

Méthodes matricielles pour la stabilité des écoulements non-parallèles

Jérôme Hoepffner,
Post-Doc, IRPHÉ

Avec Stéphane le Dizès, Thomas Leweke, Uwe Ehrenstein

Motivations

Étude dynamique

- 1) Approche « expérimentale »: simulation (DNS)
- 2) Approche « analytique »: extraction du squelette

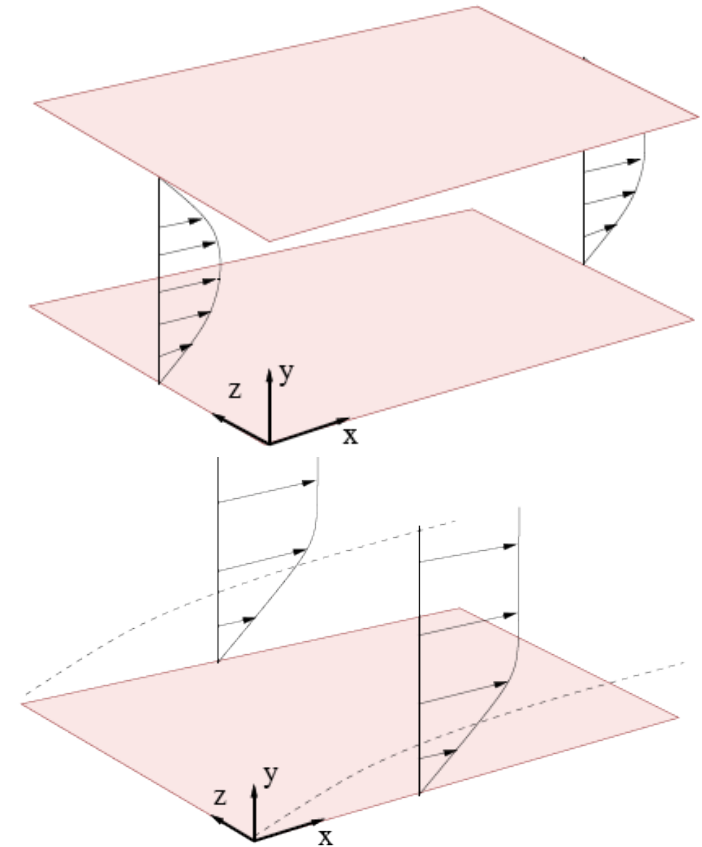
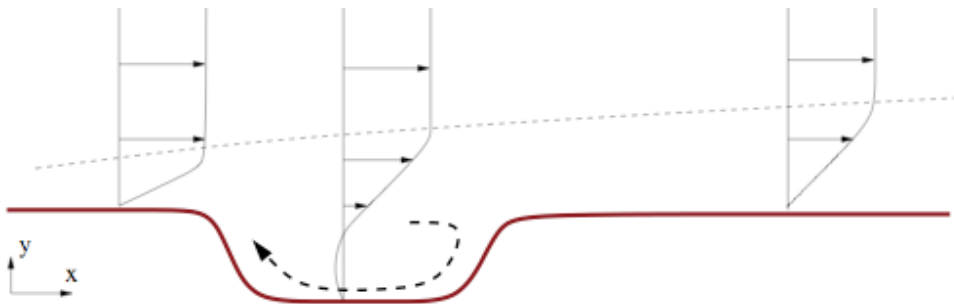
Le squelette:

- États stationnaires
- Orbites
- Attracteurs
- Modes propres
- Perturbations optimales

Approche analytique pour les « petits systèmes »:

Symmetries, décompositions, périodicité...

➔ Écoulement parallèles: modes de Fourier (3D→1D)

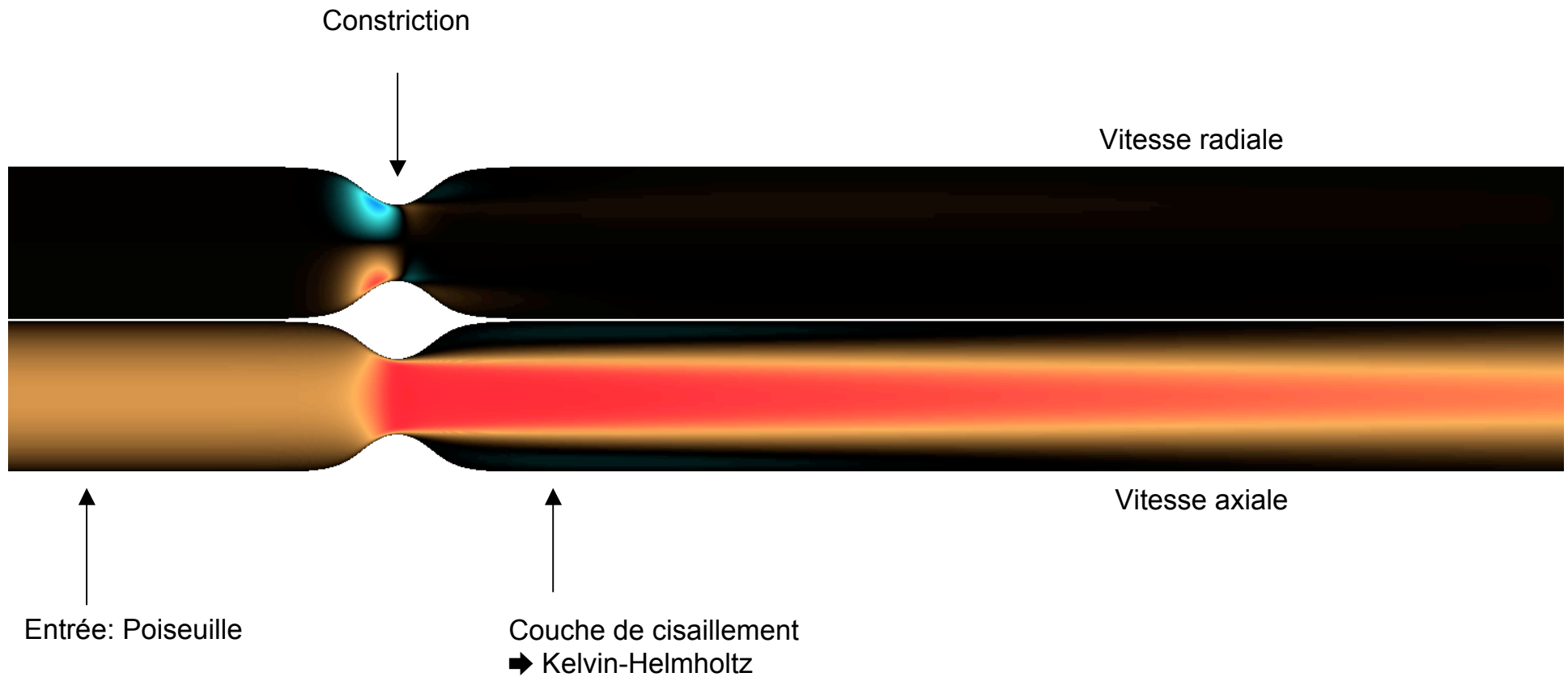


Quel sont les outils qui vont nous permettre d'aborder les écoulements non-parallèles?

Cas d'étude

Conduite avec constriction

Écoulement interne, décollé, instable convectivement



(Pour comparaison avec manip: Martin Griffith, Thomas Leweke, IRPHÉ)

Stabilité

Stabilité: existe-t'il des perturbations qui croissent?

- ➔ Modes propres instables
- ➔ Forte sensibilité aux *conditions initiales*
- ➔ Forte sensibilité aux *perturbations externes*

Systemes stables sensibles:

Systemes *non-normaux*

Couche limite: Croissance transitoire de stries longitudinale (Lift-up)

Instabilités convectives:

système stable globalement mais forte croissance énergétique
(Chomaz, Ann. Rev. Fluid Mech. 2006)

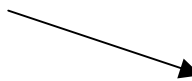
Méthodes

Approche grand systèmes:

- 1) Discretise dans l'espace
- 2) Calcule termes de convection, de diffusion
- 3) avance dans le temps
- 4) Calcule une pression admissible
- 5) ...

Approche petits systèmes:

- 1) Découple en modes de Fourier dans l'espace
- 2) Transforme (u,v,w,p) vers formulation réduite (x)
- 3) Discrétise, système dynamique
- 4) Étudie A


$$\dot{x} = Ax$$

En 2D, 3D, un A obtenu ainsi serais bien trop grand.

Systeme descripteur

$$E\dot{q} = Aq \neq \dot{q} = Aq$$

Dynamique des perturbations (u,p) d'un ecoulement de base U:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \end{pmatrix}}_{\dot{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} U \cdot \nabla + \nabla U \cdot + \Delta / Re & \nabla \\ \nabla \cdot & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}}_q$$

Toute la dynamique est representee par (E,A)

Utilisation du modele:

Modes propres: $\frac{1}{\lambda} v = A^{-1} E v$

Reponse au forage harmonique: $\hat{q} = (i\omega E - A)^{-1} \hat{f}$

Reponse aux conditions initiales: $q^{n+1} = (E - Ah/2)^{-1} (E + Ah/2) q^n$

Decomposition LU de A
 Decomposition LU de (E-Ah/2)
 Decomposition LU de (i\omega E - A)

Optimisation des conditions initiales

Operateur de marche en temps

Operateur adjoint

$$\begin{aligned}
 q(T) &= \mathcal{H}_T q_0, \\
 \frac{\|q(T)\|}{\|q_0\|} &= \frac{\langle q(T), q(T) \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} = \frac{\langle \mathcal{H}_T q_0, \mathcal{H}_T q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} = \frac{\langle q_0, \mathcal{H}_T^+ \mathcal{H}_T q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} \\
 &= \frac{q_0^H \boxed{\mathcal{H}_T^+ \mathcal{H}_T} q_0}{q_0^H q_0} \quad \leftarrow \text{Quotient de Rayleigh}
 \end{aligned}$$

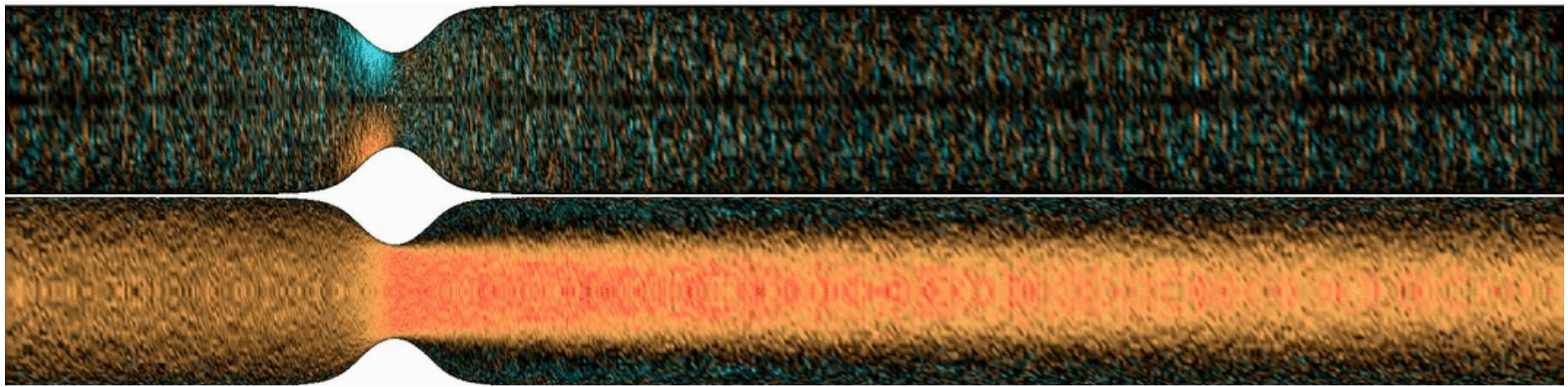
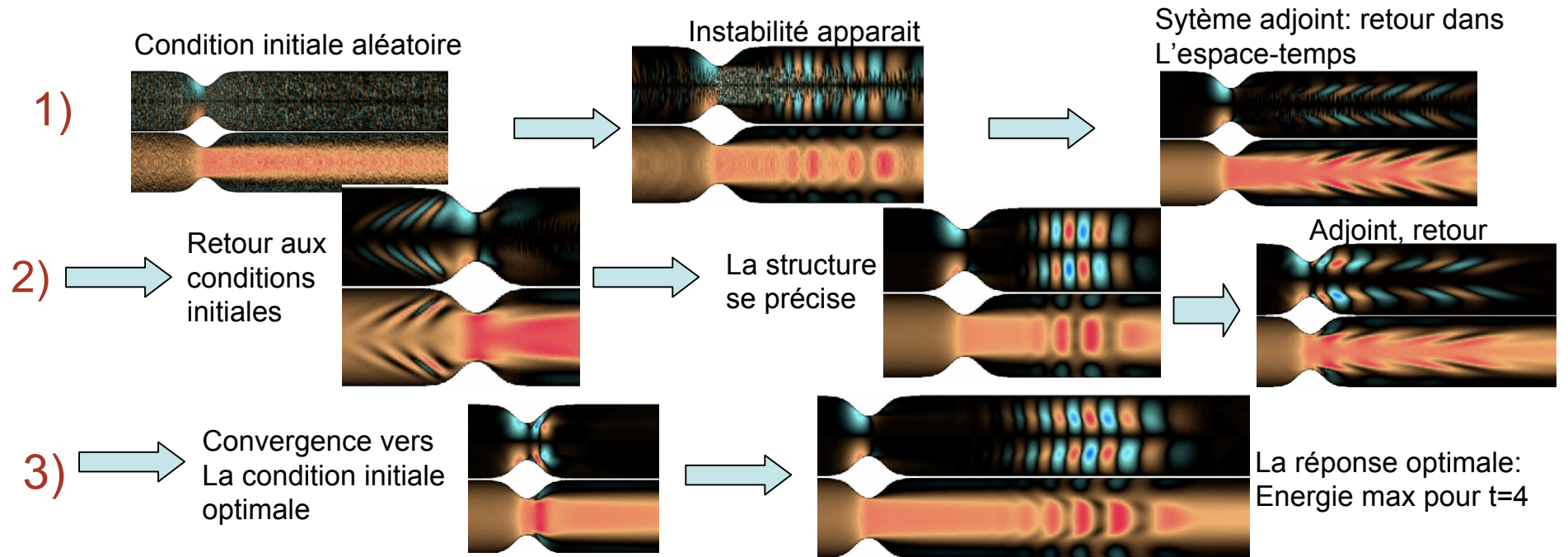
$$\boxed{\mathcal{H}_T^+ \mathcal{H}_T}$$

- 1) Propage dans le temps la condition initiale
- 2) Propage la condition finale en arrière

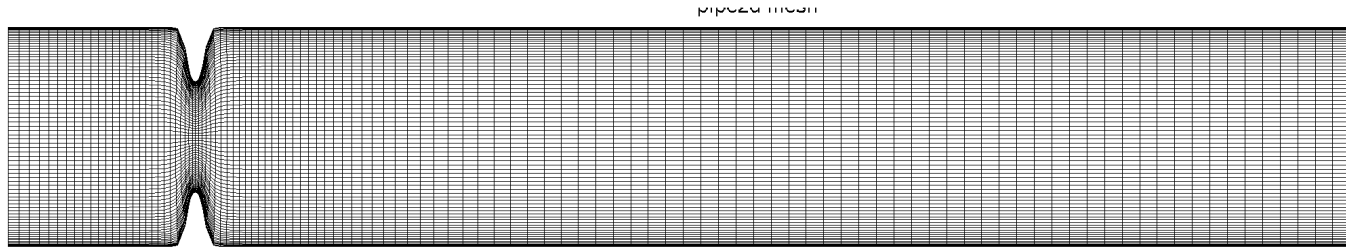
Les extrema du quotient de Rayleigh sont atteint pour ses vecteurs propres

Optimisation des conditions initiales

Itération puissance: $q^k = (\mathcal{H}_T^+ \mathcal{H}_T)^n q^0$



Effort de calcul



Pour l'exemple précédent:

Axial: 700 points (différences finies d'ordre 4)

Radial: 30 points (Chebyshev)

vitesse axiale, vitesse radiale, pression

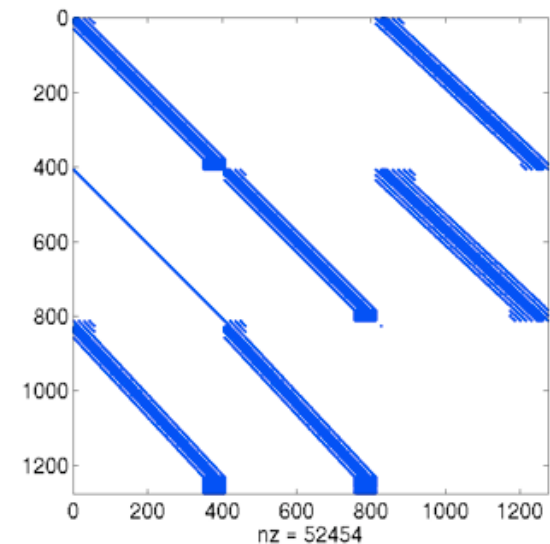
$700 \times 30 \times 3 = 63000$ degrés de liberté
(Matrice pleine: $63000^2 \times 8 \text{ octets} = 31 \text{ Go}$,)
(Matrice creuse $\approx 200 \times 63000 \times 8 \text{ octets} = 100 \text{ Mo}$)

Construction de la matrice dynamique: ≈ 1 minute

LU creuse: ≈ 12 secondes

Système linéaire avec LU: ≈ 0.5 secondes

Système linéaire GMRES préconditionné: ≈ 5 secondes



➔ **État stationnaire:** 6 itérations Newton/Raphson:
2 décompositions LU, 4 GMRES. (moins d'une minute)

➔ **Conditions initiales:**
quatre itérations direct/adjoint, ≈ 5 minutes. (MATLAB)

Optimisation des perturbations externes

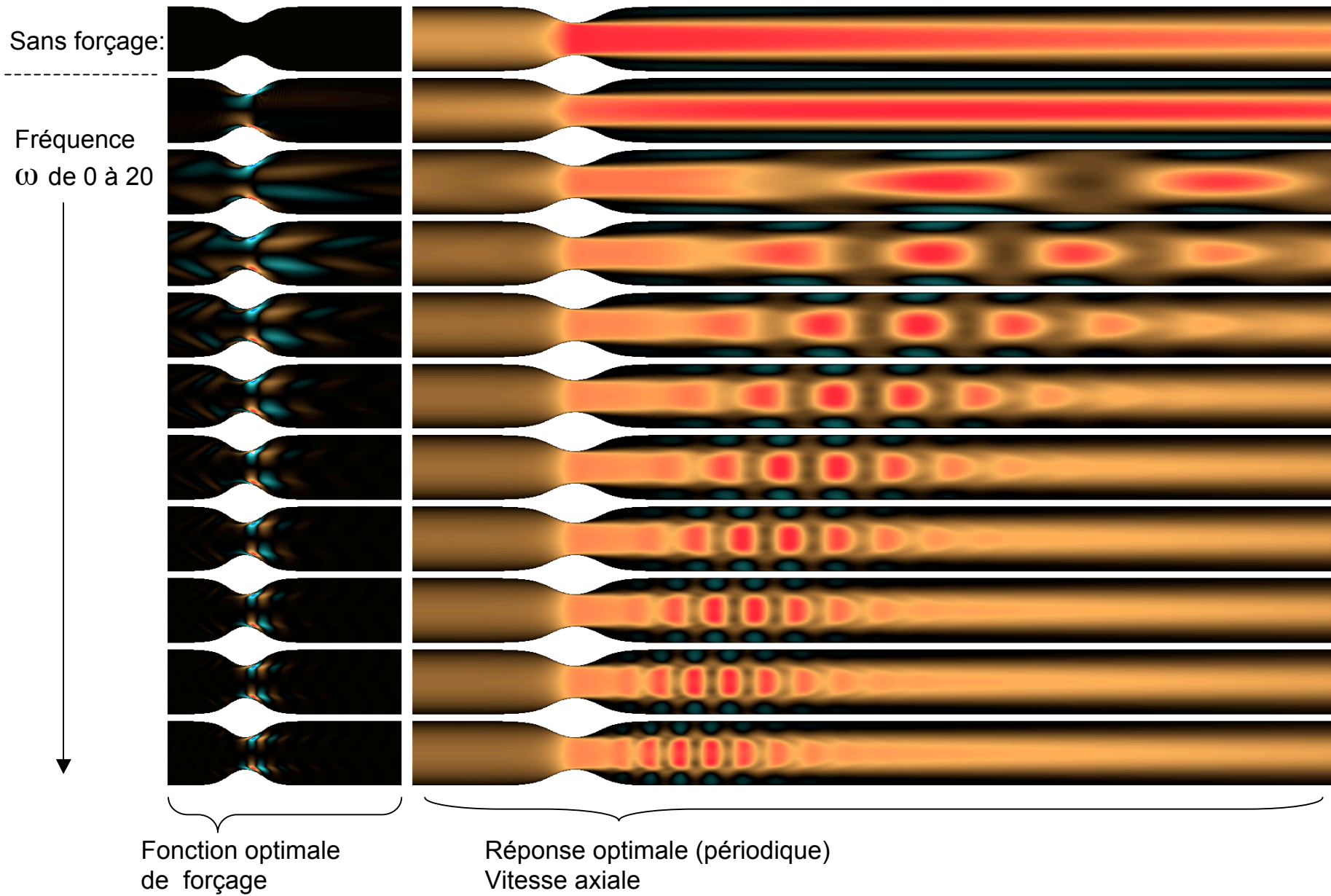
Forçage harmonique → Réponse harmonique:
$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \end{pmatrix} \cos(\omega t)$$

Solution du système:
$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \underbrace{(i\omega E - A)^{-1}}_{\mathcal{R}_\omega} \begin{pmatrix} \hat{f}_u \\ \hat{f}_p \end{pmatrix}$$

→ Forçage optimal vecteur propre de: $\mathcal{P}\mathcal{R}_\omega^+\mathcal{R}_\omega$

\mathcal{P} **Projection sur les champs**
- sans injection de fluide
- à divergence zero

Forçage optimal



Incompressibilité:

la pression au coeur de la dynamique?

Bernoulli, Euler: La pression est l'acteur principal

Écoulements incompressible:

Système avec plus de variables (u,v,w,p) que de degrés de liberté (2)

La pression est un multiplicateur de Lagrange?

Système descripteur:

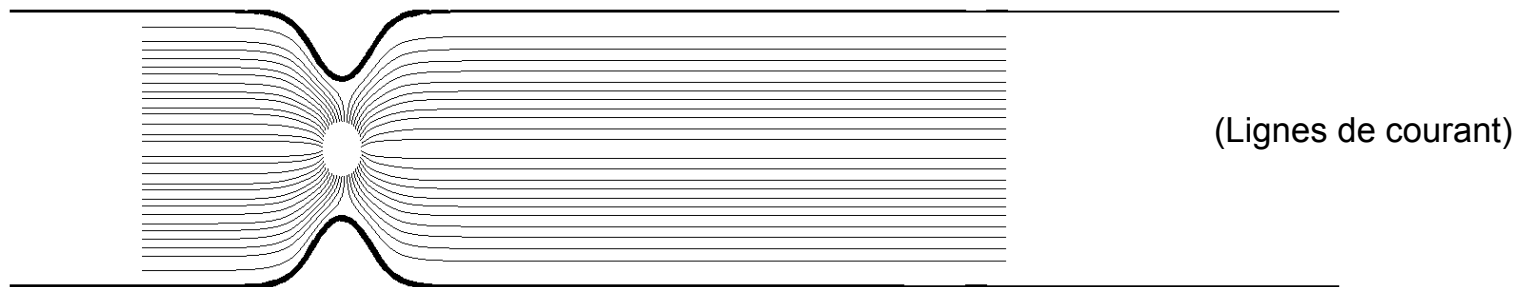
La pression joue un rôle important, par le biais de l'incompressibilité

Injection de fluide

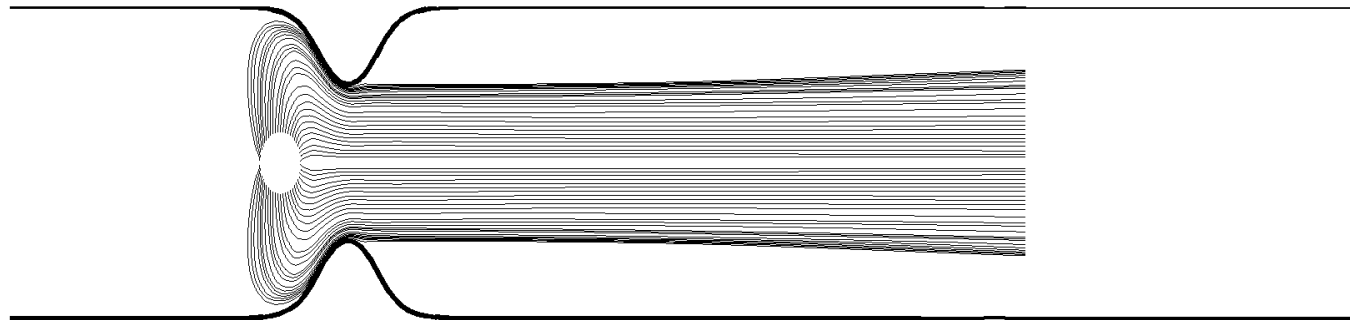
Terme de « forçage » sur la pression ➔ injection

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \nabla \\ \nabla \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \cos(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot u = s$$

Injection de fluide, pas d'écoulement de base



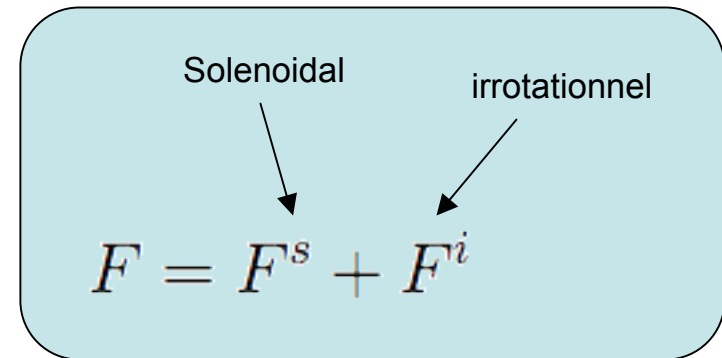
Avec écoulement de base:



Dynamique solénoïdale, « dynamique » irrotationnelle

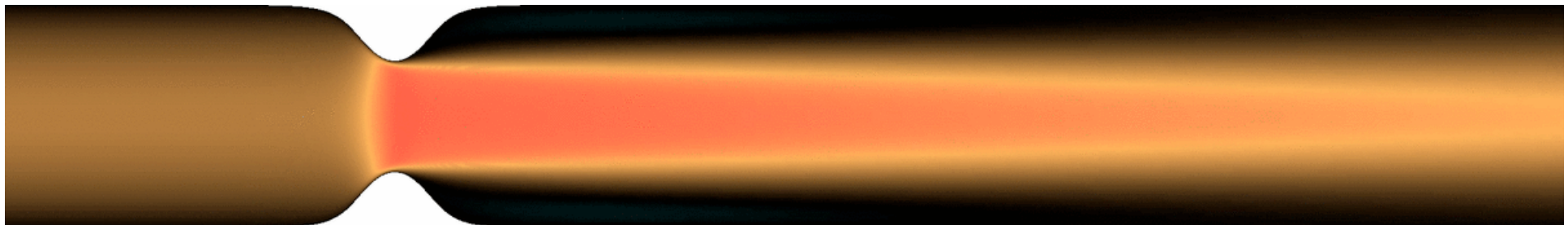
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \\ y = (C_1, C_2) \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ Forçage volumique, conditions limites, injection ...

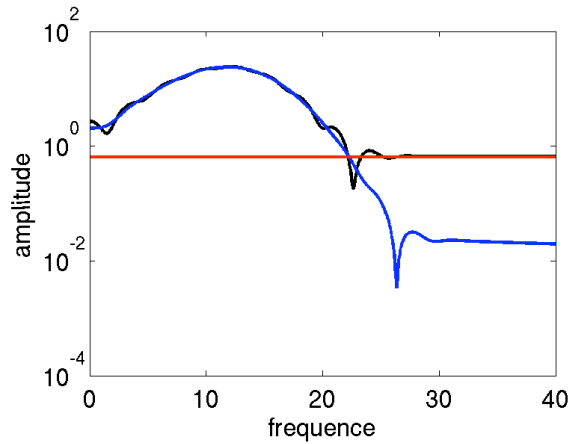


Fonction de transfert:

$$y^s = C(i\omega E - A)^{-1} F^s$$
$$y^i = C(i\omega E - A)^{-1} F^i$$

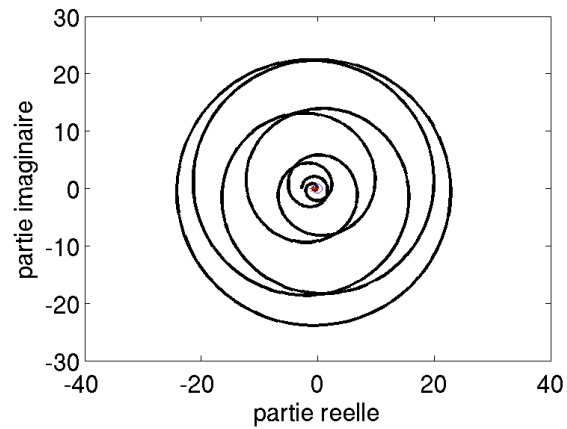


Dynamique incompressible

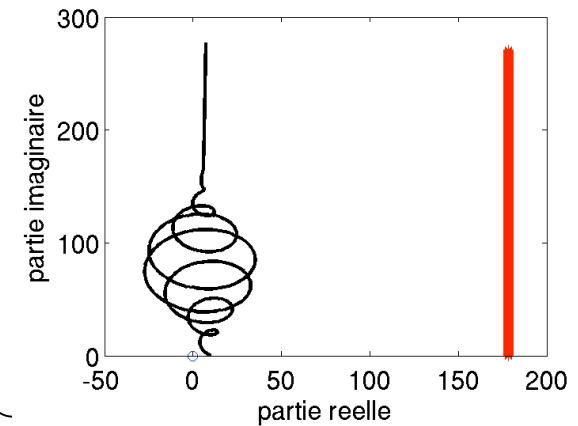
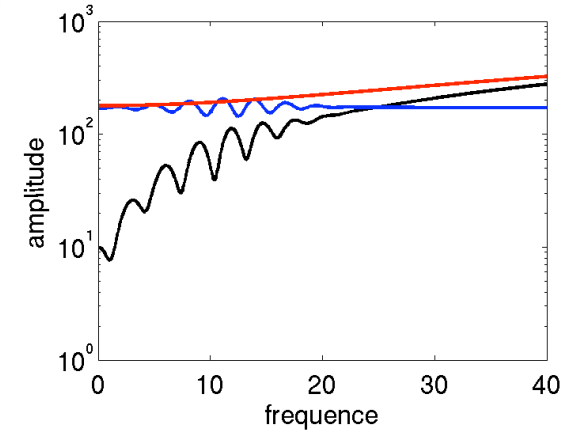


Deux expériences:

Injecte du fluide,
Mesure la vitesse
En sortie



Injecte du fluide,
Mesure la pression
En sortie



- 1) Autant de fluide sort qu'il en rentre ➔ Réponse indépendante de la fréquence
- 2) Hautes fréquences ➔ grande accélération ➔ forte compression

Conclusions

Outils pour les études de stabilité des écoulements non-parallèle

Formalisme descripteur: préserve la structure des équations

- ➡ Dynamique petites perturbations avec deux matrices E, A
- ➡ Matrices creuses

Analyse de la dynamique: propriétés de E et A

Optimisation avec contrainte: projecteurs

« **Dynamique incompressible** » présente dans cette modélisation:

- ➡ Effets immédiats à distance
- ➡ peut exciter les instabilités