportement périodique dû à cet étirement par les vortex et à la rétraction en l’absence de vortex. Cette bulle pourrait être vue, pour notre modèle, comme l’équivalent de la bulle de Kirchhoff pour les fluides réels [28], bulle entretenue par la vorticité crée dans l’écoulement, de même qu’ici elle est maintenue par la nucléation périodique de vortex quantifi es.

6 Conclusion

Le processus de transition vers la dissipation pour le modèle SNLS apparaît donc comme le résultat d’une interférence entre nucléation de la phase gazeuse et transition dissipative connue pour NLS. Notamment on a pu mettre en avant que, dès qu’une bulle se développe depuis les bords de l’obstacle, par un processus d’auto-accélération du liquide, cette bulle croît, accélérant d’autant le liquide jusqu’à nucléer finalement des vortex par le processus  etudi e dans la première partie. La vitesse critique effective de nucléation de ces vortex est celle à partir de laquelle l’écoulement n’arrive plus à établir une couche limite stationnaire entre le fluide à l’infini et l’obstacle, qui joue alors le rôle de source pour la cavitation. Cette vitesse est approximativement, étant donnée la condition aux bords imposée à la fonction d’onde sur l’obstacle la vitesse de métastabilité du liquide v_M . Elle est en fait légèrement supérieure à cette vitesse, car v_M est la vitesse pour laquelle le liquide est métastable un seul point de l’écoulement le pôle du disque, de plus dans le cadre d’une approximation incompressible. Cependant il n’a pas été possible

numériquement d'établir avec précision cette vitesse critique effective à l'infini v_{eff}^∞ . Finalement, on peut remarquer que ce scénario abaisse considérablement la vitesse critique conduisant à la nucléation de vortex (voir la figure (1.4)); par exemple à pression atmosphérique la vitesse de nucléation est diminuée d'un facteur 10!! Or expérimentalement la vitesse critique a toujours été considéré comme étant quasiment d'un ordre de grandeur plus faible que celle prédite par le critère de Landau. Ce mécanisme donne en quelque sorte une explication possible de cette observation.

Chapitre 2

Cavitation par explosion puissante

1 La cavitation.

Depuis quelques années, l'Hélium superfluide (He^4), du fait de ses propriétés quantiques et aussi du fait qu'on peut l'obtenir très pur et que la pression de vapeur saturante est très faible (~ 0 bar), a été utilisé afin d'étudier des phénomènes de cavitation.

Notamment, au laboratoire de Physique Statistique, Hadrien Lambaré, dans sa thèse, s'est intéressé à la cavitation de bulle dans l'Hélium superfluide par focalisation d'onde sonore hémisphérique. Le modèle que j'ai exposé dans le paragraphe précédent semble très adapté pour aborder analytiquement et numériquement ce genre de problème. Notamment, ce modèle peut être simplement considéré comme explicitant la dynamique d'un fluide non-visqueux possédant une équation d'état diphasique simple. Numériquement, l'utilisation du formalisme de SNLS possède de nombreux avantages: l'équation d'Euler, prise en tant que telle pour modéliser un tel fluide conduit à des divergences redoutables que l'on évite dans SNLS grâce au terme de pression quantique qui régularise en quelque sorte le champ de vitesse. Etant donné le caractère cependant approximatif du modèle, je me suis attaché, dans le cadre de cette collaboration avec Hadrien Lambaré et Patrice Roche à décrire les phénomènes de manière plus qualitative que quantitative. De plus, l'expérience numérique étudié est très coûteuse en temps et il n'a pas été possible d'obtenir de larges résultats quantitatifs, ce travail ayant été réalisé vers la fin de ma thèse.

2 Expérience dans l'Hélium Superfluide.

2.1 Focalisation d'ondes hémisphériques.

Je décris ici très brièvement l'expérience réalisée au Laboratoire par Balibar *et al* [29] afin de pouvoir relier les résultats expérimentaux à une "expérience" numérique.

Dans un cryostat contenant de l'Hélium superfluide à une température pouvant descendre jusqu'à quelques centaines de milli-Kelvin, une excitation sonore sinusoïdale est créée par une céramique piezzo-électrique hémisphérique, sous une pression extérieure de l'ordre de la pression atmosphérique (bien que ce soit possible d'agir aussi sur ce paramètre). L'onde sonore, converge vers le centre de la céramique et y crée un signal périodique alternant compression et détente. Etant donné la non-linéarité de la propagation d'onde dans l'Hélium, le signal au centre n'est plus du tout sinusoïdal. Dans l'Hélium superfluide, comme dans SNLS, la vitesse du son dans le fluide est une fonction croissante de la densité locale.

Ainsi, les périodes de hautes pressions vont se raidir alors que les basse pressions vont au contraire s'étaler et le signal au centre de l'hémisphère sera composé de pics de très hautes surpressions espacés par des zones de basses pressions (négatives) d'intensité moindre en valeur absolue. La cavitation est alors observée à l'aide d'un faisceau laser passant par le centre du piezzo-électrique dont la déviation indique clairement la présence ou non d'une bulle dans le fluide.

2.2 Observation expérimentale.

Pour initier la cavitation, il faut nucléer dans le fluide une bulle de gas d'un rayon supérieur au rayon de Gibbs, ($R_{Gibbs} \sim 10 \text{Angst.}$ pour l'Hélium). Deux processus ont été observés:

- pour des températures supérieures à 0.4 Kelvin, les bulles sont activées par des processus thermiques.

- en dessous de cette température il semble que l'activation soit due à un effet tunnel. [30]

Localement, cette bulle de Gibbs est soumise à une pression négative au centre de l'hémisphère durant la phase de détente et le rayon de cette bulle croît donc très rapidement (quelques μm). Finalement, cette bulle évolue sous une pression statique positive et croît jusqu'à un rayon typique de quelques dizaines de μm (suivant la pression statique) avant de se rétracter.

Le collapse final de la bulle est alors suivi par la nucléation d'une bulle d'énergie cinétique moindre (dans les expériences, cette bulle rebond possède environ dix fois moins d'énergie que la bulle initiale). Il semble clair que une grande partie de l'énergie de la bulle initiale a été dissipée dans le spectre d'excitation du liquide sous forme de phonons et de rotons.

Ce phénomène du rebond de la bulle est assez connu dans les liquides classiques, bien que les causes de ces rebonds semblent différentes. En effet, dans un liquide ordinaire (notamment l'eau), la bulle de gas est essentiellement formée par les gaz dissouts du liquide dont on peut difficilement éviter la présence. Lors du collapse de la bulle, c'est la contraction de des gas dissouts qui repoussent la contraction de l'interface liquide-vapeur qui conduit au rebond.

On voit alors que la bulle ne se rétracte pas totalement avant le rebond, alors que dans le cadre de l'Hélium, il semble au contraire que le collapse soit total avant qu'une nouvelle bulle ne se crée. Il faut d'ailleurs noter que l'Hélium superfluide ne comporte pas de gas dissouts.

3 Explosion puissante dans SNLS

Il est possible, en utilisant l'équation SNLS, d'étudier en détail numériquement la propagation d'ondes sphériques convergentes. Cependant, ceci réclamerait des précautions telles (notament, comme toujours en sphérique, proche de $r = 0$) qu'il m'a paru plus simple d'aborder le problème d'un autre point de vue et de m'intéresser spécifiquement au rebond. Une remarque fondamentale dans ce qui suit provient de l'étude du paragraphe 106 du cours de Physique Théorique de Landau et Lifchitz. Il s'agit d'observer la dynamique d'une explosion puissante dans un fluide, *i.e.* que l'on suppose focalisée, à l'instant $t = 0$, en $r = 0$, une énergie E . La propagation d'une telle condition initiale correspond, dans un gaz polytropique notamment à une onde de choc divergente. La seule variable sans dimension que l'on peut extraire d'un tel problème est naturellement:

$$r(\rho_0/Et^2)^{1/5}$$

La loi de déplacement de l'onde de choc est donc déterminée par la donnée de R la distance de l'onde au centre; du fait du caractère auto-similaire de l'écoulement, on a:

$$R = \beta \left(\frac{Et^2}{\rho_0} \right)^{1/5}$$

soit simplement que la position de l'onde de choc doit correspondre à une certaine valeur β de la combinaison sans dimension.

Ainsi, le caractère auto-similaire de la dynamique se traduit par le fait que toutes les variables physiques derrière l'onde de choc sont fonction du paramètre $\xi = \frac{r}{R}$. Dans le cadre d'un gaz polytropique, on peut résoudre exactement les différentes équations régissant l'écoulement d'une telle onde (notamment il s'agit d'écrire les différentes équations de continuité).

Il apparaît alors que pour certaines propriétés du gaz polytropique, une zone de densité nulle peut se développer.

L'équation de Schrödinger ne modélise pas un fluide polytropique, cependant on peut aisément comprendre l'intérêt de l'étude de l'explosion puissante dans un tel système. En effet, la propagation d'une telle onde divergente dans un écoulement intrinsèquement potentiel ($\vec{v} = \nabla(\phi)$) possède des propriétés bien connues liées en fait à la propagation d'ondes sonores dans les fluides potentiels; il est notamment montré que pour des ondes sphériques considérées comme de faibles perturbations (approximation linéaire), donc avec une vitesse du son constante, en chaque point situé à une distance r du centre de l'onde, la surpression moyenne dans le temps est nulle; en d'autres termes on ne peut avoir une onde sphérique uniquement de compression ou de détente. Une phase de compression est donc nécessairement suivie d'une phase de détente. Ce résultat est valide en dimension deux; une onde à symétrie cylindrique ne peut être de même purement compressive. Par contre en géométrie plane (ou à une dimension) il peut exister des ondes de compression pure ou de détente pure. Si on suppose le problème de l'explosion puissante, en première approximation, comme un problème de propagation d'une onde sonore dans un milieu (certes la vitesse du son dépend de la densité locale mais on suppose que l'on peut négliger cette non-linéarité au premier ordre), il apparaît clairement que l'onde de choc est suivie d'une dépression. Si cette dépression est suffisamment élevée, *i.e.* si elle atteint le point de décomposition spinodale, il peut y avoir cavitation.

Implicitement, durant toute cette étude, nous avons supposé négligeable les variations angulaires des différentes variables; c'est à dire que nous n'avons pas tenu compte de l'instabilité de Taylor-Couette des ondes de chocs et des bulles en géométries sphérique et cylindrique.

4 Cavitation par explosion

Dans le cadre particulier de l'équation SNLS, une explosion puissante est tout simplement une sur-densité en $r = 0$. Nous avons donc étudié une telle explosion numériquement en géométrie sphérique, cylindrique et plane. La figure 2.1 montre l'évolution du profil de densité, en fonction du rayon r à différents temps.

On remarque ainsi que le front de l'onde se déplace en baissant d'intensité suivie par une dépression; cette dépression est telle qu'une région de densité nulle peut se développer. On obtient donc de la cavitation par explosion puissante. On observe aussi qu'en aval du choc, des ondes sont émises, qui se déplacent plus rapidement que l'onde de choc. En fait l'onde divergente rayonne et perd donc de l'énergie par cette émission. Cette expérience numérique va permettre ainsi, d'une part de justifier l'hypothèse d'explosion puissante pour simuler le collapse d'une bulle; d'autre

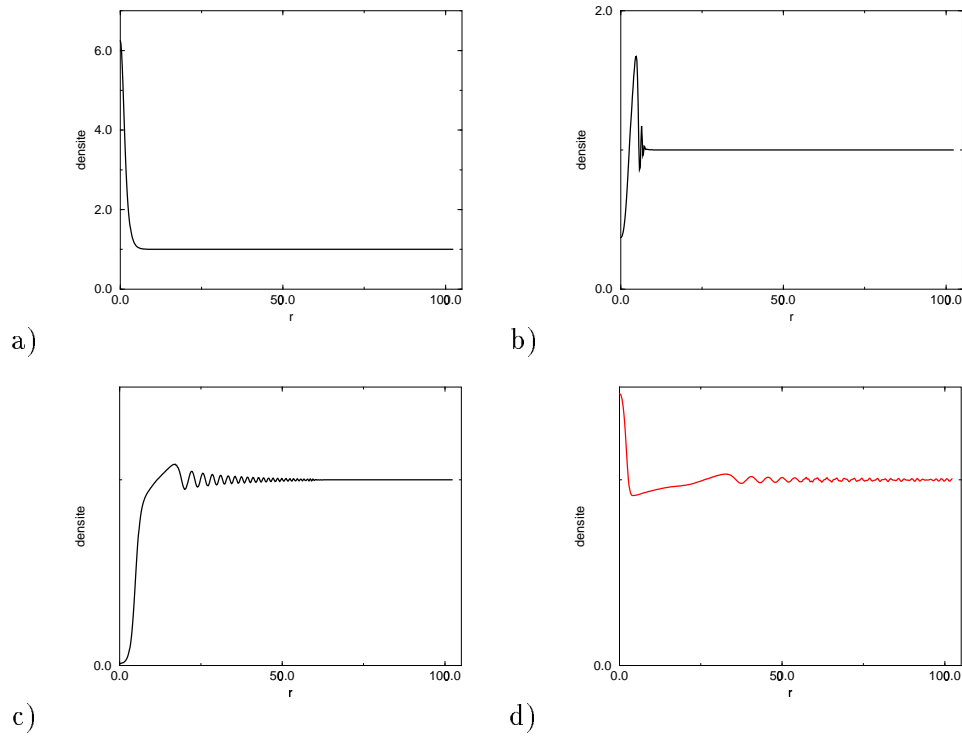


FIG. 2.1 – *Dynamique de l'explosion violente en géométrie sphérique, pour $\rho_c = 0.6$, pour un système de 1024 points, avec $dx = 0.1$. a) profil de densité initial b) la surdensité se propage, laissant place à une phase dépressionnaire, tandis que des phonons sont émis à l'avant de l'onde de choc c) une bulle de gaz d'une quinzaine d'unités est créée; une partie de l'énergie s'échappe au devant de l'onde sous forme de phonons. d) la bulle s'est rétractée, créant un profil de densité similaire à celui considéré comme condition initiale, mais contenant une énergie bien plus faible.*

part, nous allons pouvoir observer ainsi le rayonnement d'une bulle par émission de phonon et calculer numériquement le taux d'énergie diffusé de cette manière afin notamment d'expliquer le fait que la bulle rebond n'a environ que 15 pourcent de l'énergie de la bulle initiale.

En effet, la pression statique étant positive, la bulle se rétracte et on observe que lors de son collapse on obtient bien une surdensité en $r = 0$ typique d'une explosion puissante. Cette surdensité est bien plus faible que celle mise initialement, ce qui se comprend bien sûr par le fait qu'une grande partie de l'énergie de la bulle est "partie" sous forme de phonon. Il convient ici de noter que les surdensités ou surpressions qui sont en cause ne sont en aucune mesure comparable à celles obtenues par la simple convergence d'ondes sonores. Ainsi cette cavitation par explosion puissante ne peut avoir lieu que lors du collapse d'une bulle mais en aucun cas lors de la focalisation d'ondes sonores. Il est très difficile d'avoir une idée des pressions mises en jeu lors de l'expérience de focalisation d'ondes sonores, du fait des non-linéarités, mais on peut cependant évaluer les surpressions au centre de la céramique de l'ordre de quelques dizaines de bars, alors que, dans l'expérience numérique présentée figure 2.1, qui donne naissance à une bulle de quelques Angstroëm de diamètre, la surpression initiale est de l'ordre de 15 kilobars !! On remarque de plus que le collapse de cette bulle, de taille bien inférieure à celles observées expérimentalement, donne déjà naissance à une surpression typique de l'ordre de 100 bars, qui ne donnera pas naissance à une nouvelle bulle rebond.

Il est clair que l'on obtient une bulle par explosion puissante si suffisamment d'énergie a été injectée initialement en $r = 0$. Il existe donc une énergie critique au delà de laquelle on nucléé une bulle et en deçà de laquelle on n'obtient pas de cavitation.

Les figures 2.2 et 2.3 montrent la même simulation numérique en géométrie respectivement cylindrique et plane. On note, comme prédit au paragraphe précédant que à deux dimensions, une telle surpression est suivie par une forte dépression qui peut alors, comme sur la figure, nucléer une bulle. Par contre à une dimension, l'onde se propage sans provoquer de cavitation.

Etant donné la puissance de calcul nécessaire, il n'a pas été possible d'obtenir des bulles d'une taille supérieure à une vingtaine de longueur de cohérence (ce qui équivaut à des bulles d'Hélium de quelques dizaines d'Angstroem); c'est notamment pourquoi nous n'avons pu observer la cavitation par rebond de bulle, l'énergie du collapse de la première bulle étant trop faible. Pourtant malgré cela, les bulles obtenues étant grandes devant les longueurs typiques de SNLS (qui en fait sont toutes égales à 1), il semble clair que le rebond de bulle devrait être observé et que les phénomènes mis en jeu ne devraient pas différer si on pouvait réaliser de telles simulations.

Numériquement, il n'a pas été possible,

5 Physique de l'explosion.

L'explosion puissante dans SNLS répond bien aux lois d'échelles déterminées par l'analyse dimensionnelle. Notamment, le rayon de la bulle évolue bien suivant une loi $t^{2/5}$, aussi bien lors de l'explosion que lors du collapse (voir figure 2.4).

L'énergie contenue dans le volume délimité par l'onde de choc permet d'observer quantitativement la répartition de l'énergie entre celle contenue dans la bulle et celle diffusée dans le spectre. La figure (2.4 d)) montre l'évolution de l'énergie contenue dans un volume déterminé par le volume de la bulle (si elle est nucléée) en fonction du temps et on peut remarquer que l'énergie contenue dans le collapse de la bulle correspond environ au dixième de l'énergie de la bulle initiale.

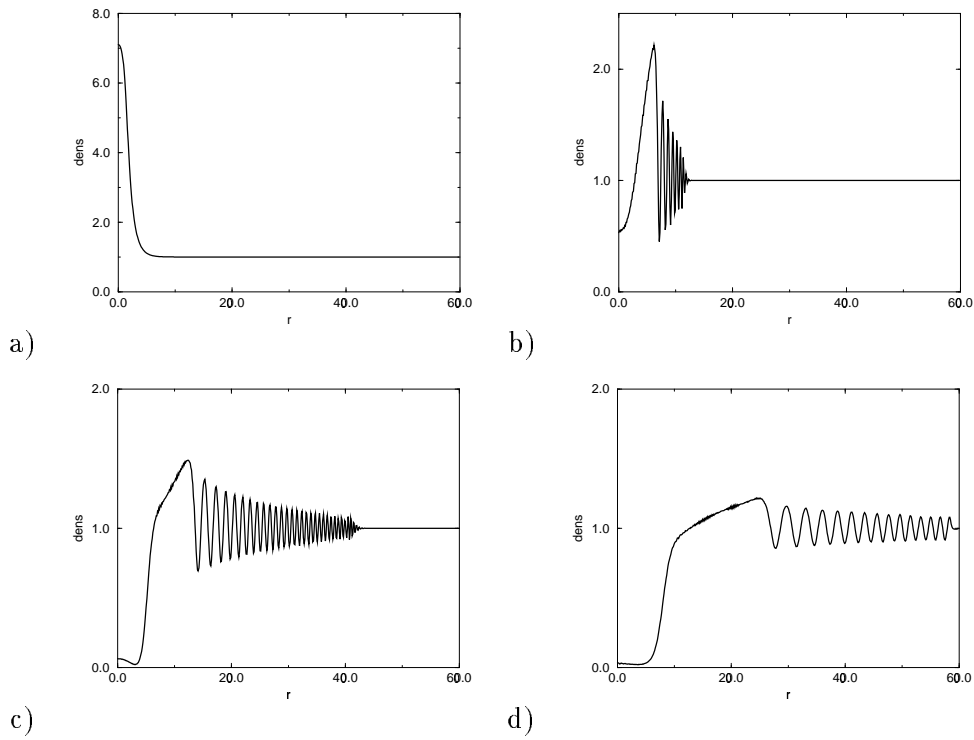


FIG. 2.2 – *Dynamique de l'explosion violente en géométrie cylindrique, pour $\rho_c = 0.65$, pour un système de 512 points, avec $dx = 0.117$. profil de densité pour a) $t=0.06$ b) $t=1.25$ c) $t=4.76$ d) $t=15$ unité de temps. De même qu'en géométrie cylindrique, cette onde de choc est suivie par une dépression conduisant à une bulle gazeuse.*

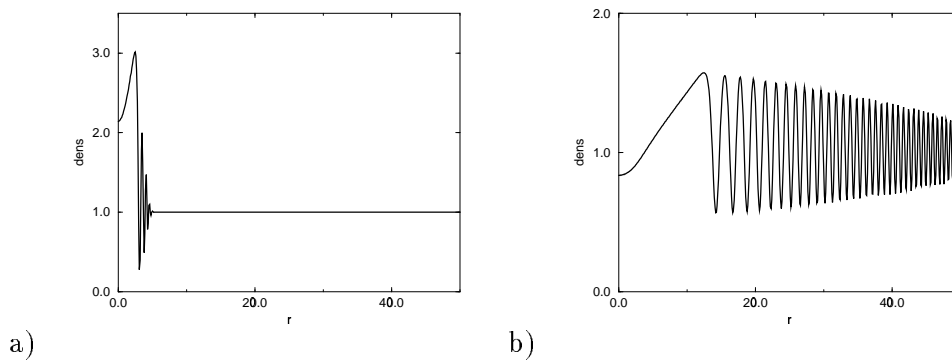


FIG. 2.3 – *Explosion de même amplitude en géométrie unidimensionnelle (plane). pour $\rho_c = 0.65$, pour les temps a) $t=0.44$ et b) $t=5.77$. On remarque qu'il n'y a pas de bulle nucléée à l'arrière de l'onde de choc.*

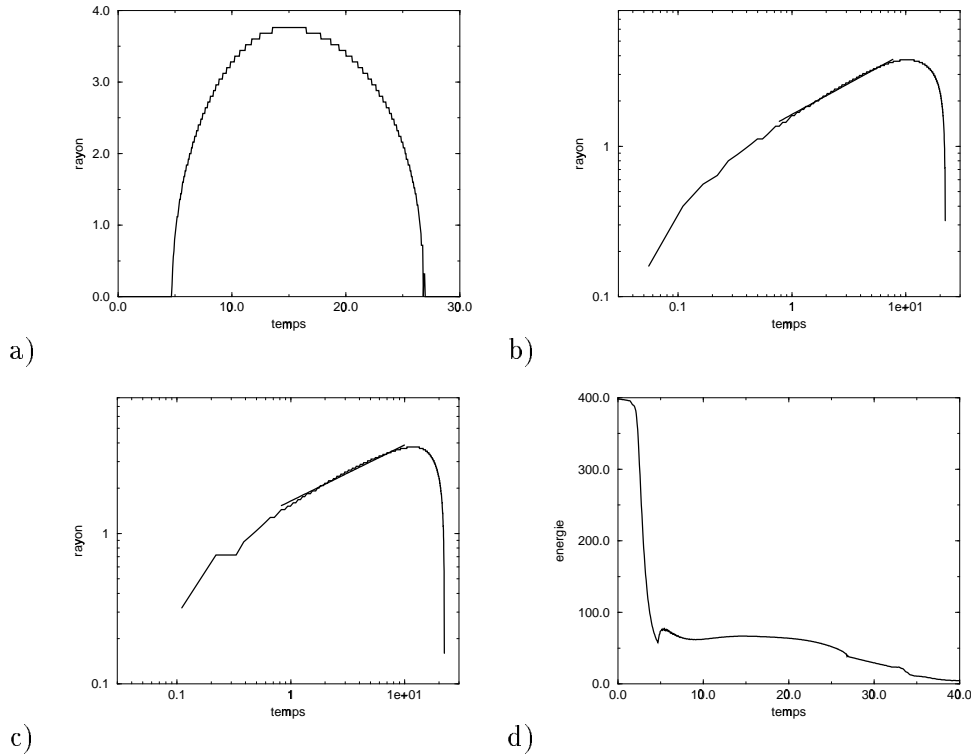


FIG. 2.4 – a) Rayon en fonction du temps, en géométrie sphérique, pour $\rho_c = 0.65$. Initialement, la surdensité est de forme gaussienne, sur une largeur de 2 unité d'espace et d'amplitude maximale $\delta\rho = 3$. b) diagramme log-log du rayon en fonction de $t - t_1$, t_1 correspondant à l'apparition de la bulle. Noter que le rayon croît en $(t - t_1)^\nu$ avec $\nu = 0.41$. c) De même pour l'évolution du rayon lors du collapse. L'exposant ν vaut alors 0.37. d) Evolution de l'énergie contenue dans une sphère de rayon déterminé par le rayon de la bulle (plus une constante) en fonction du temps. Le creux observé autour de $t = 10$ est un artéfact du calcul. Par contre on observe un second plateau correspondant à l'énergie contenue dans le collapse de la bulle (autour de $t = 35$). On remarque que cette énergie est de l'ordre du dixième de l'énergie initiale.

6 Conclusion-Perspectives

Nous avons proposé une explication consistante de la cavitation d'une bulle rebond dans l'Hélium superfluide (ou dans tout fluide inviscide pur), cependant, afin de mieux comprendre quantitativement l'évolution de cette bulle, il nous reste à expliciter des solutions sphériques de SNLS, au moins dans des limites asymptotiques (voir [31]).

En outre, nous avons montré comment SNLS pouvait constituer un outil intéressant dans la dynamique de transition de phase d'un système conservatif. Notamment il semble intéressant d'étudier dès à présent, à l'aide de ce modèle, des problèmes tels que la sonoluminescence ou le collapse d'une bulle proche d'une paroi³ [32] [33] [34].

3. il apparaît alors un jet puissant jouant un rôle prépondérant dans la physique de l'érosion.

Quatrième partie

Coalescence dans un système diphasique

L'équation SNLS, que nous avons développé et étudié en considérant notamment ses connexions avec l'équation de Schrödinger non-linéaire défocalisante, puisque le signe du terme en $|\psi|^4\psi$ donne cette propriété défocalisante, peut être considéré d'un autre point de vue. En effet, par exemple pour de faibles densité, le terme que nous venons d'évoquer devient négligeable et le terme dominant est celui en $|\psi|^2\psi$ dont le signe est opposé à celui que nous utilisons pour NLS et correspond à l'équation de Schrödinger non-linéaire focalisante. SNLS peut donc alors être étudié en ayant bien en tête les propriétés de cette équation utilisée en optique non-linéaire en particulier.

1 Optique Non-Linéaire

La propagation d'un champ électromagnétique dans un milieu non-linéaire, *i.e.* où l'indice de réfraction dépend de l'intensité du champ, se modélise, notamment dans le domaine des fibres optiques par l'équation de Schrödinger non-linéaire focalisante citée plus haut:

$$i\partial_t\psi = \nabla^2\psi + |\psi|^2\psi \quad (0.1)$$

ψ représente alors le module du champ électrique.

Cette équation est en fait générique pour l'étude de singularités à temps fini. En effet, pour un grand nombre de conditions initiales, en dimensions d'espace supérieures ou égales à deux, on observe la formation de singularités qui ne se manifestent pas par une divergence qui formellement apparaîtrait en un temps infini, mais plutôt par une divergence qui aurait lieu en un temps t^* . Expérimentalement, on observe plutôt une sorte de filamentation, soit des pulses d'intensité très élevée; cela signifie que la divergence est stoppée. On peut en effet imaginer que lorsque l'intensité du champ devient très importante, il faut prendre en compte les termes d'ordre supérieur dans le développement de l'indice de réfraction. On obtient donc, si l'on suppose que le terme suivant est justement défocalisant, l'équation SNLS qui peut donc s'appliquer à différents domaines. Dans le cadre de l'Hélium, ces solutions pulses s'apparentent à des gouttelettes superfluides et peuvent donc avoir un intérêt pour l'étude récente de la condensation de Bose-Einstein dans le Lithium (Li_7) particulièrement. En effet, pour le Lithium, l'interaction à deux particules est attractive, ce qui rend à basse température ce gaz instable tandis que les interactions à trois particules, répulsives stabilisent ce fluide.

Nous allons donc nous intéresser à ces structures localisées et à leur formation; notamment nous allons nous intéresser à leur stabilité et aussi au comportement d'échelle mis en jeu lors des différents processus qui conduisent à leur formation.

On peut noter aussi qu'une dynamique purement variationnelle, et donc non-conservative d'un point de vue nombre de particules, du fait qu'il faille minimiser une fonction (énergie libre, enthalpie libre...), conduirait simplement à une solution homogène, correspondant à l'état dont la densité minimise la fonctionnelle densité régissant la physique. En outre il a été montré que l'ajout à une telle dynamique variationnelle d'une "once" non-variationnelle, via un terme sous-critique perturbatif, permettait d'obtenir des solutions stables solitaires non homogènes au problème. Ces solutions, décrites par Thual et Fauve (citer thf), étudiées par ailleurs par Hakim et Pomeau (citer hap), ne sont cependant pas des solitons, mais simplement des ondes solitaires; alors ce sont les effets non-variationnels qui stabilisent ces solutions, linéairement instables dans la dynamique variationnelle pure.

Nous partons avec l'équation SNLS écrite sous la forme:

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi - 2\rho_c|\psi|^2\psi + |\psi|^4\psi \quad (0.2)$$

Pour $|\psi|^2 \ll \rho_c$ le terme cubique (et ainsi une équation du type de 0.1) est suffisant pour décrire l'évolution du système. On a vu dans le chapitre précédent que pour l'Hélium He^4 on avait $\rho_c \sim 0.1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, alors que dans le cadre de l'optique non-linéaire, ρ_c est de l'ordre de l'intensité typique du champs électrique inter-atomique ($\rho_c \sim 10^{22} \text{ V}^2/\text{m}^2$).

Alors que dans la partie précédente nous nous étions intéressés à l'étude d'un tel fluide proche d'une densité moyenne largement supérieure à ρ_c , nous allons observer le comportement d'un système lorsque la densité moyenne est inférieure ou égale à ρ_c .

2 Coalescence dans un système linéairement instable

La densité du fluide, ρ , satisfait une équation d'onde, linéaire au premier ordre pour les grandes longueurs d'onde, du type $\partial_{tt}\rho = c^2\Delta\rho$. Pour une densité ρ , la vitesse du son vérifie:

$$c^2 = \sqrt{2\rho(\rho - \rho_c)}$$

Cette vitesse s'annule pour $\rho = \rho_c$ et devient imaginaire en deça. Ceci signifie que, pour $\rho < \rho_c$, une perturbation de densité linéaire, sous la forme $\rho + \delta\rho_k e^{ik \cdot x + \sigma_k t}$, on obtient la relation:

$$\sigma_k = \pm \sqrt{k_0^2 k^2 / 2 - k^4 / 4}$$

avec $k_0^2 = 4\rho(\rho_c - \rho)$.

Donc, toutes perturbations de nombre d'onde $k < \sqrt{2}k_0$ sont linéairement instable. Ainsi, partant d'une densité initiale homogène ρ_0 inférieure à ρ_c auquel on ajoute un bruit blanc de faible intensité pendant un très court instant (*i.e.* $\ll 1$ puisque tous les paramètres du problème sont d'ordre unité), on observe une croissance exponentielle des fluctuations de densité introduites par le bruit. Il s'ensuit la création d'un réseau de faibles et hautes densités, de longueur caractéristique de l'ordre de la longueur d'onde du mode le plus instable, *i.e.* $2\pi/k_0$.

Ceci conduit dans un premier temps à un partage de l'espace en domaines linéairement stables de haute densité ($\sim \rho_c$) et de basse densité (~ 0). Cette phase est très rapide (de l'ordre d'une dizaine d'unité de temps) et est concomitante avec la retraction des "gouttes" (les domaines de haute densité), due à la tension de surface: en effet, la pression dans un tel système vaut

$$P = \frac{2}{3}\rho^2(\rho - \frac{3}{2}\rho_c)$$

Ainsi, la phase liquide se rétracte jusqu'à ce que la densité interne atteigne $\frac{3}{2}\rho_c$ et donc que la pression du liquide soit égale à la pression de la phase gazeuse ($\rho = 0$). On peut comprendre le fait que les gouttes qui se forment soient de densité $\frac{3}{2}\rho_c$ par un argument énergétique; en effet, l'énergie libre du gaz est nulle, tandis que l'énergie libre associée à l'autre minimum de \mathcal{F} , pour une valeur de la densité homogène ρ_0 vaut $\rho_0^2(\rho_c - \frac{2}{3}\rho_0)$ et s'annule donc pour la densité $\rho_0 = \frac{3}{2}\rho_c$. On voit donc que les gouttes de densité homogène qui se forment doivent avoir une densité de $\frac{3}{2}\rho_c$ pour être en équilibre avec la phase gazeuse.

Alors prend place un processus beaucoup plus lent, où les bulles et les gouttes coalescent, formant des domaines de taille caractéristique de plus en plus grande. (voir figure 0.5 pour l'ensemble des processus entrant dans la dynamique décrite)

Ce phénomène permet d'observer des comportements d'échelle dans le système, dus en particulier au caractère autosimilaire du processus de coalescence. En effet, on peut considérer que

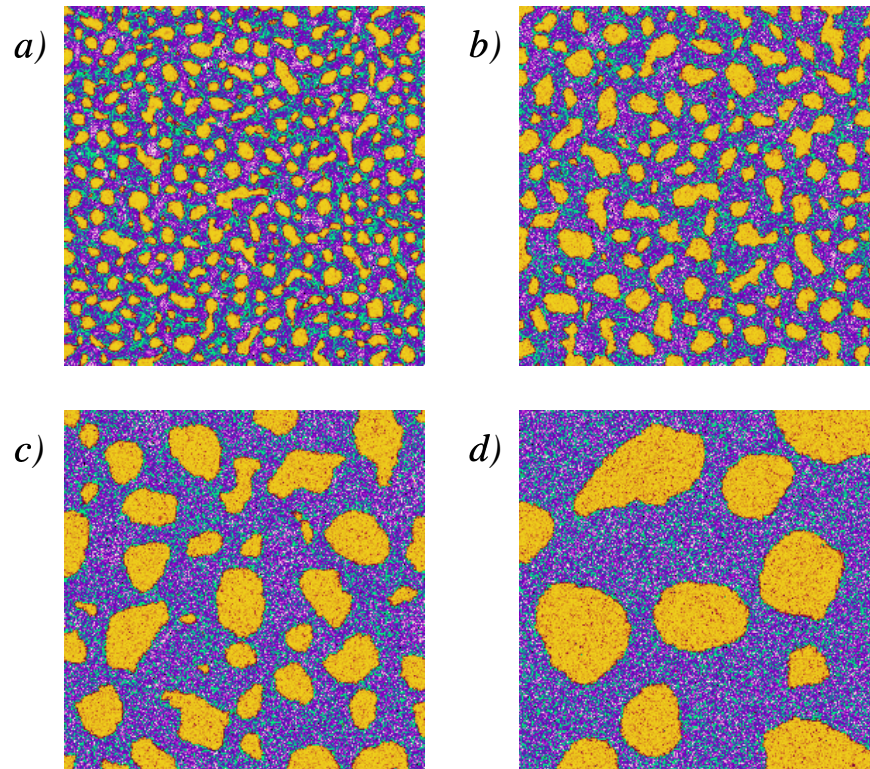


FIG. 0.5 – Séquence d'évolution de SNLS, dans un système (256×256) , avec $dx = 1.$, $\rho_c = 1.1$, $\rho_0 = 1.$. Les couleurs claires représentent les basses densités ($\rho = 0$ pour le blanc), tandis que les couleurs foncées sont pour les plus hautes densités ($\sim \frac{3}{2}\rho_c$). Les différentes images correspondent aux temps a) $t = 36.2$, b) $t = 61.1$, c) $t = 203.35$ et d) $t = 634.7$ unité de temps. Les conditions aux bords sont libres (conditions de Neuman).

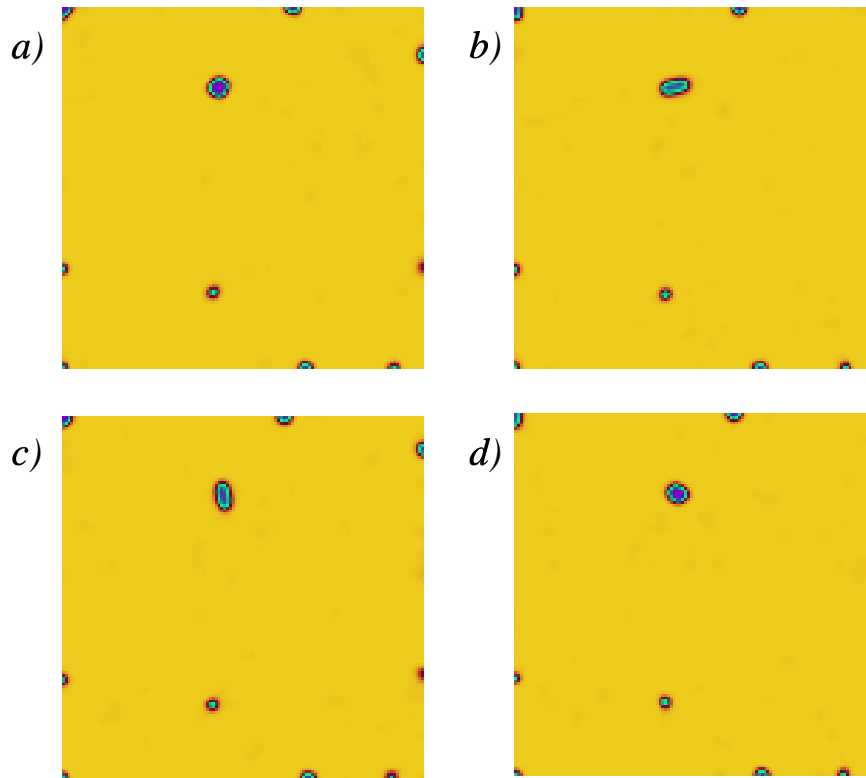


FIG. 0.6 – Séquence temporelle à très faible densité moyenne: les gouttes de liquide formée sont éloignées les une des autres au point que leur dynamique relative, aux échelles de temps numérique semble bloquée. Par contre ces différentes gouttes peuvent être dans un état excité ou oscillant, comme par exemple la goutte située proche du centre. On remarque de plus que les conditions aux bords étant libres, un nombre important de bulle se situe le long des bords, ce qui minimise alors à nombre de particules fixé l'énergie de surface.

l'unification de deux bulles de tailles voisines ne dépend que via des exposants particuliers de la taille caractéristique des domaines. A deux dimensions, on observe notamment que le nombre de bulles, pour une densité moyenne légèrement inférieure à ρ_c évolue comme l'inverse du temps (il faut bien noter que c'est alors les bulles qui coalescent entre elles, tandis que la phase liquide forme un domaine connexe). Les échelles mises en jeu, ainsi que l'autosimilarité de la dynamique seront étudiées en détail plus loin.

Pour une faible densité initiale ($\sim \rho_c/10$) on observe quelques changements qualitatifs: d'une part, étant donnée la faible densité moyenne, ce sont les bulles qui coalescent entre elle, tandis que c'est le gaz qui forme un domaine connexe. On note alors que le processus sature rapidement, formant des gouttes éloignées les unes des autres au point qu'elles ne se "voient" plus et qu'elles adoptent alors un comportement libre, indépendamment les unes des autres. Notamment on peut observer alors des effets oscillatoires dus à la présence d'un bruit important excitant ainsi les modes propres de la bulle (voir figure 0.6)

Toute cette dynamique est observable de même à une, deux et trois dimensions d'espace, la dynamique ne dépendant pas de la dimension de l'espace; par contre les exposants mis en jeu dans l'auto-similarité du phénomènes dépendent entre autres de la dimension d'espace, et comme nous verrons plus tard de la densité initiale.(voir figure 0.7)



FIG. 0.7 – Coalescence à une dimension d'espace dans une dynamique de SNLS. Il s'agit d'un diagramme "x-t" où la direction horizontale représente l'axe des x , tandis que le temps s'écoule verticalement vers le bas. Le long de chaque ligne horizontale, on a, à un temps t fixe, le profil de densité de SNLS. Pour cette image seulement, les couleurs sont inversées et le noir représente la phase gazeuse tandis que le gris représente le liquide.

Pour un système de taille fini, la dynamique atteint un état asymptotique où l'espace étudié est partagé en deux domaines distincts connexes, l'un gazeux, l'autre liquide. Pour de faibles densités moyennes, il semble pourtant difficile d'observer cette limite et nous n'avons numériquement noté que le système était composé pour les très grands temps de quelques gouttes isolées. Cependant, il faut bien noter que cet état, que l'on peut considérer stationnaire est très bruité; en effet, d'une part le bruit mis initialement afin d'observer l'instabilité a été amplifié; d'autre part, il faut tenir compte du caractère hamiltonien de la dynamique: l'énergie que compterait deux domaines distincts de densité $\frac{3}{2}\rho_c$ pour la phase liquide, nulle pour la phase gazeuse est inférieure si ces domaines sont homogènes du point de vue de la phase de ψ à l'énergie initialement présente dans le système. Ce surplus d'énergie se trouve alors nécessairement d'une part dans l'interface liquide-vapeur, et d'autre part dans le bruit qui se manifeste essentiellement dans la partie gazeuse du système. (voir figure coupe) En effet, pour les grands temps, la matière est dispersée dans quelques gouttes de densité quasiment constante. La phase de la fonction d'onde est alors constante dans chaque goutte de ces états asymptotiques, ce que l'on peut simplement comprendre à partir de l'équation de continuité. Pour une goutte, on peut supposer les fluctuations de densité autour de $\frac{3}{2}\rho_c$ négligeables devant les fluctuations de phases; l'équation de continuité s'écrit alors de manière approchée:

$$\frac{3}{2}\rho_c\Delta\phi = 0$$

Ceci donne d'une part des gouttes se déplaçant à vitesse constante ($\vec{\nabla}\phi$ ce qui peut être considéré comme un comportement homogène au sens de non-désordonné), d'autre part des gouttes immobiles. La phase des gouttes pour les grands temps est donc homogène dans chaque goutte (on voit en fait que la phase tend vers un comportement homogène dans tout domaine connexe de densité non-nulle), alors que l'argument n'est plus valide pour les bulles de phase gazeuse (le terme $\rho\Delta\phi$ n'est pas alors prépondérant).

Ces dernières remarques permettent de comprendre pourquoi, partant d'une dynamique hamiltonienne, donc réversible, on semble en fait observer de fait un processus irréversible. Numériquement, nous avons vérifié le caractère hamiltonien des simulations: après avoir laissé le système évoluer, nous avons continué le calcul en remplaçant l'incrément temporel dt par $-dt$; les grands domaines présents se "morcellent" en plus petites structures, on observe donc une coalescence à l'envers et la dynamique repasse par un état où la densité est homogène ($= \rho_0$), plus un bruit blanc, cet état conduisant pour les temps négatifs au même type de comportement que pour l'évolution normale. On se rend compte dès lors des raisons de l'apparente irréversibilité du processus observé: l'état initial du système occupe un volume infinitésimal dans l'espace des phases du système (son volume est proportionnel à l'intensité du bruit ajouté à la condition homogène), par rapport à celui des états asymptotiques, de part la diversité de la phase de la fonction d'onde en chaque point de la phase gazeuse.

Ainsi l'irréversibilité observée du processus de coalescence serait liée à la mesure quasi-nulle des états initiaux devant celle des états asymptotiques; cette explication est phénoménologiquement la même que celle avancée en théorie de gaz sur réseau pour expliquer les processus irréversibles observés à partir de lois réversibles.

Avant de nous intéresser aux conséquences de ces propriétés sur les exposants décrivant la dynamique du système, nous allons nous intéresser aux solutions solitaires numériquement stables que nous avons observé dans SNLS.

3 Solutions solitaires de SNLS.

L'existence de solution de ce type dans l'équation de SNLS peut paraître surprenante dans la mesure où il semblait nécessaire pour avoir de telles pulses stables que la dynamique ne soit ni hamiltonienne, ni dissipative. De plus, le caractère focalisant des basses densités donnait l'impression que de telles solutions seraient alors instables.

Afin de comprendre l'existence et la stabilité de tels pulses, nous allons tout d'abord nous intéresser au cas unidimensionnel. Nous cherchons une solution sous la forme $R(x)e^{i\mu t}$ vérifiant $R(\pm x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Elle doit alors satisfaire:

$$-\frac{1}{2}R_{xx} - 2\rho_c R^3 + R^5 + \mu R = 0 \quad (0.3)$$

On obtient alors la solution décrite par (citer kov):

$$R^2(x) = \frac{3\rho_c}{2} \cdot \frac{1 - a^2}{2a \cosh^2(\sqrt{2\mu}x) + 1 - a}$$

avec: $a = \sqrt{1 - 4\mu/(3\rho_c^2)}$.

La connaissance du paramètre a où de même de μ caractérise complètement la solution. Pour cela, il suffit de les relier au nombre de total de particules:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} R^2(x) dx$$

On obtient alors:

$$\mu = \frac{3\rho_c^2}{4} \tanh^2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}N\right) \quad a = \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{2}{3}}N\right)}$$

Et on peut écrire la solution sous la forme:

$$R^2(x) = \frac{3\rho_c}{2} \cdot \frac{\tanh^2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}N\right)}{1 + \frac{\cosh(2\sqrt{2\mu}x)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{2}{3}}N\right)}}$$

On remarque alors que pour $N \gg 1$, la solution consiste en une région de longueur $l \sim N/(3\rho_c/2)$ de densité $\rho = \rho_c$ (voir figure 0.8). On retrouve ainsi naturellement la densité de la phase liquide apparaissant lors de la coalescence. On peut de plus généraliser la notion d'enthalpie et par la même de pression pour l'équation de SNLS: jusqu'à présent, le terme de pression quantique avait été négligé dans la pression, c'est à dire que l'on considérait l'enthalpie:

$$h = \rho^2 - 2\rho_c\rho$$

Cette enthalpie valait bien sûr dans les cas où la densité était homogène ou pour le moins était lentement variable des variables d'espace. On peut donc, tenant compte du terme $-\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}}$ définir une enthalpie plus générale:

$$h = \rho^2 - 2\rho_c\rho - \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}}$$

Cette enthalpie dépend notamment de la coordonnées d'espace. La relation:

$$\delta h = \frac{1}{\rho} \delta P$$

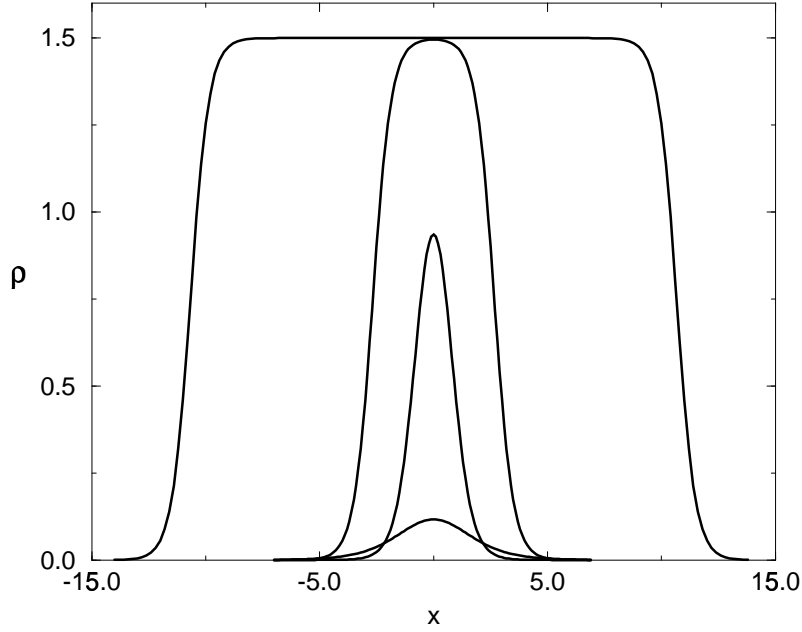


FIG. 0.8 – Différents profils de densité pour les solutions solitaires de SNLS, respectivement pour $N = 0.5$, $N = 2$, $N = 8$ et $N = 32$. Nous avons pris $\rho_c = 1$.

permet alors de définir plus généralement la pression dans SNLS. On peut alors remarquer que la pression $P(x)$ associée à toute solution stationnaire à une dimensionles $R(x)$ décrite plus haut est nulle en tout point de la solution. On voit ainsi que l'équilibre de pression est bien en fait le critère déterminant entrant en jeu dans le processus de coalescence.

Il est à noter de plus que de telles solutions ne sont en aucun cas des solitons (citer?). La figure 0.8 montre ces solutions pour différents nombres de particules.

La solution $R(x)$ permet de plus de calculer la tension de surface associée α à l'interface liquide-vapeur. Il s'agit de calculer l'énergie libre contenue dans cette interface où la densité passe de $\rho = 0$ à $\rho = \frac{3}{2}\rho_c$. Soit, en utilisant 0.3:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 (H + \mu\rho) dx \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{2}R_x^2 - \rho_c R^4 + \frac{1}{3}R^6 + \mu R^2 \right) dx \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 dx R_x^2 = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{3\rho_c/2}} R_x dR \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^{\sqrt{3\rho_c/2}} R \left(\frac{3}{2}\rho_c - R^2 \right) dR = \frac{9\rho_c^2}{8\sqrt{6}}
 \end{aligned} \tag{0.4}$$

Ainsi, nous venons d'extraire analytiquement des solutions exactes de SNLS à une dimension, solutions sous forme de pulses, comme les solutions mises en avant par Thual et Fauve dans

le cadre de l'équation de Ginzburg-Landau. Nous n'avons pu extraire des solutions exactes en dimensions supérieures, alors que l'étude numérique de SNLS, via la coalescence par exemple, montre que de telles solutions existent. De plus, numériquement, ces solutions sont stables en toutes dimension. Dans le cas des pulses étudiés par Thual et Fauve, il a été montré que cette stabilité était due à la coexistence et à la compétition de termes conservatifs et de termes dissipatifs dans la dynamique. Pour SNLS, la dynamique est exclusivement hamiltonienne et les arguments précédents ne sont donc plus valides. Par contre, il nous est cependant possible d'étudier plus en détail la stabilité de ces solutions à une seule dimension d'espace. (nous ne nous intéressons donc aux perturbations longitudinales de telles solutions).

4 Stabilité des solutions solitaires

Afin d'étudier, à une dimension, la stabilité des solution $\psi_0(x, t) = R(x)e^{i\mu t}$, nous allons écrire la solution perturbée sous la forme:

$$\psi(x, t) = [R(x) + \delta\psi(x)e^{\sigma t}]e^{i\mu t}$$

Alors l'analyse de stabilité linéaire donne le problème aux valeurs propres, si on écrit $\delta\psi = \delta\psi_1 + i\delta\psi_2$, $\delta\psi_{1,2}$ fonctions réelles:

$$\sigma \begin{pmatrix} \delta\psi_1 \\ \delta\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L}_1 \\ -\mathcal{L}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\psi_1 \\ \delta\psi_2 \end{pmatrix} \quad (0.5)$$

avec:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}\partial_{xx} - 2\rho_c R^2(x) + R^4(x) + \mu$$

et:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}\partial_{xx} - 6\rho_c R^2(x) + 5R^4(x) + \mu$$

De par les symétries de SNLS et étant donné la forme de la solution $R(x)$, le noyau de l'opérateur contient quatre termes: l'un du à l'invariance par translation de SNLS, un autre du fait de l'invariance galiléenne, l'invariance de phase donnant le troisième mode de Goldstone venant des symétries de SNLS; un quatrième mode provient du choix arbitraire du nombre de particules contenues dans la solution $R(x)$.

Les valeurs propres de l'opérateur déterminé par \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 coïncident avec le spectre de l'opérateur $i\sqrt{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}$. La détermination numérique d'un tel spectre donne quatre modes neutres, comme prédit, ainsi que deux branches imaginaires symétriques par rapport à l'origine, possédant de plus un gap en fréquence de valeur μ . Ainsi, on remarque qu'aucune valeur propre ne possède de partie réelle et donc que les solutions $R(x)$ sont linéairement stables.

Ces solutions $R(x)$ peuvent en outre être considérée en dimension supérieure, *i.e.* que l'on étudie alors des solutions invariantes par translation suivant y (à deux dimensions) ou suivant y et z (à trois dimensions). La stabilité de ces quasi-solitons de longueurs infinies par rapport à des perturbations transverses (dépendant de y par exemple) consiste à considérer les perturbations sous la forme: $\delta\psi(x)e^{iqy}$. On peut immédiatement noter que cela ne fait que rajouter à chaque opérateur $\mathcal{L}_{1,2}$ une constante positive $q^2/2$. Ainsi le problème se ramène à l'étude de la stabilité unidimensionnelle en prenant $\mu + q^2/2$ au lieu de μ . On voit alors que les branches continues du spectre de l'opérateur $i\sqrt{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}$ sont simplement décalées le long de l'axe imaginaire. Par contre, des quatre modes neutres issus des symétries du problème, on remarque numériquement que deux d'entre eux développent une instabilité pour les faibles nombres d'onde q . Les solutions se

déstabilisent alors transversalement suivant une longueur d'onde déterminée par le mode le plus instable et forment ainsi des gouttes de taille moyenne déterminée.

Bien sur, dans la mesure où on ne connaît pas de solution analytique de gouttes en dimension supérieure à un, il est difficile de pouvoir étudier leur stabilité. Cependant, durant nos simulations numériques, les gouttes formées par le processus de coalescence à deux dimensions sont stables aussi longtemps que nos simulations nous ont permis de l'observer (quelques milliers d'unité de temps).

Les gouttes bidimensionnelles peuvent être, de même que les solutions $R(x)$ plus haut, considérées en géométrie tridimensionnelle par translation suivant la direction z . Par analogie au problème unidimensionnel que l'on vient de traiter, on peut prédire qu'une telle "colonne" de liquide est instable, de même qu'en dynamique classique par l'instabilité de Rayleigh.

Pour conclure ce chapitre, on peut s'interroger phénoménologiquement sur la stabilité de ces solutions; en effet, une perturbation loin du pulse devrait être instable du fait du caractère focalisant de SNLS pour les faibles densités. On peut imaginer alors que l'état le plus stable consisterait en un ensemble de gouttes voire un réseau périodique de gouttes. Cependant, ces solutions ne sont pas stables du fait du processus de coalescence qui amènera ces gouttes à se regrouper, et plus simplement, dans le cadre de perturbations loin de la goutte, ce processus s'apparente à une sorte d'évaporation.

5 Auto-similarité et exposants d'échelle

Le phénomène de coalescence observé dans la dynamique de SNLS, lorsque le système est placé initialement dans un état linéairement instable est, en un sens gouverné par des lois auto-similaires: on peut par exemple remarquer que, pour un bruit initial très faible, l'état observé dans une boîte bidimensionnelle de longueur 64×64 au bout d'un temps t_1 est comparable à celui observé pour une boîte 512×512 pour un temps $t_2 = 8 \times t_1$.

Ceci se traduit aussi par le fait que le nombre de bulle de gaz décroît, pour une densité initiale proche de ρ_c , de manière inversement proportionnelle au temps.

Plus formellement, on peut considérer la fonction de corrélation à deux points:

$$C(\vec{r}, t) \equiv \langle \psi(\vec{r}, t) \cdot \psi^*(\vec{0}, t) \rangle$$

où $\langle .. \rangle$ signifie la moyenne statistique sur un ensemble de configuration, qui peut, étant donné l'invariance par translation de SNLS se remplacer par une moyenne sur l'espace V du système:

$$C(\vec{r}, t) \equiv \frac{1}{V} \int d\vec{s} \psi(\vec{r} + \vec{s}) \cdot \psi^*(\vec{s}, t)$$

On peut donc considérer que cette fonction de corrélation se met, dans le régime de coalescence, sous la forme simple:

$$C(\vec{r}, t) = f(r/l(t))$$

ne dépendant donc que du rapport entre la norme de \vec{r} et $l(t)$, définie comme étant la longueur caractéristique des domaines. Dans le cadre de dynamique auto-similaire, $l(t)$ évolue comme une puissance du temps:

$$l(t) \sim t^\nu$$

Finalement, la fonction que nous allons considérer afin d'étudier les valeurs que peut prendre cet exposant ν , utilisant la transformée de Fourier $\psi_{\vec{k}}$, vaut:

$$\begin{aligned} S(k, t) &\equiv \int d\vec{k}' \delta(\vec{k} - \vec{k}') \psi_{\vec{k}'}(t) \psi_{\vec{k}'}^*(t) \\ &= l(t)^d g(kl(t)) \end{aligned}$$

d étant la dimension d'espace et $\mathcal{S}(u)$ est proportionnel à la transformée de Fourier de $f(\cdot)$ et est une fonction universelle au sens qu'elle ne dépend pas du temps dans le régime auto-similaire. La fonction S est appelée facteur de structure. Il faut en fait noter que cette fonction $\mathcal{S}(u)$ est indépendante du temps seulement dans le régime auto-similaire, ce qui dans nos expériences signifie que la fonction:

$$g'(kl(t), t) = \frac{S(k, t)}{l(t)^2}$$

tend vers $\mathcal{S}(u)$ pour les temps grands.

Il est à noter que notre dynamique dépend d'un autre paramètre, de façon non triviale quoique simple à expliciter. En effet, suivant la valeur du paramètre ρ_0/ρ_c la coalescence étudiée correspondra à une coalescence de bulle dans un liquide ou de goutte dans un gaz. Le liquide et le gaz ne jouant nullement un rôle symétrique dans la dynamique (par la dynamique de phase par exemple), il apparaît clairement que les exposants mis en jeu doivent différer entre ces deux types de processus. La transition entre ces deux types de dynamique correspond à ce que l'état asymptotique soit également rempli par la phase gazeuse et la phase liquide. Si le volume du système est V , partant d'une densité initiale ρ_0 , asymptotiquement, un volume $V/2$ sera occupé par du liquide (de densité $\sim 3\rho_c/2$) l'autre partie étant occupée par le gaz (~ 0). Ce point de transition correspond donc à la relation:

$$V \times \rho_0 = \frac{V}{2} \times \frac{3}{2}\rho_c$$

soit pour la valeur du paramètre:

$$\rho_0/\rho_c = \frac{3}{4}$$

Pour une valeur moyenne de particule supérieure à $3\rho_c/4$, on nuclée des bulles dans le liquide, tandis que pour une densité initiale inférieure, on obtient des gouttes dans du gaz.

5.1 Facteur de structure en dimension deux ($\rho_0 \simeq \rho_c$)

Nous allons tout d'abord nous intéresser au facteur de structure en dimension deux, pour une densité moyenne légèrement inférieure à la densité critique ($\rho_0/\rho_c = 0.9$).

La figure 0.9 montre alors la fonction $S(k, t)$ pour différents temps, séparés de $\Delta t = 10$ unité de temps de SNLS.

On remarque la croissance exponentielle pour les nombres d'ondes proche de k_0 pour les premiers intervalles de temps. Puis on note que $S(k, t)$ adopte un comportement que nous interprétons comme étant la signature de la dynamique auto-similaire. A deux dimensions, nous avons remarqué que le nombre de bulle évoluait comme l'inverse du temps. Ceci donne une loi pour $l(t)$, dans la mesure où le nombre de particules est conservé (alors $N_{bulle} \times l(t)^2 = \text{constante}$):

$$l(t) \sim \sqrt{t}$$

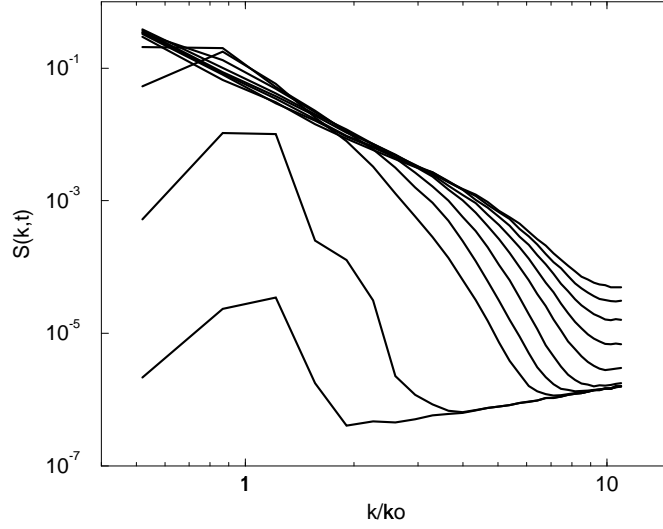


FIG. 0.9 – Facteur de structure $S(k, t)$ pour $t = 10$ (première courbe en bas), $t = 20, 30 \dots 100$ unités de temps de SNLS, en fonction du rapport entre le nombre d'onde et le nombre d'onde le plus instable k_0 . On remarque pour les trois premières courbes une croissance quasiment exponentielle autour de $k = k_0$ puis $S(k, t)$ admet semble tendre vers une allure typique.

dans le régime auto-similaire, soit tant que les effets dus à la taille finie du système que nous étudions peuvent être négligés. Cet exposant peut être en fait déterminé numériquement de manière systématique en étudiant en fonction du temps, le nombre d'onde caractéristique du système:

$$\langle k \rangle (t) = \frac{\int S(k, t) k dk}{\int S(k, t) dk}$$

D'après les hypothèses faites sur la fonction $S(k, t)$, on obtient alors dans la limite auto-similaire, en fonction de la fonction $\mathcal{S}(u)$, indépendante du temps:

$$\langle k \rangle (t) = l(t)^{-1} \frac{\int u \mathcal{S}(u) du}{\int \mathcal{S}(u) du} \propto t^{-\nu}$$

Pour une densité initiale proche de ρ_c , la figure 0.10 montre $\langle k \rangle (t)$. On remarque alors que cette fonction adopte lorsque $t \rightarrow +\infty$ un comportement d'échelle en $t^{-1/2}$.

Ceci se voit ainsi en traçant $S(k, t)/t$ en fonction de $t^{1/2}k$, voir figure 0.11; on observe alors que les différentes courbes obtenues à différents temps se superposent pour t suffisamment grand.

On note alors que la fonction asymptotique $\mathcal{S}(u)$ satisfait, pour une fenêtre de l'argument u , la relation:

$$\mathcal{S}(u) \sim u^{-3}$$

qui correspond à la loi de Porod ($\mathcal{S}(u) \sim u^{-(d+1)}$) où d est la dimension spatiale. Cette loi s'obtient naturellement en considérant les interfaces entre les deux phases du système, étroites.

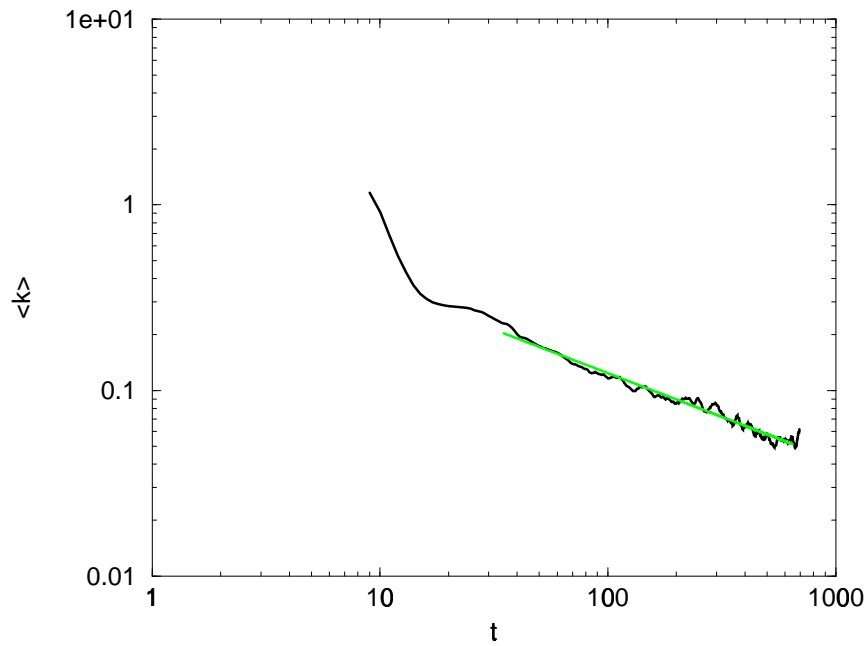


FIG. 0.10 – Nombre d'onde moyen en fonction du temps pour la valeur du paramètre $\rho_0/\rho_{0c} = 0.81$. Le fit exponentiel réalisé pour les temps compris entre 20 et 700 donne un exposant $\nu = 0.48$.

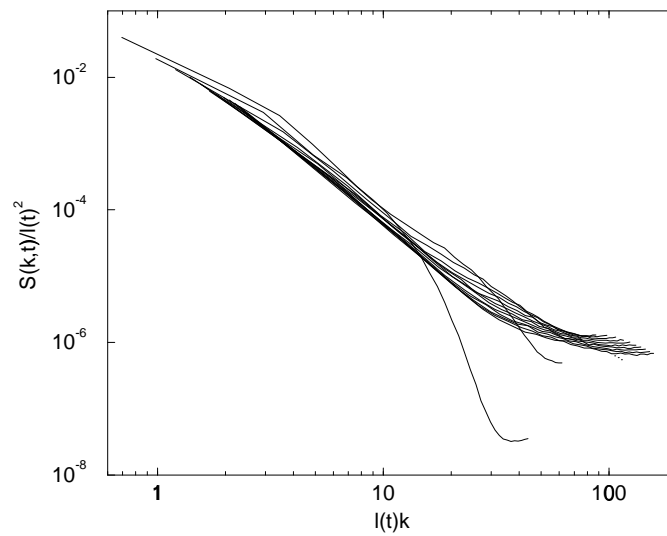


FIG. 0.11 – Tracé en coordonnées logarithmiques de $S(k,t)/l(t)^2$ en fonction de $l(t)k$, à des intervalles de temps réguliers allant de $t = 50$ à $t = 800$, on note une convergence des courbes vers la fonction $S(u)$. On remarque alors que cette fonction satisfait la loi de Porod $S(u) \sim u^{-3}$.

5.2 Résultats en une et trois dimensions spatiales

L'étude que nous avons présentée a été faite initialement et essentiellement à deux dimensions spatiales. Afin de mieux cerner les processus importants de la dynamique, il est commode de renouveler le travail en d'autres dimensions. Cependant, ces études ont alors été moins poussées: d'une part, en géométrie tridimensionnelle, les contraintes numériques ne permettent pas d'étudier des systèmes très étendus ($(128)^3$ au mieux) et même alors on atteint difficilement le régime asymptotique: on trouve cependant un exposant critique proche de $1/3$ pour un rapport $\rho_0/\rho_c = 0.9$; d'autre part, à une dimension spatiale, si cette géométrie est plus confortable d'un point de vue numérique, le problème étudié est alors fondamentalement fort différent. En effet, la notion de connexion entre une phase, donnant lieu aux configurations bulle dans le liquide ou goutte dans le gaz, n'a plus aucun sens dans ce cas (voir figure (0.7)). Notamment, il nous a été difficile d'observer un quelconque effet d'échelle: pour des systèmes très similaires, suivant la fenêtre temporelle sélectionnée, et suivant aussi l'étendue spatiale, on trouve une large gamme de valeurs pour l'exposant ν , autour de $0.15 - 0.2$. Il semble donc qu'à une dimension d'espace le système ne satisfait pas de dynamique auto-similaire (pour les systèmes faiblement étendus que nous avons pu étudier au moins: $L \leq 4096$).

5.3 Dépendance à la densité moyenne

À deux dimensions, nous avons explicitement étudié la dépendance de l'exposant ν par rapport à la densité moyenne ρ_0 . Nous avons établi que pour les densités proche de ρ_c , ν était proche de $\frac{1}{2}$. Pour de bien plus faibles densités initiales, plus basse que la densité critique séparant le comportement bulle/goutte, on note alors une valeur de ν différente, proche de $1/3$. (voir figure (0.12)).

Nous avons alors étudié la dépendance de ν en fonction de la densité moyenne pour quelques valeurs de ρ_0 : il apparaît que pour des valeurs du paramètre ρ_0/ρ_c supérieure à $1/2$ l'exposant de coalescence varie entre 0.48 et 0.55 . Malheureusement, nous n'avons pas pu explorer les différentes valeurs de ν pour les valeurs du paramètre de contrôle comprise entre 0.25 (là où ν est proche de $1/3$) et 0.5 . De fait nous n'avons aucune information sur la transition entre ces deux régimes. (voir tableau (0.13)).

5.4 Explication des lois d'échelle

On peut, en s'inspirant de la littérature traitant de la séparation de phase et du coarsening dans des systèmes d'Ising, essayer de comprendre les différents exposants que l'on observe dans la dynamique.

Cependant, à plus d'un titre la dynamique de SNLS diffère de celle du modèle d'Ising classique: la décomposition spinodale diffère par exemple de la brisure de symétrie; la dynamique du gaz n'est pas similaire à celle du liquide; le fait que le paramètre d'ordre soit scalaire ou vectoriel, conservé ou non.

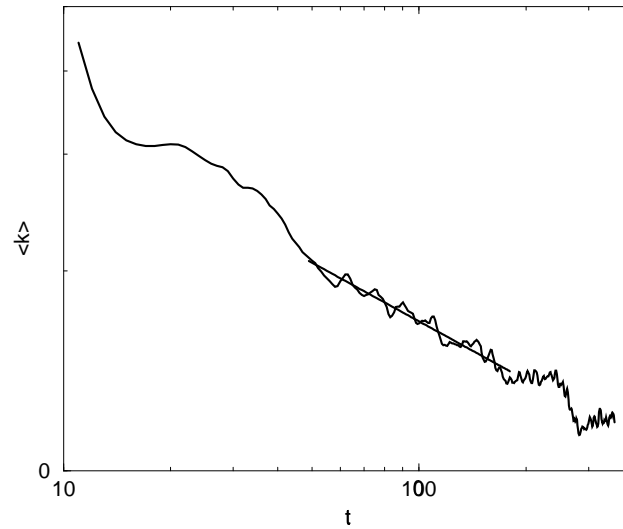


FIG. 0.12 – $\langle k \rangle$ en fonction du temps pour une valeur du paramètre de contrôle $\rho_0/\rho_c = 0.25$, à deux dimensions spatiales. La courbe est beaucoup plus bruitée que pour des densités moyennes supérieures. L'exposant ν que l'on peut définir sur une petite fenêtre temporelle (50 – 200) vaut alors $\nu = 0.293$.

ρ_0/ρ_c	ν
0.25	0.293
0.49	0.55
0.5625	0.54
0.64	0.54
0.81	0.48

FIG. 0.13 – Valeurs de l'exposant ν obtenues pour différentes valeurs du paramètre de contrôle. Les valeurs de ν ont une marge d'erreur de quelques centièmes.

6 Conclusion.

Dans cette partie, nous avons montré que SNLS présentait un modèle consistant de transition de phase dans des systèmes hamiltoniens et conservatifs. L'existence de pulses stables à toutes les dimensions et aussi longtemps que l'on a pu le tester permet d'observer de fait les dynamiques d'interface dans un tel contexte. Le problème de coalescence mis en avant permet d'étudier alors une dynamique complexe où la phase fortement bruité du paramètre d'ordre semble jouer un rôle prépondérant. Nous n'avons alors pu extraire une compréhension claire des exposant critiques de la décomposition spinodale, à partir des résultats provenant de la théorie des champs.

Conclusion

Nous avons présenté durant cette thèse, différents aspects de dynamiques superfluides et leur modélisation.

Tout d'abord, à l'aide de simulations numériques interactives il a été possible de décrire un mécanisme simple de nucléation de vorticité, via l'instabilité des solitons gris.

Puis, nous avons étudié précisement les processus mis en jeu lors de la nucléation de vortex par dépassement de la vitesse critique autour d'un obstacle; nous avons alors montré que l'hyperbolicité de l'équation de phase conduisait en fait à un système d'équations très similaire à celui décrivant la transition transonique lors de la formation d'ondes de choc.

L'équation modèle, de Schrödinger Non-Linéaire a pu être modifi e afin de prendre en compte une transition de phase liquide-gaz  tudi e dernièrement pour l'Hélium superfluide. Très simplement, le développement de notre modèle à l'ordre supérieur permet d'introduire un tel comportement. Nous avons alors observé comment la nucléation de vortex et la cavitation interagissaient pour une expérience numérique type d'écoulement autour d'un obstacle; notamment nous avons montré que dans ces conditions, la vitesse critique de Landau était fortement abaiss e (comme observé en laboratoire) par l'entremise de la formation d'une interface liquide-gaz au bord du disque.

Ce modèle a permis de donner une explication possible à la présence de bulle rebond lors d'expériences de cavitation effectu e en laboratoire. En effet, une explosion puissante, donne naissance, dans notre modèle, à l'arrière de l'onde de choc à une bulle de gaz.

Finalement, ce modèle conservatif et hamiltonien d'un système liquide-gaz a permis d'observer la décomposition spinodale suivie par une dynamique lente de coalescence dans un fluide linéairement instable. Notamment, les exposants self-similaires obtenus semblent attester de processus complexes mettant en jeu, suivant les valeurs du paramètre de contrôle, la densité superfluide seulement, ou la dynamique de la phase et la densité du superfluide.

Annexe A

Calcul

1 Calcul des conditions de solvabilités

L'équation satisfaite par l'amplitude stationnaire, lentement variable en x , $A(x)$, est fonction de l'opérateur agissant sur l'espace des fonctions d'une variable (symbolisé par y) \mathcal{L}_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(A(x)\xi(y)e^{i\nu_c x}) &= [\nu_c^2(-(\epsilon - \epsilon_c) + 3M\frac{yx^2}{R^3})A(x) \\ &+ 2i\nu_c(\frac{\epsilon_c}{2} - M\frac{y}{R})A'(x) - (\frac{\epsilon_c}{2} + m\frac{y}{R})A''(x)]\xi(y) \end{aligned}$$

Pour que cette équation admette une solution non nulle, il faut que le terme de droite n'appartienne pas au noyau de l'opérateur adjoint \mathcal{L}_0^+ . Ayant défini un produit scalaire sur cet espace de fonction, il suffit donc que le membre de droite de l'équation soit orthogonale au noyau de \mathcal{L}_0^+ , donc étant donné que \mathcal{L}_0 est un opérateur symétrique, il est nécessaire qu'il soit orthogonal au noyau de \mathcal{L}_0 , soit notamment à $\xi(y)$. La condition de solvabilité s'écrit finalement:

$$\begin{aligned} < \xi, [\nu_c^2(-(\epsilon - \epsilon_c) + 3M\frac{yx^2}{R^3})A(x) \\ + 2i\nu_c(\frac{\epsilon_c}{2} - M\frac{y}{R})A'(x) - (\frac{\epsilon_c}{2} + m\frac{y}{R})A''(x)]\xi > = 0 \end{aligned}$$

Génériquement le coefficient devant le terme $A(x)'$ s'annule, $A = cte$ étant solution du problème pour $\epsilon = \epsilon_c$. Ceci se retrouve cependant à partir des propriétés de ξ où plus généralement des solutions de l'équation d'Euler-Tricomi.

Considérons en effet la solution de l'équation différentielle:

$$\Phi(y)'' - y\Phi(y) = 0 \tag{A.1}$$

dont on connaît les racines s_n négatives de $\Phi(y)' = 0$. L'idée est de relier:

$$\int_{s_n}^{\infty} \Phi(y)^2 dy \quad \text{avec} \quad \int_{s_n}^{\infty} y\Phi(y)^2 dy$$

Pour cela, multiplions A.1 par Φ' et intégrons entre s_n et u :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Phi(u)'^2 &= \int_{s_n}^u y\Phi(y)\Phi(y)' dy \\ &= u\Phi(u)^2 - s_n\Phi(s_n)^2 - \int_{s_n}^u y\Phi(y)\Phi(y)' dy - \int_{s_n}^u \Phi(y)^2 dy \end{aligned}$$

Soit:

$$\Phi'(u)^2 = u\Phi(u)^2 - s_n\Phi(s_n)^2 - \int_{s_n}^u \Phi(y)^2 dy$$

et notamment étant donné que Φ tend vers 0 exponentiellement lorsque y tend vers l'infini on trouve notamment:

$$\begin{aligned} \int_{s_n}^{\infty} \Phi(y)^2 dy &= -s_n\Phi(s_n)^2 \quad \text{et} \\ \Phi'(u)^2 &= u\Phi(u)^2 + \int_u^{\infty} \Phi(y)^2 dy \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Pour finir, on réitère la même opération en multipliant A.1 par $\Phi(y)$ puis en intégrant aussi entre s_n et $+\infty$:

$$\begin{aligned} \int_{s_n}^{\infty} \Phi(y)\Phi''(y) dy &= [\Phi'(y)\Phi(y)]_{s_n}^{\infty} - \int_{s_n}^{\infty} \Phi'(y)^2 dy \\ &= - \int_{s_n}^{\infty} \Phi'(y)^2 dy \\ &= \int_{s_n}^{\infty} y\Phi^2(y) dy \end{aligned}$$

enfin, utilisant la relation A.2:

$$\begin{aligned} \int_{s_n}^{\infty} y\Phi^2(y) dy &= - \int_{s_n}^{\infty} dy(y\Phi^2(y) + \int_y^{\infty} \Phi(u)^2 du) \\ &= - \int_{s_n}^{\infty} y\Phi^2(y) dy - \int_{s_n}^{\infty} du\Phi^2(u) \left(\int_{s_n}^u dy \right) \\ &= -2 \int_{s_n}^{\infty} y\Phi^2(y) dy + s_n \int_{s_n}^{\infty} dy\Phi^2(y) \end{aligned}$$

Donc finalement on obtient la relation:

$$\int_{s_n}^{\infty} y\Phi^2(y) dy = \frac{s_n}{3} \int_{s_n}^{\infty} \Phi^2(y) dy \quad (\text{A.3})$$

Cette relation, appliquée à la fonction ξ solution de notre problème donne:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} M \frac{y}{R} \xi^2(y) dy &= \frac{M}{R} \left(\frac{R}{\nu_c^2 M} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{s_1}^{\infty} u\Phi^2(u) du - s_1 \int_{s_1}^{\infty} \Phi^2(u) du \right) \\ &= -\frac{2}{3} s_1 \left(\frac{M}{\nu_c^4 R} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{s_1}^{\infty} \Phi^2(u) du \\ &= -\frac{2}{3} s_1 \left(\frac{M}{\nu_c R} \right)^{\frac{2}{3}} \int_0^{\infty} \xi^2(y) dy \end{aligned}$$

et sachant $-s_1 = 3 \left(\frac{R\xi_0^3 \nu_c^4}{M} \right)^{\frac{4}{3}}$ on trouve finalement la relation:

$$\int_0^{\infty} M \frac{y}{R} \xi^2(y) dy = 2\nu_c^2 \xi_0^2 \int_0^{\infty} \xi^2(y) dy = \frac{\epsilon_c}{2} \int_0^{\infty} \xi^2(y) dy \quad (\text{A.4})$$

Cette relation aurait pu être déduite de la condition de solvabilité, sachant que le coefficient devant $A'(x)$ doit nécessairement s'annuler. Grâce à cette relation on obtient la condition de solvabilité (comme $\int \xi^2(y)dy$ se trouve en facteur de chaque terme et est non nul, on peut simplifier):

$$\nu_c^2 ((\epsilon - \epsilon_c) - \frac{3M\epsilon_c x^2}{2R^2})A(x) + \epsilon_c A''(x) \quad (\text{A.5})$$

Pour obtenir, les équations d'amplitudes temporelles, il faut d'abord établir la condition de solvabilité suivant y : cette fois-ci du fait des termes non-linéaires, la condition ne pourra se mettre comme un produit entre une relation suivant x et $\int \xi^2(y)dy$, le résultat s'exprimera en fonction de nombre adimensionné rapport entre différents moments de la fonction Φ et $\int \xi^2(y)dy$. En effet, la condition de solvabilité pour l'équation complète donne:

$$\begin{aligned} & \langle \xi, \frac{1}{v_c^2} (A''(t) \sin(\nu_c x) + B''(t) \cos(\nu_c x)) f(x) \xi \rangle + \\ & \langle \xi, \frac{M\nu_c}{v_c} (A'(t) \cos(\nu_c x) - B'(t) \sin(\nu_c x)) f(x) \xi \rangle = \\ & (A(t) \sin(\nu_c x) + B(t) \cos(\nu_c x)) [\langle \xi, f(x) \mathcal{L}_0 \xi \rangle + \\ & \langle \xi, (\nu_c^2 (\epsilon - \epsilon_c) f(x) + (\frac{\epsilon_c}{2} + M \frac{y}{R}) f''(x)) \xi \rangle] + \\ & \langle \xi, 2\nu_c (A(t) \cos(\nu_c x) - B(t) \sin(\nu_c x)) (\frac{\epsilon_c}{2} - M \frac{y}{R}) f'(x) \xi \rangle - \\ & \langle \xi, \partial_x \Phi_0 \partial_{xx} \Phi_0 + \partial_x \varphi \partial_{xx} \varphi \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$f(x)$ étant la fonction d'onde du niveau fondamental de l'oscillateur harmonique $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$ défini au chapitre. Seuls les termes $\langle \xi, \partial_x \Phi_0 \partial_{xx} \Phi_0 \rangle$ et $\langle \xi, \partial_x \varphi \partial_{xx} \varphi \rangle$ font appel à de nouvelles intégrales.

En effet on a, d'une part:

$$\partial_x \Phi_0 \partial_{xx} \Phi_0 = \frac{6M^2 x y^2}{R^6} (3x^2 + \epsilon y^2 - \frac{M y^3}{2R})$$

qui fera intervenir les nombres α_n , rapport entres deux intégrales:

$$\alpha_n = \left(\int_{s_1}^{\infty} (y - s_1)^n \Phi(y) dy \right) / \left(\int_{s_1}^{\infty} \Phi^2(y) dy \right)$$

pour $n = 2, 4$ et 5 ; d'autre part, le terme $\langle \xi, \partial_x \varphi \partial_{xx} \varphi \rangle$ met en jeu le nombre β :

$$\beta = \left(\int_{s_1}^{\infty} \Phi^3(y) dy \right) / \left(\int_{s_1}^{\infty} \Phi^2(y) dy \right)$$

On prendra d'ailleurs, pour se limiter aux termes dominants : $-\partial_x \varphi \partial_{xx} \varphi = \nu_c^3 f^2(x) \xi^2(y) [A(t)B(t) (\cos^2(\nu_c x) - \sin^2(\nu_c x)) + (A^2(t) - B^2(t)) \sin(\nu_c x) \cos(\nu_c x)]$.

Divisant le produit scalaire A.6 par $(\frac{R}{\nu_c^2 M})^{\frac{1}{3}} \int \Phi^2(y) dy$ de part et d'autre on obtient la relation:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_c^2} (A''(t) \sin(\nu_c x) + B''(t) \cos(\nu_c x)) f(x) + \\ & \frac{M\nu_c}{v_c} (A'(t) \cos(\nu_c x) - B'(t) \sin(\nu_c x)) f(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A(t)\sin(\nu_c x) + B(t)\cos(\nu_c x))(\nu_c^2(\epsilon - \epsilon_c - \frac{3M\epsilon_c x^2}{2R^2})f(x) + \epsilon_c f''(x)) - \\
& \frac{6M\xi_0 x}{R^5} (3\sqrt{\frac{3}{-s_1}} x^2 \alpha_2 + (\frac{-s_1}{3})^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{R\xi_0^3}{M}} (4\alpha_4 - \frac{3\alpha_5}{-2s_1})) + \\
& \nu_c^3 f^2(x) \beta [A(t)B(t)(\cos^2(\nu_c x) - \sin^2(\nu_c x)) + \\
& (A^2(t) - B^2(t))\sin(\nu_c x)\cos(\nu_c x)] \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Avec $\alpha_2 = 4.7054$, $\alpha_4 = 27.44$, $\alpha_5 = 84.42$ et $\beta = 0.427$ nombres adimensionnés.

Si on appelle \mathcal{L}_1 l'opérateur linéaire décrivant la dynamique quantique d'un oscillateur harmonique, cette équation peut se présenter à nouveau sous la forme:

$$(A(t)\sin(\nu_c x) + B(t)\cos(\nu_c x))\mathcal{L}_1 f(x) = \text{termes des source}$$

avec:

$$\mathcal{L}_1 = \nu_c^2(\epsilon - \epsilon_c - \frac{3M\epsilon_c x^2}{2R^2}) + \epsilon_c \partial_{xx}$$

Cette opérateur est établi pour les fonctions lentement variables en x et son noyau contient alors deux fonctions, l'une paire: $f(x)\cos(\nu_c x)$, l'autre impaire: $f(x)\sin(\nu_c x)$. D'où deux conditions de solvabilité, obtenue par produit scalaire entre ces deux modes de Goldstone de \mathcal{L}_1 et A.7 (et en considérant dès que possible $\nu_c l \gg 1$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_c^2} A''(t) - \frac{M\nu_c}{v_c} B'(t) &= \nu_c^2(\epsilon - \epsilon'_c)A(t) + \frac{\beta\nu_c^3}{4\sqrt{3}} e^{-\frac{\nu_c^2 t^2}{6}} (A^2(t) - B^2(t)) + \frac{\sqrt{3}M\xi_0}{8\sqrt{2}R^2} e^{-\frac{\nu_c^2 t^2}{2}} \\
\frac{1}{v_c^2} B''(t) + \frac{M\nu_c}{v_c} A'(t) &= \nu_c^2(\epsilon - \epsilon'_c)B(t) + \frac{\beta\nu_c^3}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\nu_c^2 t^2}{6}} A(t)B(t)
\end{aligned} \tag{A.8}$$

On note alors que $\delta \sim \frac{M\xi_0}{R^2}$.

Bibliographie

- [1] L. Landau, “The Theory of Superfluidity of Helium II”, *J. of Phys., U.S.S.R.* **5**, 71 (1942).
- [2] L. Onsager, *Il Nuovo Cimento* **6** Suppl. 2, 279 (1949).
- [3] Y. Pomeau et S. Rica, “Superfluids with Rotons” , *Phys. Rev. Lett.* **71**, 247 (1993).
- [4] V.L. Ginzburg et L.P. Pitaevskiï, “On the Theory of Superfluidity”, *Soviet Phys. JETP* **7**, 858 (1958).
- [5] L.P. Pitaevskiï, “Phenomenological Theory of Superfluidity near the λ Point”, *Soviet Phys. JETP* **8**, 282 (1959).
- [6] N. Bogolubov, “On the Theory of Superfluidity”, *J. of Phys.* **11**, 23 (1947).
- [7] E.P. Gross, *J. of Math. Phys.* **4**, 195 (1963)
- [8] L.P. Pitaevskiï, “Vortex Lines in an Imperfect Bose Gas”, *Soviet Phys. JETP* **13**, 451 (1961).
- [9] M. Kac, G.E. Uhlenbeck et P.C. Hemmer, *J. Math. Phys.* **4**, 216 (1963)
- [10] C. J. Thompson, “Validity of Mean-Field Theories in Critical Phenomena”, *Prog. of Theor. Phys.* **87**, 535 (1992)
- [11] S. Rica, “Défauts et Structures dans les Systèmes Hors d’Equilibre”, Thèse de l’Université de Nice-Sophia Antipolis (1993)
- [12] C. Nore, “Etude de Comportements Hydrodynamiques par Simulation Numérique de l’Equation de Schrödinger Non-Linéaire”, Thèse de l’Université Paris VII (1995).
- [13] T. Frisch, Y. Pomeau et S. Rica, “Transition to Dissipation in a model of Superflow”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1644 (1992).
- [14] G.B. Hess et W.M. Fairbank, “Measurements of Angular Momentum in Superfluid Helium”, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 216 (1967).
- [15] E.J. Yarmchuk, M.J.V. Gordon et R.E. Packard, *Phys. Rev. Lett.* **43** 214 (1979).
- [16] E.A. Kuznetsov et S.K. Turitsyn, “Instability and Collapse od Solitons in Media with a Defocusing Nonlinearity”, *Sov. Phys. JETP* **67**, 1583 (1988).
- [17] B.B. Kadomtsev et V.I. Petviashvili, *Sov. Phys. Dokl.* **15**, 539 (1970).
- [18] V.E. Zakharov et E.A. Kuznetsov, *Physica D (Utrecht)* **18**, 455 (1986).

-
- [19] L. Landau et E. Lifchitz, “Mécanique des fluides”, *Ed. Mir, Moscou* (1989)
- [20] H.J. Maris, *J. of Low Temp. Phys.* **94**, 125 (1994)
- [21] V.L. Ginzburg et A.A. Sobaynin, *Sov. Phys. Usp.* **19**, 773 (1976)
- [22] V.L. Ginzburg et A.A. Sobaynin, *J. of Low Temp. Phys.* **49**, 507 (1982)
- [23] A.S. Kovalev et A.M. Kosevich, *Sov. J. Low Temp. Phys.* **2**, 449 (1977)
- [24] V.G. Kartavenko, *Sov. J. Nucl. Phys.* **40**, 240 (1984)
- [25] P. Manneville, “Structures dissipatives, chaos et turbulence.” Collection Aléas Saclay, (1990)
- [26] S. Balibar, H. Lambaré et P. Roche, *communication privée*
- [27] M.A. Solís et J. Navarro, *Phys. Rev. B* **45**, 13080 (1992)
- [28] G. Kirchhoff, *J. Reine Angew. Math.* **70**, 289-298 (1869)
- [29] M.S. Pettersen, S. Balibar et H.J. Maris, *Phys. Rev. B* **49**, 12062 (1994)
- [30] S. Balibar, C. Guthmann, H. Lambaré, P. Roche, E. Rolley et H.J. Maris, “Quantum Cavitation in Superfluid Helium 4?”, *J. Low Temp. Phys.* **101**, 271 (1995).
- [31] A.V. Gurevich et A.L. Krylov, *Sov. Phys. JETP* **65**, 944 (1987)
- [32] J.R. Blake et D.C. Gibson, “Cavitation Bubbles near Boundaries”, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19**, 99 (1987)
- [33] A. Vogel, W. Lauterborn et R. Timm, “Optical and acoustic investigations of the dynamics of laser-produced cavitation bubbles near a solid boundary”, *J. Fluid Mech* **206**, 299 (1989)
- [34] W.S. Liu, K. Takayama et I.I. Glass, “Coupled interactions of shock-wave structure with laminar boundary layers in ionizing-argon flows”, *J. Fluid Mech* **97**, 513 (1980)

Publications

Publication 1: “Generation of Vortices in a Model of Superfluid 4He by the Kadomtsev-Petviashvili Instability”, *Euro. Phys. Lett.* **30**, 43 (1995)

Publication 2: “Cavitation versus Vortex Nucleation in a Superfluid Model”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3150 (1995)

Publication 3: “Coalescence and Droplets in the Subcritical Nonlinear Schrödinger Equation”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1215 (1997)