

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI  
spécialité : physique théorique

présentée par

**Basile Audoly**

pour obtenir le grade de docteur de l'université Paris VI

sujet de la thèse

Élasticité et géométrie : de la rigidité des surfaces  
à la délamination en fil de téléphone

soutenue le 6 janvier 2k devant le jury composé de

M. Paul Clavin	examineur
M. Yves Couder	invité
M. Étienne Guyon	invité
M. Michel Moreau	rapporteur
M. Alain Pocheau	rapporteur
M. Yves Pomeau	directeur
Mr. Jim R. Rice	examineur
M. Évariste Sanchez	examineur



# Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique Statistique de l'École Normale Supérieure. J'y ai trouvé des contacts particulièrement stimulants, dans une ambiance sympathique. Les moyens dont j'ai pu bénéficier m'ont porté tout au long de ce travail, avec notamment la possibilité de voyager à la rencontre de chercheurs étrangers. Que le laboratoire de physique statistique et ses membres en soient chaleureusement remerciés.

J'exprime ma profonde gratitude à Yves Pomeau qui a dirigé mes recherches : avant tout pour son amour de la « belle » science (qu'il a su me faire partager) mais aussi pour ses remarques et conseils toujours clairvoyants, pour ses critiques et encouragements, en un mot pour son encadrement remarquable. Superfluides, gaz quantiques, condensats de Bose, supra-conductivité, élasticité, fluides newtoniens, tant de sujets que j'ai entrevus, et sur lesquels j'espère pouvoir bientôt revenir.

J'ai profité de discussions, échanges et conseils scientifiques de la part de nombreuses personnes : Mokhtar Adda-Bedia (mon tuteur attentionné), Martine Ben Amar, Henri Berestycki, Paul Clavin, Étienne Guyon, Vincent Hakim, John Hutchinson, François Labourie, Dominique Leguillon, L. Mahadevan, Margot Mottet-Caisson, Alain Pocheau, Çergio Rica, Jim Rice, Benoît Roman, Évariste Sanchez-Palencia, Jean-Marc Schlenker. Je leur en suis profondément reconnaissant.

Merci enfin à tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu au cours de ces trois années.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>I Rigidité géométrique des surfaces</b>	<b>1</b>
Index des notations . . . . .	7
<b>1 Mise en équation</b>	<b>9</b>
1.1 Conventions de géométrie différentielle . . . . .	9
1.2 L'équation de rigidité . . . . .	13
1.2.1 Régions de courbure non nulle . . . . .	15
1.2.2 Problème inverse . . . . .	16
1.2.3 Raccordement en $K = 0$ . . . . .	17
<b>2 Rigidification par des courbes</b>	<b>19</b>
2.1 Rigidité des surfaces de révolution . . . . .	19
2.1.1 Courbes rigidifiant les surfaces de révolution . . . . .	20
2.1.2 Modes de déformation exceptionnels . . . . .	21
2.2 Interprétation et généralisation . . . . .	22
2.2.1 Interprétation par les conditions de raccordement . . . . .	22
2.2.2 Interprétation géométrique . . . . .	23
2.2.3 Les courbes rigidifiantes pour des surfaces quelconques . . . . .	24
2.3 Conclusion et perspectives . . . . .	25
<b>3 « Elasticity and Geometry »</b>	<b>27</b>

<b>II</b>	<b>Mécanique de la fracture interfaciale</b>	<b>49</b>
<b>4</b>	<b>Fracture d'un matériau homogène</b>	<b>53</b>
4.1	Élasticité d'un matériau homogène isotrope . . . . .	53
4.1.1	Tenseurs des déformations et des contraintes . . . . .	53
4.1.2	La loi de Hooke . . . . .	54
4.2	Éléments de mécanique de la fracture . . . . .	55
4.3	L'intégrale de Rice . . . . .	59
4.3.1	Définition et propriétés de l'intégrale $J$ . . . . .	59
4.3.2	Application à la fracture . . . . .	61
4.4	Propagation quasi-statique d'une fissure . . . . .	62
4.4.1	Position du problème . . . . .	62
4.4.2	L'approche de Barenblatt . . . . .	63
4.4.3	Le critère de Griffith . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Fracture interfaciale</b>	<b>67</b>
5.1	Dépendance de mode des fissures interfaciales . . . . .	67
5.2	Friction et dépendance de mode . . . . .	69
5.3	Le modèle . . . . .	70
5.4	Étude asymptotique près de la pointe . . . . .	72
5.4.1	Exposant anormal $\lambda$ , nullité de $G_{pte}$ . . . . .	72
5.4.2	Problèmes soulevés par $\lambda \neq \frac{1}{2}$ . . . . .	76
5.4.3	Élimination des divergences fortes . . . . .	76
5.5	Dépendance de mode induite par la friction . . . . .	78
5.5.1	Une première approche . . . . .	78
5.5.2	Définition cohérente du taux de restitution $G$ . . . . .	79
5.5.3	Application à l'estimation des effets frictionnels . . . . .	81
5.6	Conclusion . . . . .	83
<b>6</b>	<b>« Asymptotic Study... »</b>	<b>85</b>
<b>III</b>	<b>Mécanique de la délamination</b>	<b>103</b>
<b>7</b>	<b>Équations de Föppl–von Kármán</b>	<b>109</b>
7.1	Déduction des équations de F.–von K. . . . .	109
7.1.1	Équations de F.–von K. sans flexion . . . . .	109
7.1.2	Incorporation de la flexion . . . . .	113
7.2	Solutions analytiques . . . . .	116
7.2.1	La cloque rectiligne . . . . .	117

7.2.2	La cloque circulaire . . . . .	121
<b>8</b>	<b>Délamination des films minces</b>	<b>125</b>
8.1	Couplage avec la fracture interfaciale . . . . .	125
8.2	Stabilité de la délamination . . . . .	128
8.2.1	Stabilité des profils unidimensionnels . . . . .	129
8.2.2	Stabilité des profils quelconques . . . . .	132
8.2.3	Conclusion . . . . .	133
8.3	Interprétation des profils . . . . .	134
<b>9</b>	<b>« Stability of Straight... »</b>	<b>137</b>
<b>10</b>	<b>« Mode Dependence... »</b>	<b>143</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>165</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>167</b>





# Introduction

Ce travail porte sur l'élasticité des corps minces bidimensionnels. On peut dater les débuts de l'élasticité à 1678, avec la célèbre loi de Hooke « *ut tensio sic vis* », et le début de la théorie des barres à 1744, avec l'*elastica* d'Euler. Il faut cependant attendre le début du XX<sup>e</sup> siècle pour que l'élasticité des plaques se trouve mise en équations grâce aux travaux de Föppl (1907) et de von Kármán (1910). Cette apparition tardive des corps élastiques bidimensionnels dans le champ de la mécanique s'explique par la complexité des équations de Föppl–von Kármán. Presque un siècle plus tard, l'élasticité des corps minces reste d'ailleurs un sujet de recherches vivace. Deux indices l'attestent : les progrès importants réalisés tout récemment, comme par exemple la compréhension de la structure des singularités du papier froissé (cônes [11, 57] ou plis [45]); et le fait que l'élasticité se trouve aujourd'hui à la croisée de disciplines variées et intéresse aussi bien mathématiciens que physiciens ou mécaniciens.

Nous avons tenté de restituer dans ce mémoire la diversité de ces approches possibles. En particulier, nous avons choisi d'insister sur les liens forts entre géométrie et élasticité. La première partie de ce mémoire est d'ailleurs consacrée à un problème de nature purement géométrique, fondamental pour l'étude des coques. C'est la question de la rigidité isométrique : étant donnée une surface inextensible, est-elle déformable ? On sait par exemple qu'une feuille de papier peut être roulée en cône ou en cylindre sans être étirée mais qu'une coquille d'œuf tire son incroyable rigidité mécanique de l'absence de déformations isométriques pour une surface ovoïde. L'étude de cette question nous amènera à introduire une classe de courbes très particulières, aux propriétés rigidifiantes.

La deuxième partie de ce mémoire porte sur la mécanique de la rupture. La théorie de la fracture, qui s'est énormément développée depuis la fin des années soixante, a acquis de nos jours une importance technologique considérable. Nous nous intéressons à un type de fracture particulier, celui où une fissure suit une interface entre deux matériaux différents. Dans le but de mieux comprendre certaines propriétés expérimentales des fissures interfaciales, nous incorporons l'effet du frottement entre les lèvres de la fissure.

Cette étude de la fracture interfaciale prépare la dernière partie de ce mémoire, consacrée à la délamination des films minces. Deux problèmes nous ont intéressé : tout d'abord, expliquer la stabilité des cloques de délamination, qui est en contradiction apparente avec des raisonnements de loi d'échelle élémentaires ; d'autre part, expliquer la récurrence d'un profil de délamination en « fil de téléphone » dans de nombreuses expériences.

**Première partie**

**Rigidité géométrique  
des surfaces**



On s'intéresse dans cette première partie aux déformations des coques élastiques. Par coque élastique, on entend un morceau de matériau solide dont l'épaisseur est petite devant toutes ses autres dimensions, et qui présente une courbure au repos — en l'absence de courbure on parlerait de plaque. Des équations de l'élasticité pour les coques peuvent être écrites [49] ; elles généralisent les équations de Föppl–von Kármán (F.–von K.) pour les plaques. L'étude de ces équations représente un domaine vivace de l'analyse fonctionnelle [15, 65]. Cependant, elles se révèlent le plus souvent d'une complexité rédhibitoire dans la recherche de solutions explicites, sinon analytiques. Il n'y a que pour des formes particulièrement simples, et moyennant certaines approximations, parfois mal contrôlées, que l'on puisse écrire pour une coque des équations d'une complexité comparable à celle des équations de F.–von K. Nous renvoyons par exemple à [77], qui traite de la coque cylindrique.

La petitesse de l'épaisseur,  $h$ , de la coque <sup>1</sup> fait qu'un type particulier de déformations est favorisé : les déformations *isométriques*. Ces dernières sont, par définition, celles pour lesquelles les longueurs sont conservées tangentiellement à la surface moyenne de la coque. Comme le note Rayleigh [58, §235 b] : « [la] déformation [d'une coque d'épaisseur  $h$ ] comporte, en général, à la fois de l'extension et de la courbure, et l'énergie élastique est de la forme :

$$A h (\text{extension})^2 + B h^3 (\text{courbure})^2. \quad (1)$$

On doit minimiser cette énergie. Ainsi, dans la limite d'épaisseur nulle, le déplacement sera sans extension, à supposer qu'une telle déformation existe. . . » La forme de cette énergie s'explique ainsi : le terme  $A h$  est le terme qui, dans l'énergie, possède la plus petite puissance en  $h$ . Mais, seul, il conduirait à des solutions singulières comportant des plis [45] ou pointes coniques [11, 57]. Le terme en  $B h^3$ , le deuxième dans un développement en puissances de  $h$ , régularise ces singularités. La flexion n'implique qu'une extension/compression de part et d'autre de la surface moyenne, ce qui explique que le terme de courbure carrée dans l'équation (1) soit associé à une puissance élevée de  $h$  : ce type de déformation représente bien moins d'énergie élastique qu'une extension uniforme ; nous y reviendrons au paragraphe 7.1.

Rayleigh note que les déformations isométriques seront favorisées *si elles existent*. Lorsqu'il étudie les vibrations des coques élastiques, il envisage donc deux cas qu'il prend soin de traiter séparément : d'une part, les profils isométriquement rigides pour lesquels on peut négliger le terme de flexion dans l'énergie (1) (comme la sphère [58, §235 h]) ; d'autre part, les coques admettant des modes de déformation isométriques (tels le cylindre [58, §235 e] ou la calotte sphérique [58, §235 f]).

<sup>1</sup>On suppose cette épaisseur  $h$  uniforme par commodité mais cette hypothèse n'est pas essentielle. Il suffit qu'elle soit partout petite devant les autres dimensions.

Pour ces dernières, les premiers modes de vibration sont inextensionnels (ou encore « flexuraux »), et leur fréquence s'annule dans la limite d'épaisseur nulle (les autres dimensions étant fixées). La nécessité de distinguer les surfaces isométriquement déformables de celles qui sont rigides s'impose naturellement lorsque l'on déduit les équations des coques de l'élasticité tridimensionnelle, au moyen d'un développement asymptotique en l'épaisseur  $h$  [64]. Au-delà du spectre de vibration, bien d'autres propriétés d'une coque dépendent de sa rigidité isométrique : l'apparition de singularités (les plis et sommets à la surface du papier froissé), par exemple, est due à l'absence de déformations régulières isométriques répondant aux conditions imposées aux limites [11, 57]. La distinction rigide/déformable joue un rôle important dans les simulations numériques de structures élastiques [65].

Ces différences qualitatives de comportement montrent qu'en préliminaire indispensable à l'étude d'une coque élastique, il faut analyser la rigidité géométrique de sa surface moyenne. C'est le problème que nous considérerons ici. Remarquons qu'il s'agit d'une question de nature purement géométrique, qui correspondrait à la limite où le module de flexion de la coque,  $D$ , tendrait vers zéro dans les équations de l'élasticité, ou, dans l'équation (1), à la limite où l'on négligerait le coefficient  $B h^3$ .

Le problème de la rigidité isométrique possède une longue histoire en géométrie des surfaces. Dès 1853, J. H. Jellet [35] considérait les courbes inscrites sur une surface inextensible, et se demandait sur quels types de courbes il est légitime d'imposer la déformation de la surface ; il distinguait des courbes que l'on qualifierait aujourd'hui d'elliptiques ou d'hyperboliques au vu de l'équation de rigidité (1.24) écrite plus bas. On distingue en fait plusieurs types de rigidités isométriques, selon la régularité de la surface considérée (surfaces avec plis [13], sans plis  $C^1$ ,  $C^\infty$ , analytiques [3]), et selon le type de déformations autorisées (infiniment déformables au premier ordre, aux ordres supérieurs, continûment déformables, discontinûment déformable par « voilement », etc.) Ces distinctions sont essentielles : il existe des surfaces infiniment rigides qui ne sont pas continûment déformables, et, pire, des surfaces continûment déformables qui n'admettent que des déformations triviales (rotations-translations) au premier ordre.

Il n'existe pas de résultat général donnant la rigidité isométrique d'une surface donnée quelconque. Nous renvoyons à Spivak [67] pour un rappel des principaux résultats connus. Ceux-ci concernent des types bien particuliers de surfaces : les surfaces convexes, à courbure de Gauss constante, ou encore de révolution. Ainsi, les surfaces convexes fermées (ovoïdes) sont infiniment rigides [67, Th. 10] et rigides par déformations discontinues [67, Th. 12]. Ce résultat a été étendu par Alexandrov [3] pour le cas analytique et par Nirenberg [51] pour le cas  $C^4$  aux surfaces telles que l'intégrale de la courbure de Gauss sur leur partie

convexe vaut  $2 \cdot 4\pi$ . Ces derniers résultats concernent les déformations d'amplitude finie. Notons enfin que la réflexion d'une partie de la surface selon un plan qui l'intersecte définit toujours une déformation régulière. Cette déformation d'amplitude finie n'est pas, en général,  $C^1$  mais, pour certaines surfaces bien particulières, elle peut définir une déformation  $C^\infty$ . Cette classe d'isométrie joue un rôle en élasticité (cf. [54, 55] sur le rebond d'une sphère élastique).

L'étude complète des déformations infinitésimales des surfaces de révolution est rendue possible par leur décomposition en modes de Fourier dans la direction orthoradiale, ce qui ramène le problème à une analyse d'équations différentielles ordinaires ; cette étude a été faite par Cohn-Vossen [16] en 1929. Dans ce chapitre, notre travail va d'abord consister à reformuler les résultats de Cohn-Vossen de manière plus intrinsèque. Cela nous permettra, dans une seconde étape, d'étendre un résultat essentiel de Cohn-Vossen, l'existence de courbes rigidifiantes, aux surfaces quelconques, *i.e.* qui ne sont pas forcément de révolution.

Nous nous intéresserons au cas des surfaces de régularité  $C^3$ , et à des déplacements eux-mêmes de classe  $C^3$ . Nous verrons qu'il faut au moins cette régularité pour pouvoir écrire les équations (1.6) et (1.21). Nous appellerons modes (de déformation) les déformations infinitésimales, c'est-à-dire qui sont solutions d'équations de rigidité linéarisées. Un déplacement (ou un mode) de flexion pure désignera une modification (infinitésimale, pour un mode) du plongement qui conserve la métrique de la surface, donc par conséquent ses autres propriétés intrinsèques telles que la courbure de Gauss. Nous parlerons de surface inhibée — plutôt que rigide, ce dernier terme pouvant se révéler ambigu — quand il n'existe pas de déformation de flexion pure.

---

<sup>2</sup>Par le théorème de Gauss-Bonnet, c'est effectivement le cas pour les surfaces convexes compactes (ovoïdes) mais il en existe d'autres [51].





## Index des notations

$h$	épaisseur de la coque
$M$	variété décrivant la surface moyenne
$g$	première forme fondamentale (tenseur métrique)
$II$	deuxième forme fondamentale (tenseur de courbure)
$l, m, n$	coefficients de la forme $II$
$l_d, n_d$	valeurs propres de la forme $II$
$H$	courbure moyenne
$K$	courbure de Gauss
$\Gamma_{(i)}$	constantes de structures définies par (1.5)
$(u, v)$	système de coordonnées sur $M$
$\partial_u, \partial_v$	repère adapté aux coordonnées $(u, v)$
$e_1, e_2$	repère mobile orthonormal
$e_n$	normale unitaire à la variété
$w \in T_p M$	vecteur tangent à la variété en $p$
$e$	index permettant la classification de rigidité
$f$	fonction scalaire définie sur la variété
$h$	champ de déplacement
$h_n$	composante normale du déplacement
$\Omega$	champ de rotation local
$\omega$	composante normale du champ de rotation $\Omega$
$\mathcal{C}$	une courbe inscrite sur la variété
$t$	un vecteur tangent unitaire à la courbe
$\bar{t}$	un vecteur unitaire normal à $t$ , tangent à $M$
$\kappa_i$	la courbure intrinsèque de $\mathcal{C}$ sur $M$
$\kappa$	la courbure de $\mathcal{C}$ vue comme courbe de $\mathbb{R}^3$
$A, B$	deux classes de courbes rigidifiantes ( $A$ est plus large)



# Chapitre 1

## Mise en équation

Différentes approches peuvent être envisagées pour mettre en équations le problème de la rigidité infinitésimale ; la plus simple consiste à employer un repère orthonormal de  $\mathbb{R}^3$ , comme dans [67, p. 278–280]. Pour l'étude des surfaces de révolution, ce repère peut être muni de coordonnées cylindriques [16, §1], et l'équation de rigidité infinitésimale se déduit en moins de deux pages de calcul. L'inconvénient de cette approche est que certains aspects géométriques de la rigidité sont occultés par le choix d'un repère non « canonique ». Pour cette raison, nous choisissons une approche plus intrinsèque. Elle nous permettra une réinterprétation et une généralisation des résultats de Cohn-Vossen, au prix de calculs un peu plus lourds. Pour une approche complètement intrinsèque, nous renvoyons à la référence [15].

### 1.1 Conventions de géométrie différentielle

Soit donc  $M$  une variété  $C^3$  à deux dimensions plongée dans  $\mathbb{R}^3$ . On considérera aussi bien le cas où  $M$  est sans bords (cas d'un ovoïde), que le cas d'une variété avec des bords libres. On supposera par commodité cette variété orientable mais cette hypothèse n'est pas essentielle : on se donne donc  $e_n$  un vecteur normal unitaire définissant son orientation. On utilisera la notation usuelle en géométrie différentielle qui consiste à assimiler un vecteur  $w \in T_p M$  tangent à la variété en  $p$  avec l'opération de dérivée partielle  $\partial f / \partial w = \nabla_w f$  sur les fonctions  $f$  définies sur la variété. Ainsi, pour un système de coordonnées  $(u, v)$ ,  $\partial_u$  et  $\partial_v$  désigneront les vecteurs tangents associés à ce système de coordonnées. Le vecteur normal à la variété permet d'introduire la 2-forme de courbure,  $II$ , qui est la forme symétrique définie par

$$II(w, w') = \langle -de_n(w), w' \rangle \quad \text{pour } w, w' \in T_p M. \quad (1.1)$$

Les crochets  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignent le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$ . La notation différentielle signifie « dérivée de  $e_n$  le long de  $w$  ». Le produit scalaire entre vecteurs tangents correspond à la première forme fondamentale, ou métrique sur la variété. On appelle courbures principales et directions principales les valeurs propres et vecteurs propres de la forme quadratique  $II$ .

La forme de courbure, qui exprime la manière dont la variété  $M$  est plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , doit satisfaire aux équations de Gauss et de Codazzi-Mainardi. L'équation de Gauss traduit le fait que la courbure de Gauss de la variété est un invariant par plongement : d'après le *Theorema egregium*, le déterminant de  $II$ , quantité *a priori* dépendante du plongement, peut s'exprimer uniquement en fonction de la métrique (intrinsèque) de la surface. Les équations de Codazzi-Mainardi peuvent être considérées comme une condition complémentaire d'intégrabilité de  $II$  en un plongement; elles reflètent la structure de l'espace ambiant,  $\mathbb{R}^3$ , lui-même [67]. Le théorème fondamental de la géométrie différentielle des surfaces garantit que toute variété bidimensionnelle munie d'une forme  $II$  satisfaisant aux équations de Gauss et de Codazzi-Mainardi peut être réalisée comme un plongement, du moins localement [67].

On pourra décrire la surface au moyen d'un système de coordonnées  $(u, v)$ . On conviendra de noter les coefficients de la forme de courbure

$$II = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

de sorte que par définition,  $l = II(\partial_u, \partial_u)$ , etc. On préférera parfois utiliser un repère mobile adapté pour décrire la surface : on entend par là deux sections orthonormales du fibré tangent <sup>1</sup>  $(e_1, e_2)$  telles que  $(e_1, e_2, e_n)$  respecte l'orientation, et que  $(e_1, e_2)$  diagonalise  $II$ . On conviendra de noter les coefficients de la forme de courbure diagonalisée :

$$II = \begin{pmatrix} l_d & 0 \\ 0 & n_d \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Par convention, on désignera les coordonnées de vecteurs dans ce repère mobile adapté par des accolades  $\{ \}$  :

$$\mathbf{w} = \left\{ \begin{array}{c} w_{(1)} \\ w_{(2)} \\ w_n \end{array} \right\} \text{ signifie } \mathbf{w} = w_{(1)}\mathbf{e}_1 + w_{(2)}\mathbf{e}_2 + w_n\mathbf{e}_n. \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>C'est la donnée d'un repère orthonormal en tout point de la variété, qui de plus varie de manière  $C^2$ .

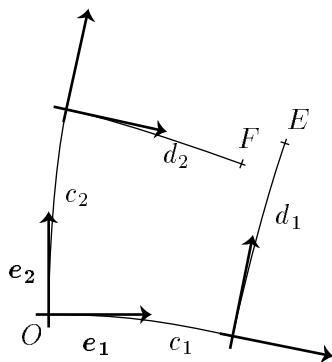


FIG. 1.1 – Justification de la formule de Lie (1.12) avec un repère mobile : si l'on part d'un point  $O$  et que l'on suit les directions  $e_1$  et  $e_2$  d'une même longueur  $\varepsilon$ , l'ordre dans lequel on suit  $e_1$  et  $e_2$  détermine le point d'arrivée. La distance entre les points d'arrivée  $C$  et  $D$  est d'ordre  $\varepsilon^2$ , et dépend des constantes de structure  $\Gamma_{(i)}$ .

On peut définir sur  $M$  une opération de dérivation sur les vecteurs tangents, appelée connexion et désignée par  $\nabla$ . En tant que variété plongée dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $M$  est une variété métrique, et, à ce titre, elle est munie d'une connexion naturelle. La définition de la connexion se fait par la donnée de deux fonctions sur la surface que nous noterons  $\Gamma_{(1)}, \Gamma_{(2)}$ . En effet, le repère  $(e_1, e_2)$  étant orthonormal, il vient :

$$\langle \nabla_{e_i} e_1, e_1 \rangle = \langle \nabla_{e_i} e_2, e_2 \rangle = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \quad (1.5a)$$

$$\langle \nabla_{e_i} e_1, e_2 \rangle = -\langle \nabla_{e_i} e_2, e_1 \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \Gamma_{(i)} \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (1.5b)$$

Les équations de Gauss et de Codazzi-Mainardi s'écrivent alors

$$l_d n_d = \Gamma_{(1),2} - \Gamma_{(2),1} - \Gamma_{(1)}^2 - \Gamma_{(2)}^2 \quad (\text{G.}) \quad (1.6a)$$

$$l_{d,2} = (l_d - n_d) \Gamma_{(1)} \quad \text{et} \quad n_{d,1} = (l_d - n_d) \Gamma_{(2)} \quad (\text{C.-M.}) \quad (1.6b)$$

où les virgules en indice signifient une dérivation le long des vecteurs de la base mobile. La deuxième formule (1.6b) permet de calculer les coefficients de structure  $\Gamma_{(i)}$ . Étant donné un repère mobile adapté, nous pouvons en effet dériver toute fonction scalaire  $f$  définie sur la variété le long des vecteurs du repère : par définition,  $f_{,i} = \nabla_{e_i} f = e_i \cdot \nabla f = e_i \cdot f$ .

Le repère  $(e_1, e_2)$  est mobile. On ne retombe donc pas sur le même point si, en partant d'un point  $O$ , on suit la direction  $e_1$  sur une longueur  $\varepsilon$  puis la direction  $e_2$  pendant encore  $\varepsilon$ , ou si l'on suit l'ordre inverse (cf. fig. 1.1). Cette propriété

est très analogue à celle qui permet de définir la courbure sur une variété de façon intrinsèque ; ce sont alors les géodésiques que l'on doit suivre [73]. Calculons, dans le repère de l'origine  $(O, \mathbf{e}_1(O), \mathbf{e}_2(O))$ , la position des points d'arrivée  $E$  et  $F$ . Sur le chemin  $c_1(t)$ , la tangente est, par définition :  $c'_1(t) = \mathbf{e}_1(c_1(t))$ . Au premier ordre en  $t$ , on a donc :

$$c'_1(t) = \mathbf{e}_1(O + \mathbf{e}_1 t) = \mathbf{e}_1 + (\nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_1) t, \quad (1.7)$$

ce qui, avec la définition (1.5) des constantes de structure donne :

$$c'_1(t) = \mathbf{e}_1 + \Gamma_{(1)} t \mathbf{e}_2. \quad (1.8)$$

En intégrant, on en déduit la position de l'angle inférieur droit sur la figure 1.1 :

$$c_1(\varepsilon) = O + \mathbf{e}_1 \varepsilon + \frac{1}{2} \Gamma_{(1)} \varepsilon^2 \mathbf{e}_2. \quad (1.9)$$

Un calcul analogue pour la portion  $d_1$  donne la position du point  $E$  :

$$E = d_1(\varepsilon) = O + \mathbf{e}_1 \varepsilon + \mathbf{e}_2 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} (\Gamma_{(1)} \mathbf{e}_2 - \Gamma_{(2)} \mathbf{e}_1) - \varepsilon^2 \Gamma_{(1)} \mathbf{e}_1. \quad (1.10a)$$

Pour connaître la position de  $F$ , il suffit de permuter les indices 1 et 2 — ce qui a aussi pour effet de changer le signe de  $\Gamma_{(i)}$  :

$$F = d_2(\varepsilon) = O + \mathbf{e}_2 \varepsilon + \mathbf{e}_1 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} (-\Gamma_{(2)} \mathbf{e}_1 + \Gamma_{(1)} \mathbf{e}_2) + \varepsilon^2 \Gamma_{(2)} \mathbf{e}_2. \quad (1.10b)$$

Le vecteur déplacement entre  $E$  et  $F$  peut maintenant être calculé en prenant la différence des équations (1.10). Cela donne :

$$\mathbf{EF} = \varepsilon^2 (\Gamma_{(1)} \mathbf{e}_1 + \Gamma_{(2)} \mathbf{e}_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (1.11)$$

On voit donc que les constantes de structure  $\Gamma_{(i)}$  traduisent la rotation de la base mobile lorsque l'on se déplace d'un point à un autre.

On sait que la formule des dérivées croisées (Cauchy-Schwartz) pour une fonction scalaire à deux variables,  $f_{,uv} = f_{,vu}$ , traduit le fait que la variation totale de  $f$  sur une petite boucle du plan est nulle. La formule (1.11) permet de généraliser au cas d'un repère mobile cette formule de Cauchy-Schwartz. Comme la boucle définie par les directions  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  n'est plus fermée, les dérivées croisées ne sont pas égales. Elles diffèrent d'une quantité qui se déduit de (1.11) :

$$f_{,12} - f_{,21} = \nabla_{\mathbf{e}_2} \nabla_{\mathbf{e}_1} f - \nabla_{\mathbf{e}_1} \nabla_{\mathbf{e}_2} f = \Gamma_{(1)} f_{,1} + \Gamma_{(2)} f_{,2}. \quad (1.12)$$

Cette formule est appelée formule du crochet de Lie : le crochet de Lie de deux vecteurs tangents  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{w}'$  est le vecteur tangent  $[\mathbf{w}, \mathbf{w}']$  défini par la commutation des dérivées  $\nabla_{[\mathbf{w}, \mathbf{w}']} = \nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}'} - \nabla_{\mathbf{w}'} \nabla_{\mathbf{w}}$ .

## 1.2 L'équation de rigidité

Nous recherchons un champ de déplacement isométrique  $\mathbf{h}$ , défini sur la surface et à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous lui imposons, comme indiqué plus haut, une régularité au moins  $C^3$ . Ce champ peut être défini par ses composantes dans un repère mobile adapté à la variété :

$$\mathbf{h} = \{h_{(1)}, h_{(2)}, h_n\} = h_{(1)} \mathbf{e}_1 + h_{(2)} \mathbf{e}_2 + h_n \mathbf{e}_n. \quad (1.13)$$

La définition (1.5) de l'opérateur de dérivation appliquée à cette expression donne les gradients du champ  $\mathbf{h}$ , vus comme vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  dans la base locale :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{h} &= \left\{ \begin{array}{c} h_{(1),1} - \Gamma_{(1)} h_{(2)} - l_d h_n \\ \Gamma_{(1)} h_{(1)} + h_{(2),1} \\ l_d h_{(1)} + h_{n,1} \end{array} \right\} \\ \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{h} &= \left\{ \begin{array}{c} h_{(1),2} - \Gamma_{(2)} h_{(2)} \\ \Gamma_{(2)} h_{(1)} + h_{(2),2} - n_d h_n \\ n_d h_{(2)} + h_{n,2} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

La condition que le déplacement induit par  $\mathbf{h}$  soit isométrique se traduit par  $\langle d\mathbf{h}(\mathbf{w}), \mathbf{w}' \rangle + \langle \mathbf{w}, d\mathbf{h}(\mathbf{w}') \rangle = 0$  pour tous  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{w}'$  tangents à la variété. Le membre de gauche est en effet l'accroissement au premier ordre<sup>2</sup> en  $\mathbf{h}$  de  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle$  par transport selon  $\mathbf{h}$ . Les espaces tangents subissant par hypothèse un déplacement isométrique, cette dernière condition entraîne [67, p. 255] l'existence d'un vecteur de rotation local  $\Omega(p)$  s'appliquant à l'espace tangent en  $p$ ,  $T_p M$ . On cherchera  $\Omega$  par ses coordonnées dans la base locale :

$$\Omega = \{\Omega_{(1)}, \Omega_{(2)}, \omega\}. \quad (1.15)$$

On peut alors traduire le fait que  $\mathbf{h}$  agit sur  $T_p M$  par rotation selon  $\Omega$  de la manière suivante :

$$\forall \mathbf{w} \in T_p M \quad d\mathbf{h}(\mathbf{w}) = \Omega(p) \wedge \mathbf{w}. \quad (1.16)$$

En prenant  $\mathbf{w} = \mathbf{e}_2$  et en projetant sur  $\mathbf{e}_1$ , on obtient :

$$\langle \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{h}, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \Omega \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle,$$

---

<sup>2</sup>On utilise donc ici l'hypothèse que les déformations sont infinitésimales : si l'on considérait des déformations d'amplitude quelconque, il y aurait le terme supplémentaire, non linéaire en  $\mathbf{h}$  :  $\langle d\mathbf{h}(\mathbf{w}), d\mathbf{h}(\mathbf{w}') \rangle$ .

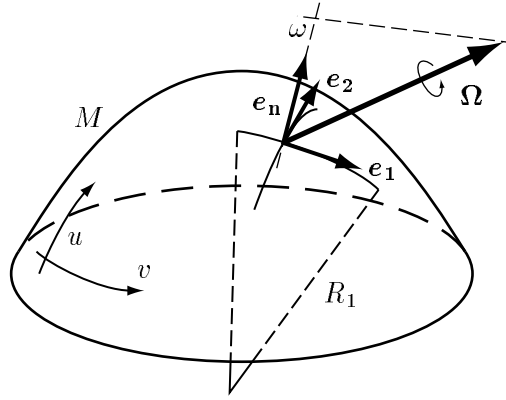


FIG. 1.2 – Notations pour l'étude des déformations isométriques de surfaces. La base locale  $(e_1, e_2, e_n)$  est définie par les directions de courbures principales : la courbure de la surface le long de la direction 1 est  $R_1 = l^{-1}$ . La déformation est donnée par la composante normale,  $\omega$ , du champ de rotation local  $\Omega$ .

soit, en utilisant (1.14) :

$$h_{(1),2} - \Gamma_{(2)} h_{(2)} = -\omega.$$

En projetant de même sur  $e_2$ , et en choisissant aussi  $w = e_1$ , on tire :

$$h_{(1),1} = \Gamma_{(1)} h_{(2)} + l_d h_n, \quad (1.17a)$$

$$h_{(1),2} = \Gamma_{(2)} h_{(2)} - \omega, \quad (1.17b)$$

$$h_{(2),1} = -\Gamma_{(1)} h_{(1)} + \omega, \quad (1.17c)$$

$$h_{(2),2} = -\Gamma_{(2)} h_{(1)} + n_d h_n, \quad (1.17d)$$

et avec  $w = e_n$  :

$$\Omega_{(1)} = -\omega_{,1}/l_d, \quad (1.17e)$$

$$\Omega_{(2)} = -\omega_{,2}/n_d. \quad (1.17f)$$

Dans ce qui suit, on va chercher à déterminer  $\Omega$  plutôt que  $h$ . On éliminera toutes les inconnues sauf  $\omega$ . Pour ce faire, on peut écrire la condition (1.12) de nullité du crochet de Lie pour  $h_{(1)}$  et  $h_{(2)}$ , eux mêmes calculés par (1.17a–1.17d). Ceci conduit à :

$$l_d h_{n,2} = -\omega_{,1} - l_d n_d h_{(2)}, \quad (1.18a)$$

$$n_d h_{n,1} = \omega_{,2} - l_d n_d h_{(1)}. \quad (1.18b)$$



Dans ces deux dernières équations, l'utilisation des formules (1.6) de Gauss et de Codazzi-Mainardi a permis l'élimination des constantes de structure  $\Gamma_{(i)}$ .

### 1.2.1 Régions de courbure non nulle

La courbure de Gauss,  $K$ , qui intervient dans le *Theorema egregium* est définie comme le produit des courbures principales :  $K = l_d n_d$ . Dans une région où  $K$  est non nulle, on peut extraire les dérivées de  $h_n$  du système (1.18) :

$$h_{n,1} = \frac{\omega_{,2}}{n_d} - l_d h_{(1)}, \quad (1.19a)$$

$$h_{n,2} = -\frac{\omega_{,1}}{l_d} - n_d h_{(2)}. \quad (1.19b)$$

Ceci permet d'éliminer  $h_n$  au moyen de la formule du crochet de Lie, que l'on écrit, combinant les équations de Codazzi-Mainardi (1.6) et les équations (1.17a–1.17d) :

$$\left(\frac{\omega_{,1}}{l_d}\right)_{,1} + \left(\frac{\omega_{,2}}{n_d}\right)_{,2} + \Gamma_{(2)} \frac{\omega_{,1}}{l_d} - \Gamma_{(1)} \frac{\omega_{,2}}{n_d} + (l_d + n_d) \omega = 0. \quad (1.20)$$

On est donc conduit à une équation sur  $\omega$  dont les coefficients ne dépendent plus que de grandeurs définies par le plongement de la surface, et non des composantes de  $h$  ou de leurs dérivées (ce qui s'explique par le fait que les coordonnées de  $h$  sont définies modulo des translations, donc les grandeurs  $h_{(1)}$ ,  $h_{(2)}$  et  $h_n$  ne doivent pas intervenir telles quelles *in fine*). Cette équation aux dérivées partielles (ÉDP) sur  $\omega$  est appelée équation de rigidité car ses éventuelles solutions correspondent aux déformations isométriques de la surface, en un sens que l'on va préciser.

Si l'on se donne un système de coordonnées  $(u, v)$  sur la surface, il est possible d'écrire explicitement le repère mobile adapté à la surface en fonction des composantes  $l, m, n$  de la forme de courbure  $II$ . Ceci permet de réécrire l'équation de rigidité (1.20) en coordonnées. On passera sur les détails de l'opération, qui conduit à une ÉDP pour  $\omega$  sur la surface :

$$n \omega_{,uu} - 2m \omega_{,uv} + l \omega_{,vv} + r_{(u)} \omega_{,u} + r_{(v)} \omega_{,v} + s \omega = 0. \quad (1.21)$$

$l(p), m(p), n(p)$  sont les coefficients de la forme de courbure  $II$ , et  $r_{(u)}(p), r_{(v)}(p)$  et  $s(p)$  sont des fonctions qui s'expriment en fonction de  $II, \Gamma_{(1)}, \Gamma_{(2)} \dots$  et de leurs dérivées par des formules assez lourdes que l'on ne donnera pas ici. Il n'y a que  $s$  qui soit déterminé par la relation simple :

$$s(p) = 2H(p)K(p) \det g = (n+l)nl \det g. \quad (1.22)$$

où  $H = \frac{1}{2}(n + l)$  et  $g$  désignent la courbure moyenne et le tenseur métrique respectivement. Les expressions explicites de  $r_{(u)}$  et  $r_{(v)}$  étant trop compliquées pour pouvoir être utilisées, on les déterminera en remarquant que l'on connaît déjà un sous-espace vectoriel de dimension 3 de solutions  $\omega(p)$  de (1.21), correspondant à des déplacements triviaux de la surface sous la forme de rotations ( $\Omega$  est alors constant, donc  $\omega$  est une des composantes de  $e_n$  dans le repère de  $\mathbb{R}^3$ ). Appelons  $E_0$  ce sous-espace vectoriel de solutions triviales.

Notons qu'à partir des équations (1.17e–1.17f), on peut revenir aux composantes du champ de rotation local  $\Omega$  en fonction de  $\omega$  lorsque la surface est munie d'un système de coordonnées et non plus d'un repère orthonormal adapté :

$$\Omega = \frac{-n\omega_{,u} + m\omega_{,v}}{K \det g} \partial_u + \frac{m\omega_{,u} - l\omega_{,v}}{K \det g} \partial_v + \omega e_n. \quad (1.23)$$

On peut comparer l'équation de rigidité (1.21) à celle qui s'obtient directement [67, p. 278–280] en utilisant un repère orthonormal fixe  $(e_x, e_y, e_z)$  de  $\mathbb{R}^3$  :

$$f_{,yy} \varphi_{,xx} - 2 f_{,xy} \varphi_{,xy} + f_{,xx} \varphi_{,yy} = 0. \quad (1.24)$$

Ici,  $\varphi$  désigne la composante verticale, et non normale, du champ de rotation local  $\Omega$ , et la surface est donnée par sa représentation cartésienne  $z = f(x, y)$ . La similitude entre les équations (1.21) et (1.24) est évidente. Le surcroît de travail nécessaire pour déduire (1.21) sera justifié *a posteriori* par les interprétations géométriques que cette équation permettra.

Examinons le type des ÉDP de rigidité (1.21) ou (1.24), qui sont du deuxième ordre. Pour cela, calculons le déterminant de la forme quadratique contenant les coefficients des dérivées du deuxième ordre. On trouve  $K = nl - (-m)^2$  pour la première ÉDP, et  $f_{,yy} f_{,xx} - (-f_{,xy})^2$  pour la seconde. Dans les deux cas, le déterminant a le même signe que la courbure de Gauss  $K$ . L'ÉDP de rigidité est donc du même type que la surface : elliptique sur les portions elliptiques, ou encore convexes, de la surface ( $K > 0$ ), parabolique dans les régions paraboliques ( $K = 0$ ), et hyperboliques dans les régions à courbure de Gauss négative. La rigidité des surfaces convexes compactes peut donc se voir comme une conséquence du principe du maximum pour l'ÉDP de rigidité qui est alors elliptique (la démonstration géométrique est cependant plus générale).

### 1.2.2 Problème inverse

On a montré que l'existence de modes de flexion pure non triviaux implique l'existence de solutions hors de l'espace des déformations rigides,  $E_0$ , pour l'ÉDP (1.21)). Dans la suite, on montre qu'il y a presque équivalence, c'est-à-dire que la recherche

de modes de flexion pure se ramène à la recherche de solutions de (1.21) hors de  $E_0$ . Supposons que l'on connaisse une solution  $\omega$  de (1.21) et cherchons à voir si l'on peut remonter le raisonnement qui précède pour en déduire l'existence d'un champ de déplacement  $h$  respectant la métrique. Par commodité, on utilisera un repère mobile adapté à la variété.

Les équations (1.17e–1.17f) montrent qu'il n'y a qu'un choix possible de  $\Omega$ , connaissant  $\omega$  :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} -\omega_{,1}/l_d \\ -\omega_{,2}/n_d \\ \omega \end{array} \right\}. \quad (1.25)$$

On doit alors trouver des solutions  $h_{(1)}$ ,  $h_{(2)}$ ,  $h_n$  aux ÉDP donnant leur gradients [équations 1.17a–1.17d) liant  $h$  à  $\Omega$ , et (1.19) exprimant la nullité du crochet de Lie sur  $h_{(1)}$  et  $h_{(2)}$ ]:

$$\begin{aligned} h_{(1),1} &= \Gamma_{(1)} h_{(2)} + l_d h_n \\ h_{(1),2} &= \Gamma_{(2)} h_{(2)} - \omega \\ h_{(2),1} &= -\Gamma_{(1)} h_{(1)} + \omega \\ h_{(2),2} &= -\Gamma_{(2)} h_{(1)} + n_d h_n \\ h_{n,1} &= \omega_{,2}/n_d - l_d h_{(1)} \\ h_{n,2} &= -\omega_{,1}/l_d - n_d h_{(2)} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ces ÉDP du premier ordre auront des solutions locales à la condition que les crochets de Lie de  $h_{(1)}$ ,  $h_{(2)}$  et  $h_n$  s'annulent. Or les crochets de  $h_{(1)}$  et de  $h_{(2)}$  s'annulent automatiquement puisque les équations (1.19) font partie du système (1.26). De plus, le crochet de  $h_n$  est nul par hypothèse puisque  $\omega$  est solution de (1.20). Ainsi, d'une solution  $\omega$  de (1.21), on peut toujours trouver un déplacement isométrique *local* qui de plus sera non trivial si  $\omega$  est non trivial (i.e.  $\omega \notin E_0$ ).

On ne pourra s'assurer de l'existence d'un champ de déplacement  $h$  défini sur toute la variété que si l'on vérifie que l'intégrale de (1.26) sur les éléments non triviaux du  $\pi_1(M)$  a bien une valeur nulle. Mais si, par exemple,  $M$  est simplement connexe [ $\pi_1(M)$  est alors trivial], on sera directement assuré de pouvoir remonter de façon bijective de  $\omega$  à une déformation isométrique  $h$ .

### 1.2.3 Raccordement en $K = 0$

Il reste à compléter cette analyse par la discussion des lieux de courbure de Gauss nulle, que l'on a dû exclure au §1.2.1. Envisageons le cas générique où la

courbure de Gauss  $K$  s'annule le long d'une courbe  $\mathcal{C}$ . Les courbes de ce type jouent un rôle fondamental pour le problème de la rigidité des surfaces, comme on va le montrer.

Sur  $\mathcal{C}$ , une des deux valeurs propres de la 2-forme  $II$  s'annule,  $n_d$  par exemple. La grandeur  $\omega$  doit être  $C^2$  au passage de  $\mathcal{C}$  puisqu'elle est une composante du vecteur  $\Omega$ , lui-même  $C^2$  : on s'intéresse aux déformations  $h$  qui sont  $C^3$ , et  $\Omega$  se déduit de  $h$  par une dérivation. Par des arguments similaires,  $\omega_{,1}$  et  $\frac{\omega_{,2}}{n_d}$  doivent être régulières par les relations (1.17e–1.17f), c'est-à-dire que  $\omega$  est  $C^2$  et que  $\omega_{,2}$  doit s'annuler sur la courbe  $\mathcal{C}$  où  $n_d$  s'annule.

Comme  $\frac{\omega_{,2}}{n_d}$  est régulier sur  $\mathcal{C}$ , l'équation (1.19a) valable pour  $K \neq 0$  peut se prolonger partout à condition d'évaluer ensemble  $\omega_{,2}$  et  $n_d$ . Cette équation avait permis de traduire la nullité du crochet sur  $h_n$  et d'en déduire l'ÉDP (1.20) sur  $\omega$ . La nullité du crochet sur  $h_n$  en  $\mathcal{C}$  sera donc automatiquement vérifiée à la limite si l'équation (1.20), ou (1.21), est vérifiée dans les zones où  $K \neq 0$ .

Ainsi, il existe une condition de raccordement sur  $\omega$  à la traversée d'une courbe le long de laquelle  $K = 0$  :  $\omega$  doit être  $C^2$  et la dérivée de  $\omega$  dans la direction asymptotique<sup>3</sup> principale,  $\omega_{,2}$ , doit s'annuler :

$$\text{en } K = 0, \quad \omega \text{ est } C^2 \quad \text{et} \quad (\forall t / II(t, t) = 0) \quad \nabla_t \omega = 0. \quad (1.27)$$

Cette équation de raccordement à la traversée d'une courbe de courbure de Gauss nulle jouera un rôle de tout premier plan dans la suite. D'autre part, on ne rediscutera pas du problème inverse en présence de lignes de courbures nulles : il se traite de la même façon que précédemment.

---

<sup>3</sup>On désigne par direction asymptotique une direction tangente  $w$  le long de laquelle la surface est sans courbure :  $II(w, w) = 0$ . Dans le cas envisagé ici, cette direction est en plus principale, c'est-à-dire qu'elle est un vecteur propre de la forme symétrique  $II$ . Sur une surface hyperbolique ( $K < 0$ , en selle de cheval), les directions  $w$  asymptotiques ( $II(w, w) = 0$ ) ne sont *pas* principales car elles ne définissent pas de vecteurs propres de la forme  $II$ .

## Chapitre 2

# Rigidification par des courbes

On montre dans ce chapitre que la rigidité géométrique d'une surface est déterminée par la présence de courbes dites « rigidifiantes ». Lorsqu'elles sont inscrites sur la surface, de telles courbes suppriment des modes de déformations isométriques de la surface, en partie ou totalement. La première mise en évidence de courbes rigidifiantes a été permise par l'étude due à Cohn-Vossen de la rigidité des surfaces de révolution. Elle est rappelée dans la première partie de ce chapitre. Dans une deuxième partie, on verra que l'approche semi-intrinsèque développée plus haut permet d'étendre les résultats de Cohn-Vossen : on définira les courbes rigidifiantes sur des surfaces quelconques.

### 2.1 Rigidité des surfaces de révolution

L'étude de la rigidité des surfaces de révolution fournit un exemple d'application des résultats précédents : dans l'article reproduit ici, pages 36 à 43, on part de l'équation de rigidité dans sa version intrinsèque (1.21) pour classifier les surfaces de révolution selon leur rigidité isométrique. Cette classification recoupe en de nombreux points les résultats obtenus par Cohn-Vossen [16], qui datent de 1923. Encore une fois, l'approche intrinsèque est inutilement compliquée si l'on se limite aux surfaces de révolution — son intérêt se révélera plus tard, lorsqu'il s'agira de généraliser aux surfaces quelconques. On renvoie donc aux pages 36 à 43 et à la référence [16] pour les détails, et on se contente ici d'énoncer les principaux résultats concernant les surfaces de révolution.

### 2.1.1 Courbes rigidifiant les surfaces de révolution

Pour les surfaces de révolution, on décompose en composantes de Fourier selon la direction orthoradiale  $\theta$  les déformations isométriques  $h$ . Par linéarité, l'équation de rigidité (1.21) se scinde en une famille d'équations linéaires et indépendantes, une pour chaque mode de Fourier  $\omega_q(s)$  de la composante normale du champ de rotation local (la coordonnée  $s$  paramétrise un méridien, cf. la figure p. 36 ; l'indice  $q$  repère le mode de Fourier). Les déformations triviales  $E_0$  (rotations<sup>1</sup> d'ensemble de la surface) correspondent exactement aux modes  $q = 0, 1$ . Ainsi, les modes de déformations isométriques correspondent aux solutions de l'équation (17) p. 37 pour  $q \geq 2$ . Cette équation différentielle ordinaire (ÉDO) est de degré deux, et peut posséder des points singuliers. Elle a pour variable la coordonnée  $s$  le long d'un méridien, la dépendance explicite en  $\theta$  étant éliminée par le recours à la décomposition en modes de Fourier. Le recensement et l'étude détaillée du comportement de  $\omega_q$  au voisinage des points singuliers conduisent à la mise en évidence de deux types de points singuliers *essentiels* :

- les points  $s_a$  correspondants à des cercles parallèles dont le plan tangent est perpendiculaire à l'axe de révolution. On les appelle cercles asymptotiques car leur tangente est dans une direction asymptotique de la surface (qui est rappelons-le, une direction le long de laquelle la surface est de courbure nulle) :
- les pôles  $s_p$ , où la surface rencontre l'axe de révolution (la classe de régularité considérée pour la surface,  $C^3$ , exclut des pôles coniques).

Notons que la définition de ces points singuliers essentiels est indépendante de la valeur du  $q$ . La figure 3 p. 38 montre à quoi correspondent ces points singuliers sur la surface.

Pour les surfaces de révolution telles que l'équation (17) p. 37 n'ait aucun point singulier, le nombre de solutions indépendantes égale le degré de l'équation. L'ÉDO est de degré deux et il y a donc deux modes de déformation isométrique par mode de Fourier  $q$ . C'est par exemple le cas de la surface (a) figure 4 p. 39, qui ne possède ni cercle asymptotique, ni pôle.

L'analyse de l'équation de rigidité au voisinage des points singuliers essentiels montre qu'une solution générique est *singulière* au voisinage de ces points : l'espace des solutions de l'ÉDO qui soient de régularité acceptable au voisinage d'un point singulier (la déformation doit être  $C^3$ ) se réduit à un sous-espace de dimension 1. En présence d'un pôle [(b) sur la figure 4 p. 39] ou d'un cercle asymptotique [(c) sur cette figure], la surface reste déformable mais ne possède plus qu'un mode

---

<sup>1</sup>Les translations n'interviennent pas ici, car on considère le champ de rotation local. Elles apparaissent sous la forme de trois constantes d'intégration lorsque l'on intègre le champ local en déplacement.

de déformation, pour chaque composante de Fourier  $q$ . Lorsqu'il y a deux points singuliers essentiels ou plus, les sous-espaces de solutions de dimension 1 correspondant aux solutions de l'ÉDO régulières au voisinage de chacun des points singuliers ont une intersection en général triviale. La surface de révolution est alors inhibée (voir les courbes de la figure 7 p. 43). En présence de conditions imposées sur les bords, on définit le nombre effectif de bords comme le nombre de bords sans contraintes. La formule (20) p. 39 :

$$e = (\text{Nombre effectif de bords}) - (\text{nombres de cercles asymptotiques}). \quad (2.1)$$

donne une première classification des surfaces de révolution. En effet, si  $e \geq 1$ , il existe  $e$  modes de déformation isométriques par mode de Fourier (et donc la surface est infinitésimalement déformable). Au contraire, si  $e \leq 0$ , la surface est infinitésimalement inhibée (*i.e.* rigide).

### 2.1.2 Modes de déformation exceptionnels

Lorsque la surface présente au moins deux points singuliers, on a utilisé dans les arguments ci-dessus le fait que l'intersection de sous-espaces de dimension 1 est génériquement triviale. Pour certaines surfaces exceptionnelles, il se peut cependant que les solutions régulières au voisinages de deux points singuliers *différents* soient *les mêmes* : alors que le critère précédent laisse penser que la surface est inhibée ( $e = 0$ ), il existe en fait un ou des modes de déformation isométrique. On parle alors de modes de déformation exceptionnels. Cela ne concerne que des surfaces bien particulières, vérifiant une condition de quantification, *et une (des) valeur(s) de  $q$  bien précise(s)*. Pour des exemples de telles surfaces, voir les surfaces de la figure 9 p. 44, choisies parmi une famille de surfaces présentée figure 8 p. 43.

L'existence de modes de déformations exceptionnels soulève une question intéressante : est-il possible de trouver de tels modes sur une surface convexe fermée ? Autrement dit, est-il possible que pour une surface de révolution en forme d'ellipsoïde, et pour une valeur de  $q$  particulière, la solution de l'équation de rigidité qui est régulière à un pôle se trouve aussi être régulière à l'autre pôle ? Les quelques résultats de rigidité que l'on peut établir géométriquement [67] concernent en effet ce type de surface.

On peut en fait donner un argument de type Sturm-Liouville <sup>2</sup> qui restreint les surfaces sur lesquelles on peut trouver des modes de déformation exceptionnels

---

<sup>2</sup>C'est ce type d'argument qui, pour l'équation de Schrödinger, montre que les fonctions propres oscillent de plus en plus dans l'espace lorsque l'énergie augmente.

(cf. [16, §3 et 5] et plus généralement le §3.3.3 p. 42). Les surfaces convexes compactes font, et c'est heureux pour la cohérence du tout, partie de ces surfaces qui ne peuvent posséder de modes de déformation exceptionnels.

## 2.2 Interprétation de la rigidification et généralisation

La classification des surfaces de révolution repose, on l'a vu, sur la formule (2.1) : la valeur de  $e$  régit, au moins dans un sens générique, la rigidité d'une surface. Ce nombre  $e$  fait intervenir d'une part le nombre de bords de la surface, et d'autre part le nombre de cercles asymptotiques. Les pôles, points singuliers essentiels de l'équation de rigidité, ont été intégrés dans l'équation *via* le nombre de bords. S'il est relativement naturel que le nombre de bords libres intervienne dans la rigidité de la surface (une surface fermée sur elle-même étant intuitivement plus rigide qu'une surface avec des bords libres), le rôle singulier joué par les cercles asymptotiques peut intriguer. On a cherché à le comprendre géométriquement. L'enjeu réside dans la généralisation aux surfaces qui ne sont pas de révolution : la rigidification par les cercles asymptotiques provient-elle uniquement de la symétrie de révolution, ou existe-t-il au contraire des courbes rigidifiant les surfaces plus générales ?

### 2.2.1 Interprétation par les conditions de raccordement

Remarquons tout d'abord que les cercles asymptotiques sont des lieux de courbure de Gauss  $K$  nulle. Par symétrie, les directions de courbure principales sur une surface de révolution sont en effet confondues avec les tangentes aux méridien et parallèle locaux. Or sur un cercle asymptotique, la courbure de la surface dans la direction orthoradiale (selon la tangente au parallèle local) s'annule. Ainsi, la tangente au cercle asymptotique est à la fois direction asymptotique et direction de courbure principale.

Le formalisme semi-intrinsèque utilisé au début de ce chapitre se révèle maintenant très utile. Pour écrire l'équation de rigidité, on a en effet été amené à considérer séparément les régions à  $K = 0$ , au §1.2.3. On y a établi que, de part et d'autre d'une ligne de courbure nulle, une condition de raccordement (1.27) doit être vérifiée pour garantir la régularité des déformations. Cette condition stipule que le gradient de la composante normale  $\omega$  du champ de rotation local le long de la direction asymptotique doit s'annuler :  $\omega_{,2} = 0$  si  $e_2$  désigne la direction asymptotique. Or la tangente aux cercles asymptotiques est confondue avec la direction asymptotique (d'où le nom donné à ces cercles). Le long d'un cercle asymptotique, la condition (1.27) impose donc la nullité du gradient de  $\omega$  selon la tangente, c'est-à-dire que  $\omega$  *doit être constant*.



Si l'on intègre le champ de rotation en déplacement  $h$  au moyen des formules (1.16) et (1.23), la constance de  $\omega$  sur le cercle asymptotique se traduit par le fait que la déformation de la surface doit s'y faire parallèlement à l'axe de révolution — modulo bien sûr une rotation d'ensemble de la surface. C'est effectivement ce que l'on peut constater sur la figure 9 p. 44. À l'opposé, les déformations d'une courbe générique sur une surface inextensible peuvent être quelconques (si ce n'est, bien sûr, que la courbe doit conserver sa longueur). Plus précisément, la déformation isométrique d'une surface avec déformation (isométrique) imposée le long d'une courbe est *génériquement* un problème de Cauchy bien posé pour l'équation de rigidité.

Au voisinage d'un cercle asymptotique sur une surface de révolution, la condition auxiliaire de raccordement (1.27) joue donc comme une contrainte supplémentaire sur les déformations. Ce qui rend cette condition contraignante est que le cercle asymptotique possède une tangente qui est à la fois direction asymptotique *et* principale. Avant de généraliser cette analyse aux courbes rigidifiantes sur des surfaces quelconques, on présente un deuxième argument géométrique expliquant la rigidification par les cercles asymptotiques.

### 2.2.2 Interprétation géométrique

Cet argument est présenté en détail dans l'article, pages 43 à 46. Aussi se contentera-t-on d'en indiquer les principaux éléments.

La courbure d'une courbe inscrite se décompose en deux contributions : l'une, normale à la surface, est due à la courbure de la surface dans la direction tangente à la courbe, et s'écrit  $II(t, t) e_n$ , où  $t$  désigne un vecteur tangent unitaire. L'autre, dans le plan tangent à la surface, est due à la courbure de la courbe *sur* la surface, et s'appelle courbure intrinsèque. On l'écrit  $\kappa_i \bar{t}$ , où  $\bar{t}$  est une normale unitaire à  $t$  dans le plan tangent. Pour une courbe inscrite sur une surface, la courbure vaut donc :

$$\kappa = II(t, t) e_n + \kappa_i \bar{t}. \quad (2.2)$$

La courbure  $\kappa_i$  est intrinsèque dans le sens où elle est invariante par déformation isométrique de la surface. Elle s'annule par définition pour une courbe géodésique. Les cercles asymptotiques ont pour particularité d'avoir leur tangente dans une direction asymptotique de la surface :  $II(t, t) = 0$ . La seule contribution à la courbure des cercles asymptotiques (comme courbes de  $\mathbb{R}^3$ ) est donc leur courbure intrinsèque, dans le plan tangent. Si maintenant la surface subit une déformation isométrique, cette courbure intrinsèque  $\kappa_i$  est conservé, et la contribution normale à la courbure  $II(t, t)$  acquiert, elle, des valeurs éventuellement non nulles. La courbure

des cercles asymptotiques ne peut donc qu'augmenter au cours d'une déformation isométrique de la surface.

Comme, d'autre part, les cercles asymptotiques sont des courbes planes au repos, il se trouve qu'au premier ordre dans les déformations, un cercle asymptotique déformé,  $\mathcal{C}$ , a la même courbure que son projeté dans son plan de repos,  $\mathcal{C}_p$  (voir la figure 10 p. 45). L'argument du paragraphe précédent s'étend donc à  $\mathcal{C}_p$  : la projection du cercle asymptotique dans son plan d'origine est, au cours d'une déformation isométrique de la surface, minimale au repos. Mais  $\mathcal{C}_p$  est aussi une courbe plane, fermée et convexe. Par conséquent, l'intégrale de sa courbure ne saurait valoir autre chose que  $2\pi$ . Si, comme on l'a vu, la courbure de  $\mathcal{C}_p$  ne peut qu'augmenter en tout point au cours d'une déformation de la surface inextensible, elle doit en fait rester constante pour que l'intégrale se conserve. Conclusion :  $\mathcal{C}_p$  est une courbe rigide, c'est-à-dire que le cercle asymptotique est contraint de se déplacer normalement à son plan de repos au premier ordre dans les déformations. On arrive à la même conclusion qu'au paragraphe précédent.

### 2.2.3 Les courbes rigidifiantes pour des surfaces quelconques

La rigidité apportée par les cercles asymptotiques a été interprétée de deux manières différentes. En reprenant ces démonstrations, on s'aperçoit que les résultats établis ne s'appliquent pas qu'aux courbes asymptotiques :

- au paragraphe §2.2.1, on a montré que toute courbe dont la tangente est partout une direction principale asymptotique est contrainte par la géométrie à se déformer de telle sorte que  $\omega$ , la composante normale du champ de rotation local, soit uniforme le long de la courbe. Appelons A cette classe de courbes. Dans le cas particulier où une courbe de A est plane au repos, la constance de  $\omega$  implique que la courbe se déforme normalement à son plan tangent, au premier ordre en les déformations ;
- au paragraphe §2.2.2, un autre raisonnement a montré que toute courbe plane, asymptotique, et strictement convexe inscrite sur la surface ne peut se déformer que normalement à son plan de repos. Soit B cette autre classe de courbes.

La rigidification d'une surface de révolution par les cercles asymptotiques peut se comprendre par le fait que, pour des raisons purement *géométriques*, ces courbes ne peuvent pas se déformer de façon quelconque <sup>3</sup>, et contraignent donc les déformations de la surface dans leur voisinage. On est maintenant en mesure de généraliser aux surfaces qui ne sont pas de révolution : les courbes des classes A et

---

<sup>3</sup>Rappelons qu'une courbe générique sur une surface inextensible peut se déformer de façon quelconque : imposer la déformation de la courbe conduit à un problème de Cauchy bien posé ; imposer la valeur de  $\omega$  conduit à un problème de Cauchy *sous-déterminé*.

B pourront être appelées rigidifiantes car elles possèdent cette même propriété de contraindre singulièrement les déformations de la surface en leur voisinage.

Avant de discuter de façon plus précise cette propriété, caractérisons mieux les deux classes de courbes rigidifiantes mises à jour. Ces deux classes sont distinctes, et plus précisément, la classe A inclut B ( $A \supset B$ ). En effet, par le théorème de Beltrami–Enneper [67, p. 291], une courbe asymptotique et de torsion nulle (par exemple, une courbe plane) se trouve nécessairement dans une région de courbure de Gauss nulle, c'est-à-dire que la direction asymptotique est aussi direction de courbure principale. Ainsi, la première démonstration est plus forte, car elle concerne une plus large classe de courbes. Si on a aussi choisi de parler de la classe B, moins générale, c'est que la contrainte d'une déformation normale au plan de repos est plus facile à se représenter que celle d'un  $\omega$  constant.

Donnons un exemple de courbe rigidifiante sur une surface qui n'est pas de révolution : considérons une surface ressemblant au tore déchiré (d) sur la figure 7 p. 43 mais qui ne soit plus de révolution ; remplaçons-y les deux cercles asymptotiques par deux courbes de la classe A ou B (on obtient, par exemple, deux courbes de type B si l'on étire le tore de révolution dans une direction perpendiculaire à l'axe de révolution). Ces deux courbes délimitent maintenant une portion de surface hyperbolique (la partie « intérieure » du tore, qui a la topologie d'un morceau de cylindre), où l'ÉDP du deuxième ordre pour les déformations est elle-même hyperbolique [67, p. 279]. Or, pour cette ÉDP, la propriété de déformation normale des deux courbes de type B apparaît comme une condition aux limites à vérifier sur *les deux bords* de la région hyperbolique. Le problème des déformations infinitésimales apparaît donc sur-déterminé : le pseudo-tore est rendu rigide par ces deux courbes. Les courbes que l'on a introduites généralisent donc bien la notion de rigidification aux surfaces qui ne sont pas de révolution.

Les surfaces possédant une courbe rigidifiantes sont très particulières : la direction asymptotique sur une ligne de courbure nulle n'est pas, en général, tangente à cette courbe. Par conséquent, une surface n'inclut pas, génériquement, de courbe rigidifiante. L'importance des surfaces rigidifiées n'en est pas diminuée (voir plus bas).

## 2.3 Conclusion et perspectives

Sur une surface de révolution, Cohn-Vossen [16] a mis en évidence des courbes aux propriétés rigidifiantes, les cercles asymptotiques. On s'est attaché à expliquer géométriquement cette rigidification, afin d'étendre la notion de courbes rigidifiantes aux surfaces qui ne sont pas nécessairement de révolution. On a montré

que, sur les surfaces de type mixte <sup>4</sup>, la courbe de courbure de Gauss nulle entre les régions hyperbolique et parabolique rigidifie la surface lorsque la tangente à cette courbe est partout confondue avec la direction asymptotique. Cette classe comprend en particulier les cercles asymptotiques de Cohn-Vossen. Cette rigidification par les régions « plates » de la surface (à courbure de Gauss  $K$  nulle) rappelle un autre type de rigidification, due aux replats (pôles d'ordre élevé ou infini [63][8.5.3]).

Nous pensons que ce résultat saura trouver des applications en élasticité des coques. On peut par exemple penser à la fabrication de structures résistantes et légères : la minceur de la coque garantit la légèreté mais ne peut empêcher les déformations isométriques. Celles-ci pourraient être inhibées par l'adjonction de courbes rigidifiantes dans le choix du profil de la coque. Cependant, le passage de la géométrie à l'élasticité n'est peut-être pas aussi simple qu'il n'y paraît — voir par exemple la question de la sensibilité par rapport aux données [43, 44].

---

<sup>4</sup>C'est-à-dire possédant une partie hyperbolique et elliptique.

## **Chapitre 3**

**Extrait du livre [8]**

**« Elasticity and Geometry »**



## Geometric Rigidity of Curved Elastic Shells

**B Audoly**

Laboratoire de Physique Statistique de l'École Normale Supérieure, associé au CNRS,  
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.

**Abstract.** In this paper, the elasticity of thin shells is studied from a purely geometrical point of view. A question of geometrical nature, the so-called isometric rigidity, is addressed: in the flat 3D space, can a given curved surface be deformed smoothly if it is not allowed to stretch? When solving any elasticity problem involving a thin shell, like the calculation of its vibration spectrum or the study of its mechanical resistance, the first step invariably consists in addressing the geometric rigidity of its mean surface. The laws of elasticity (embodied in the Föppl-Von Kármán equations generalised to curved shells, for example) are only used in a second step.

We first study the isometric rigidity problem in the case of surfaces of revolution: a criterion for the existence of infinitesimal isometric deformations is stated. With respect to this criterion, exceptional modes of deformation described by a quantisation condition are discussed. Furthermore, special curves drawn on a surface of revolution, called “a-curves”, are shown to rigidify the whole surface. Once a geometrical interpretation of this additional rigidity has been found, generalisation is straightforward: rigidifying curves on generic curved surfaces are identified, and a criterion for the isometric rigidity of a generic shell is proposed. The applications of these results to the elasticity of curved shells are discussed.

PACS numbers: 62.20.Dc, 62.30.+d, 43.40.+s, 46.40.-f

AMS classification scheme numbers: 73K15, 73D30, 53Z05, 53A05

*Geometric Rigidity of Shells***1. Introduction**

An elastic shell is a piece of elastic material of thickness small compared to its other dimensions. A plate is a flat shell, like a piece of paper or of transparency. For sake of simplicity, we will consider shells made of a homogeneous material with uniform thickness, but the results presented here are not changed if the material is not strictly homogeneous or if the thickness not strictly constant. A typical value of the thickness should then be used instead of the thickness  $h$ .

Let us first establish a connection between the *elasticity* of thin shells and the purely *geometric* problem: in the flat 3D space, are there any smooth deformations of a given surface keeping it unstretched, *i. e.* in which distances along it are conserved? Deformations satisfying this constraint are also called isometric, flexural, pure bending, or inextensional. Following Spivak [1, chap. 12], we call this problem the isometric rigidity problem, or simply the rigidity problem.

*1.1. Vibration of shells*

In 1877, Rayleigh wrote, in his study of the vibrations of shells [2, §235 b]: [*a*] deformation [of a thin elastic shell of thickness  $h$ ] includes, in general, both stretching and bending, and any expression for the [elastic] energy will be of the form:

$$Ah(\text{extension})^2 + Bh^3(\text{bending})^2. \quad (1)$$

*This energy is to be as small as possible. Hence, when the thickness is diminished without limit, the actual displacement will be of pure bending, if such there be...* The isometric rigidity problem is hereby mentioned as fundamental for the elasticity of shells. This is because the bending contribution, in comparison to the stretching one, comes with additional small factor  $(h/L)^2$  in the elastic energy (1) — we have restored the typical size of the plate,  $L$ , which is hidden in (1).

In his study of the vibration of shells, “extensional” modes of deformations are distinguished from purely “flexural” ones, each type of vibration being studied separately: flexural deformations give rise to bending energy only; extensional ones can contrarily be studied by neglecting the bending terms in the elastic energy (so that flexural modes, when they exist, are recovered as zero energy modes among extensional vibrations).

The fact that vibrations are studied is not crucial, and the same approximations apply to a wide class of elasticity problem concerned with thin shells: calculation of buckling modes under compression, study of crumpling... Any such problem should thus be approached by first addressing the geometric rigidity of the mean surface, in order to investigate the existence of flexural deformations, and eventually to distinguish them from extensional ones. Elasticity equations, like the Föppl-Von Kármán equations generalised to shells, may come only thereafter, with the appropriate approximations. If the first step is skipped, and both bending and stretching terms are retained, the elasticity equations for curved shells are difficult to handle.

Moreover, the rigidity problem is not only useful for simplifying the calculations, but it has physical consequences. The two types of vibrations can indeed be distinguished on a resonance spectrum: Rayleigh argues that extensional deformations yield vibration frequencies independent of  $h$ , while the ones related to pure bending displacements are low-frequency and scale as  $h$ . By investigating the isometric rigidity of the shell, one is thus able to account for the presence (or the absence) of low energy modes in this spectrum [3]. Only for the simple shell geometries studied by Rayleigh



### Geometric Rigidity of Shells

(plates, cylinders...) is the rigidity problem easily solved: for arbitrary shapes of shells, no general answer to that problem is known so far.

#### 1.2. Crumpling and resistance to deformation

Recently, the two types of singularities in a crumpled plate have been studied: these are d-cones (point-singularities) and ridges (line-singularities), studied by Ben Amar and Pomeau [4], and by Lobkovsky [5]. For plates of small but finite thickness, the geometric singularities of the surface at the tip of a cone or along a line fold is smoothed at a scale depending on the thickness of the sheet. The elastic energy associated with these singularities scales with the thickness  $h$  as:

$$\begin{aligned} E_{el} &\sim Yh^3 \log\left(\frac{\text{size of the plate}}{h}\right) \quad \text{for the tip of the d-cone,} \\ E_{el} &\sim Yh^3 \left(\frac{\text{ridge length}}{h}\right)^{1/3} \quad \text{for a ridge,} \end{aligned} \tag{2}$$

where  $Y$  is the Young's modulus of the material, with the physical dimension of an energy per unit volume. Using Rayleigh's scaling (1), it appears that the contributions to the elastic energy fall into four classes which, in the limit of small thickness  $h$ , are separated by orders of magnitude. These are, listed in order of increasing magnitude: the contribution of smoothly and isometrically deformed regions, then of tips of d-cones, then of ridges, and, finally, of macroscopic regions undergoing extension.

If a thin shell submitted to certain boundary conditions is *not isometrically rigid*, one of the corresponding smooth and isometric deformations of the shell will be reached at equilibrium, since it is the lowest energy configuration<sup>‡</sup>: the shell will deform smoothly, at least for not too large deformations<sup>§</sup>. Moreover, these shells are weak, *i. e.* relatively small forces can generate large deformations.

On the other hand, let us consider the case of an *isometrically rigid* shell. It has no possibility to deform in both a smooth and inextensional manner. For shells of finite thickness, and for applied forces smaller than a critical force, the shell will deform smoothly but not isometrically. Above the critical force, the deformation of the shells is accompanied by the appearance of singularities at which the yield limit of the material is likely to be exceeded; the shell deforms isometrically except in the vicinity of these singularities [6]. A typical configuration of the shell in the deformed state is then made of regions undergoing mirror symmetry bounded by singularities [7].

In the limit of small thickness  $h$ , the deformation of an isometrically rigid shell becomes negligible in the first regime; moreover, the formation of singularities requires much more energy, by (2), than is needed to deform isometrically bendable shells. Isometric rigidity of shells thus implies rigidity in the usual sense, *i. e.* a great resistance to deformations.

For example, an egg squeezed between hands along its long axis displays an impressive resistance to breaking, and doesn't even appreciably deform until it breaks;

<sup>‡</sup>

For real elongated shells, however, this rule suffers exceptions: on a large plate of small but finite thickness, a d-cone singularity can be preferable to pure bending over a large region. A long cylinder for example, when squeezed on a cross-section, could deform in an isometric manner by adopting a constant cross-section. This involves appreciable bending over a large area, and d-cone singularities are preferred instead.

<sup>§</sup>

For large deformations, the shell can become isometrically rigid: crumpling would then occur beyond a critical value of the deformation.

### *Geometric Rigidity of Shells*

this can be accounted for by the shape of the egg shell, which, as we will see, is isometrically rigid. Flat shells (*i. e.* plates) of comparable thickness and Young's modulus are never as resistant (a piece of a plane is *not* isometrically rigid); moreover, appreciable smooth deformations of flat shells can be achieved before singularities appear during their crumpling, as can be seen with a piece of paper.

#### *1.3. The rigidity problem and the elasticity of shells*

From these examples, it can be seen that isometric rigidity is a central issue in the elasticity of thin shells: the vibration spectra of isometrically rigid shells differ qualitatively from the ones of non-rigid shells, as do the crumpling properties and the resistance to deformations (buckling thresholds). Geometry could be an efficient tool for studying the elasticity of thin shells: see for example reference [15] for the isometric rigidity problem applied to the study of crumpled flat shells.

In very few situations general results allow to predict if such isometric deformations of the shell exist, especially when the shell is submitted to boundary conditions [1]. It is common experience that a flat piece of paper can be bent into a cone or a cylinder... but can we bend a curved shell? In the following, we address the rigidity problem: we seek a characterisation of surfaces featuring isometric rigidity from those that are free to deform.

In higher dimensions the isometric rigidity problem is generically solved by a theorem first proved by Killing [9]: in  $\mathbb{R}^d$ , with  $d \geq 4$ , an hypersurface is isometrically rigid. More accurately, this holds under the assumption that the hypersurface has a curvature of rank at least 3 everywhere, *i. e.* that it is curved enough; this condition is generically satisfied by an arbitrary surface in  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 4$ . In lower dimensions, hypersurfaces are curves ( $d = 2$ ) or points ( $d = 1$ ), which are obviously not isometrically rigid. The dimension  $d = 3$ , which we study in this paper, is thus the most interesting one for the rigidity problem: as we shall see below, some surfaces in  $\mathbb{R}^3$  are rigid while some other ones are not.

Let us define more accurately the rigidity we are dealing with. A distinction has indeed been introduced [1, chap. 12] among different types of isometric deformations: *infinitesimal* isometric deformations, the determination of which lead to the infinitesimal rigidity problem; *bendings*, defined as a continuous family of isometric deformations; *discrete* isometric deformations, leading to the “warpability” problem (mirror symmetry is a trivial example). A discrete deformation yields a double well of the elastic potential in configuration space. We will instead focus on the degeneracy of the rest configuration of shells of vanishing thickness: we will discard discrete deformations and investigate only infinitesimal isometric deformations and bendings. There will thus be no ambiguity in renaming the latter “isometric deformations”.

Infinitesimal rigidity (with respect to continuous deformations) is “generally” stronger than the (non-infinitesimal) rigidity: a non trivial continuous isometric deformation indeed generally [1, p. V.258] yields a non-trivial infinitesimal deformation.

#### *1.4. Outline of the article*

In section 2, the rigidity problem is transformed into a fully nonlinear partial differential equation (PDE) on the undeformed surface. Its linearised version is compared to a known equation for infinitesimal rigidity. An intrinsic version of the

### *Geometric Rigidity of Shells*

latter is presented. We also study the inverse problem, *i. e.* the circumstances under which a solution of the linear PDE yields a non-trivial infinitesimal deformation of the unstretchable surface.

Then, in section 3, we specify the shell to be one of revolution. The linearised PDE becomes a linear ordinary differential equation (ODE) for every mode along the orthoradial direction. Solutions corresponding to rigid-body motions are identified and discarded. Modes of isometric deformations are shown to be suppressed by singular points in the linear ODE. This leads to the identification of rigidifying curves (a-curves) on the surface, which are described.

A quantisation condition is then stated, which corresponds to exceptional modes of isometric deformation. Using a method similar to the Sturm comparison theorem, we prove that those exceptional degrees of freedom are absent when the surface is convex. This ensures consistency with known results about the rigidity of convex surfaces.

Finally, in section 4, we present a geometrical interpretation of the additional rigidity brought about by a-curves. The generalisation is straightforward, and the existence of rigidifying curves on generic curved surfaces is demonstrated. This appears to have been unnoticed before and their important role in the behaviour of the full elastic shell is pointed out.

## **2. Putting the rigidity problem in equations**

When a shell is curved at rest, there exists no general result about isometric rigidity, even without boundary conditions. The *theorem egregium*, of course, imposes a condition on isometric deformations, but it does not predict *a priori* if such deformations exist or not. Some known particular results can be found in reference [1, p. V.273]. They essentially apply to flat surfaces, as explained before, and to convex surfaces: for instance, a compact convex shell is rigid (*i. e.* admits no isometric deformations). A sphere with a hole, though, is not compact, and it is not rigid [1, 3], as we shall be able to prove later, in §3.2.2. Also, Alexandrov [10] and Nirenberg [11] have extended the rigidity of closed convex surfaces to a class of surfaces of positive genus, characterized by the fact that the integral of the Gaussian curvature over the convex part of the surface is  $4\pi$ .

Let us note that smooth isometric deformations are to be sought (by smooth deformations, we mean at least  $C^3$ ). As discussed in §1.2, these are the ones with the lowest elastic energy, if they are possible. Below, we will thus restrict our investigations to smooth isometric deformations.

In this part, we first present an equation for the rigidity of an unstretchable shell, which generalises a known equation for the *infinitesimal* rigidity to finite deformations. We then present a more intrinsic version of the equation for the infinitesimal rigidity, which will be used in the following.

### *2.1. An exact equation for rigidity*

Let us derive the exact equation describing the rigidity of a shell, which turns out to be a nonlinear PDE. Once linearised, it will be identified with an already known equation for the infinitesimal rigidity of a shell.

For a shell of Cartesian parametrisation  $z = f(x, y)$  at rest, the existence of isometric deformations can be put into exact (*i. e.* not linearised) equations in the

*Geometric Rigidity of Shells*

following way: let  $(b(x, y), c(x, y), d(x, y))$  be the displacement vector at the point  $(x, y, f(x, y))$ . The deformed shape is thus parametrised by

$$(x, y) \mapsto \mathbf{r}'(x, y) = (x + b(x, y), y + c(x, y), f(x, y) + d(x, y)). \quad (3)$$

Isometry is expressed by conservation of the three independent components of the metric tensor:  $\Delta g_{uv} = 0$  for  $(uv) = (xx), (xy)$  and  $(yy)$ . This yields, with  $\Delta g_{uv} = \langle \partial_u \mathbf{r}', \partial_v \mathbf{r}' \rangle - \langle \partial_u \mathbf{r}, \partial_v \mathbf{r} \rangle$ , using subscripts after a function name for partial derivatives:

$$\begin{aligned} (xx) b_x^2 + 2b_x c_x + c_x^2 + 2f_x d_x + d_x^2 &= 0 \\ (xy) b_y + c_x + b_x b_y + c_x c_y + f_x d_y + f_y d_x + d_x d_y &= 0 \\ (yy) b_y^2 + c_y^2 + 2c_y + 2f_y d_y + d_y^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Introducing the auxiliary functions  $R^w$  and  $U$ :

$$R^w = R^w(f_w, d_w) = \sqrt{1 - 2f_w d_w - d_w^2} \quad (w = x \text{ or } y) \quad (5a)$$

$$U = U(d_x, d_y, f_x, f_y) = -\frac{f_x d_y + f_y d_x + d_x d_y}{R^x R^y}, \quad (5b)$$

one can eliminate  $b$  and  $c$  and rewrite the isometry conditions (4) as a single nonlinear third order PDE in the vertical displacement  $d$  (see [14] for detailed calculations):

$$\begin{aligned} (1 - U^2)U_{xy} + UU_x U_y + ((1 - U^2) \partial_x + UU_x) \frac{U \partial_y R^x - \partial_x R^y}{R^x} \\ + ((1 - U^2) \partial_y + UU_y) \frac{U \partial_x R^y - \partial_y R^x}{R^y} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

This nonlinear PDE for *finite* isometric deformations has apparently never been mentioned before in the literature.

For small displacements, equation (6) linearises into a 2<sup>nd</sup> order (linear) PDE:

$$f_y^2 d_{x^2} - 2f_{xy} d_{xy} + f_x^2 d_{y^2} = 0, \quad (7)$$

as derived by Spivak. This linear PDE is of the same kind as the surface, *i. e.* it is hyperbolic wherever the Gaussian curvature  $K > 0$ , parabolic wherever  $K = 0$ , and elliptic for  $K < 0$  [1, p. V.279].

This equation formally looks like a stationary principle for the Gaussian curvature  $K \sim f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$  which is indeed conserved when  $f$  is changed to  $f + d$ ; however, a denominator has been omitted in the latter formula for  $K$ , and horizontal displacements are hidden in equation (7), so that the identification is not strictly correct. The rigid-body motions are recovered from solutions of the form  $f = Ax + By + C$ , with  $A, B, C$  arbitrary constants.

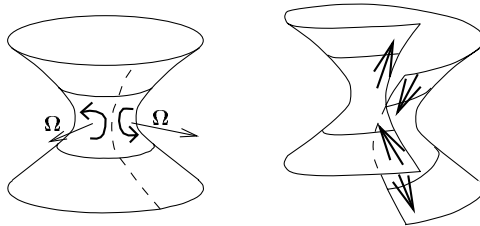
## 2.2. Intrinsic equation of rigidity

*2.2.1. Derivation of the equation* An intrinsic derivation of the equation for isometric deformations can be sought, in order to handle surfaces without uniform Cartesian parametrisation for example. This formulation of the rigidity problem will turn out to be very convenient later in our investigations.

Let  $(u, v)$  be a system of coordinates on the surface and  $l, m$ , and  $n$  be the entries of the curvature 2-form  $\Pi$ :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi(\partial_u, \partial_u) & \Pi(\partial_u, \partial_v) \\ \Pi(\partial_u, \partial_v) & \Pi(\partial_v, \partial_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}. \quad (8)$$

*Geometric Rigidity of Shells*



**Figure 1.** Weierstrass transformation of a catenoid ( $\mathbf{\Omega} = e_n$ ). The catenoid needs to be cut to make it a simply connected surface (left); the deformed catenoid has been represented on the right.

The deformation of the surface being isometric, every tangent plane  $T_p S$  of the shell  $S$  at a point  $p$  will experience a rotation with rotation vector  $\mathbf{\Omega}(p)$ . Let  $\omega(p)$  be the normal component of  $\mathbf{\Omega}$ :  $\omega = \langle \mathbf{\Omega}, e_n \rangle$ . The conservation of the distances to first order in the displacement can be expressed [14] as an equation in  $\omega$ :

$$n\omega_{uu} - 2m\omega_{uv} + l\omega_{vv} + r_{(u)}\omega_u + r_{(v)}\omega_v + r_{(0)}\omega = 0. \quad (9)$$

This equation is very reminiscent of equation (7) although not the same quantities are involved. The three functions  $r_{(u)}$ ,  $r_{(v)}$  and  $r_{(0)}$  can be expressed in terms of the local properties of the surface ( $l, m, n$  and their derivatives...), but they can be calculated more easily by imposing the condition that rigid-body deformations be solutions of the PDE. These rigid-body deformations, which correspond to constant  $\mathbf{\Omega}$ , are spanned by three independent rotations. Remarkably enough, there is a simple expression for  $r_{(0)}$ :

$$r_{(0)} = 2H(p)K(p) \det g, \quad (10)$$

where  $H$ ,  $K$ ,  $g$  are respectively the mean curvature, the Gaussian curvature and the metric tensor on the surface.

The local rotation vector  $\mathbf{\Omega}$  can be recovered in terms of its normal component  $\omega$  and its gradient [14]:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{-n\omega_u + m\omega_v}{K \det g} \partial_u + \frac{m\omega_u - l\omega_v}{K \det g} \partial_v + \omega e_n, \quad (11)$$

so that from a solution of (9), a vector field  $\mathbf{\Omega}$  for the *local* isometric infinitesimal displacements can be derived. As usual for PDE's on manifolds, however, the existence of a *global* displacement field can be derived only provided the shell is simply connected: the interpretation of a solution  $\omega$  of (9) as an infinitesimal isometric deformation is generally not possible on a not simply connected shell (see figure 1 for example).

**2.2.2. Minimal surfaces** The case of minimal surfaces is of special interest: from (10),  $r_{(0)}$  vanishes when  $H = 0$ , so that  $\omega \equiv 1$  is solution of (9). This does not correspond to trivial rigid-body deformations since  $\mathbf{\Omega}$ , given by equation (11) reads  $\mathbf{\Omega} = e_n$  which is not constant—except for a plane. This is the Weierstrass isometric deformation of minimal surfaces [12]; in the case of a catenoid, this deformation indeed requires the catenoid to be cut along a line to make it a simply-connected surface before deformation into a helicoid is possible (figure 1).

## Geometric Rigidity of Shells

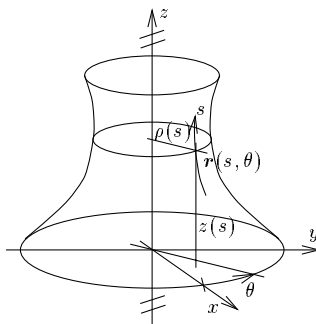


Figure 2. Parametrisation of a surface of revolution.

*2.2.3. Smoothness conditions* The smoothness conditions for  $\omega$  play an important role in the following. Continuity of  $\Omega$  as given by equation (11) imposes that  $\omega$  should be continuous with continuous first derivatives. The denominator ( $K \det g$ ) shows that the smoothness of  $\Omega$  is not guaranteed at singular points of the parametrisation  $(u, v)$  and at points of vanishing Gaussian curvature  $K$ .

Actually, at points of vanishing Gaussian curvature, the equation (9) is not valid, and the local behaviour of  $\omega$  must be studied in detail. The smoothness condition for  $\omega$  across a line of vanishing Gaussian curvature can be worked out [14]: on this line, the gradient of  $\omega$  in the direction of zero principal curvature has to vanish in order to keep  $\Omega$  in equation (11) smooth.

$$\text{Wherever } K(p) = 0, \quad (\forall \mathbf{z}_p \in T_p S / H(\mathbf{z}_p, \mathbf{z}_p) = 0) \quad \nabla_{\mathbf{z}_p} \omega = 0. \quad (12)$$

Let us emphasise that  $\mathbf{z}_p$  is defined by the asymptotic direction at  $p$ , not by the direction of the tangent to the curve of vanishing Gaussian curvature. Integration of (12) is thus not possible and  $\omega$  is generally not constant along this curve.

### 3. Rigidity of surfaces of revolution

In this section, we study more specifically the isometric rigidity of surfaces of revolution: we complete a classification of these surfaces according to their rigidity initiated by Cohn-Vossen [8]. We also put in evidence curves that rigidify the shells of revolution.

#### 3.1. Equation of rigidity

*3.1.1. Derivation of the equation* We can specify the previous intrinsic equations of rigidity in the case of a surface of revolution given at rest by its normal parametrisation (see figure 2):

$$\mathbf{r}(s, \theta) = \rho(s)(\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) + z(s)\mathbf{e}_z \quad \text{with } \rho'^2(s) + z'^2(s) = 1. \quad (13)$$

Let us define the curvature of the generating curve (defined as the cross section of the surface with a half plane through the axis of revolution):

$$\kappa(s) = \rho'(s)z''(s) - \rho''(s)z'(s); \quad (14)$$

### Geometric Rigidity of Shells

the Gaussian curvature of the surface of revolution then reads

$$K(s) = \frac{z'\kappa}{\rho} = -\frac{\rho''}{\rho}. \quad (15)$$

The function  $\omega(s, \theta)$  can be decomposed in Fourier modes along  $\theta$  indexed by  $q$ :

$$\omega(s, \theta) = \sum_{q \geq 0} \omega_q(s) \cos q\theta + \sum_{q \geq 1} \widehat{\omega}_q(s) \sin q\theta. \quad (16)$$

The linearised equation (9) then separates according to the values of  $q$ :

$$\forall q \geq 0 \quad \omega_q''(s) + \left( \frac{\rho'}{\rho} - \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \omega_q'(s) + \left( \kappa^2 - \frac{\rho''}{\rho} - q^2 \frac{K}{z'^2} \right) \omega_q(s) = 0, \quad (17)$$

plus the same equation for  $\widehat{\omega}_q$  with  $q \geq 1$ . We shall omit  $\widehat{\omega}_q$  in the following since it is equivalent to  $\omega_q$ .

*3.1.2. Rigid-body deformations are the  $q = 0, 1$ -modes* The rigid-body deformations (constant  $\Omega$ ) appear as the single  $q = 0$  mode  $\omega_0$  corresponding to  $\Omega \parallel \mathbf{e}_z$ , i. e.:

$$\omega_0 = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_z \rangle \propto \rho'(s), \quad (18a)$$

a solution of (17) for  $q = 0$ , plus one  $q = 1$  mode for  $\omega_1$  and  $\widehat{\omega}_1$  corresponding to  $\Omega \parallel \mathbf{e}_x$  i. e.:

$$\omega_1 = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_x \rangle \propto z'(s), \quad (18b)$$

and  $\Omega \parallel \mathbf{e}_y$  i. e.:

$$\widehat{\omega}_1 = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_y \rangle \propto z'(s). \quad (18c)$$

Reciprocally, it can be shown, by calculating  $\Omega$  from equation (11) and integrating it into the displacement field, that the solutions  $\omega_q$  corresponding to the modes  $q = 0$  or  $q = 1$  either yield rigid-body motions or multi-valued displacements, as in the case of the catenoid. In the following, we shall thus discard modes of rigid-body deformations and impose  $q \geq 2$ .

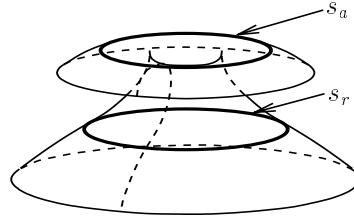
Furthermore, these non-trivial  $q \geq 2$  modes never yield multi-valued displacement fields: it can be shown that the displacement field corresponding to  $\omega_q$  is made up of two modes only:  $q \pm 1$ . As a consequence, there will be no problem in passing from a local isometric displacement with  $q \geq 2$  to a global one.

### 3.2. Modes of isometric deformation

Equation (17) for  $\omega_q(s)$  being second order, there are at most two modes of isometric deformations for each value of  $q$ . There can indeed be less than two modes, either because of singular points, around which the smoothness conditions may not be satisfied generically, or because of boundary conditions (simply supported or clamped edges for instance).

The influence of these singular points on the dimension of the solutions  $\omega_q$  is addressed in the following. Let us mention why it is much simpler to use our intrinsic equation (9): with the extrinsic one (7), additional singular points would show up at singular points of the parametrisation. These are not essential and would tend to distract our understanding of the problem.

## Geometric Rigidity of Shells



**Figure 3.** The two types of curves on a surface of revolution where the Gaussian curvature vanishes. They correspond to two types of singular points of equation (17), the third type being poles.

**Table 1.** Smoothness condition (from §2.2.3) versus generic and exceptional expansions of  $\omega_q$  near singular points. The compatibility condition is given in the last column.

Singularity	Smoothness condition	$\omega_q$ expansion	$\begin{cases} \text{generic} \\ \text{exceptional} \end{cases}$	Compatibility
pole $s_p$	$\omega_q(s) = \mathcal{O}((s - s_p)^2)$	$\begin{cases} a_{s_p}^g ((s - s_p)^{-q} + \dots) \\ a_{s_p}^e ((s - s_p)^{+q} + \dots) \end{cases}$	$\begin{cases} \\ a_{s_p}^g = 0 \end{cases}$	$a_{s_p}^g = 0$
a-type $s_a$	$\omega_q(s) = \mathcal{O}(s - s_a)$	$\begin{cases} a_{s_a}^g (1 + \dots) \\ a_{s_a}^e ((s - s_a) + \dots) \end{cases}$	$\begin{cases} \\ a_{s_a}^g = 0 \end{cases}$	$a_{s_a}^g = 0$
r-type $s_r$	$\frac{d}{ds}\omega_q(s) = \mathcal{O}(s - s_r)$	$\begin{cases} a_{s_r}^g (1 + \mathcal{O}(s - s_r)^2) \\ a_{s_r}^e ((s - s_r)^2 + \dots) \end{cases}$	$\begin{cases} \\ \text{automatic} \end{cases}$	automatic

*3.2.1. Singular points* At singular points, the coefficients of an ODE are not continuous when the highest order derivative is expressed in term of the lower ones, as in equation (17). Singular points for  $\omega_q$  thus are of the following types (see figure 3):

- poles  $s_p$  where  $\rho(s_p)$  vanishes;
- points  $s_a$  such that  $z'(s_a)$  vanishes. Such points (called a-points) correspond to a curve of revolution (called an a-curve) on which the Gaussian curvature of the surface vanishes by equation (15), the principal asymptotic direction being *azimuthal*;
- points  $s_r$  such that  $\kappa(s_r)$  vanishes. Such points (called r-points) correspond to a curve of revolution (called an r-curve) on which the Gaussian curvature of the surface also vanishes by equation (15), the principal asymptotic direction now being *radial*.

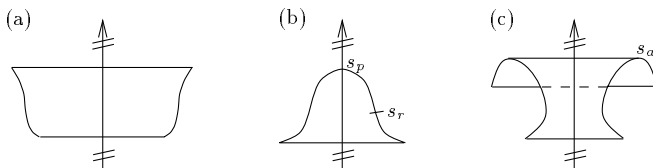
An expansion of  $\omega_q$  near each type of singular point is presented in table 1, together with the explicit form of the smoothness condition discussed in §2.2.3. This expansion can either be generic or exceptional. The latter corresponds to a vanishing coefficient  $a^g = 0$  preceding the generic expansion.

||

A principal direction of curvature is an eigenspace of the curvature 2-form  $H$ . An asymptotic direction is a null space of  $H$ , i. e. a direction in which the surface is flat.



*Geometric Rigidity of Shells*



**Figure 4.** A few examples of surfaces of revolution with at least one degree of freedom for each value of  $q$  ( $\epsilon \geq 1$ ), as determined by equation (20). Singular points are shown. Surface (a) has two free boundaries and no a-type point, hence  $\epsilon = 2$ . For the bell-shaped surface (b) with one free boundary and no a-type point,  $\epsilon = 1$ . Due to the azimuthal line at the top of surface (c),  $\epsilon = 1$ .

These expansions cannot be obtained straightforwardly since logarithms enter into them, and there are no power series solution of equation (17). For example, the generic expansion of  $\omega_q$  near an a-type point  $s_a$  reads, one order beyond that presented in table 1:

$$\omega_q(s) = a_a^g \left( 1 + \frac{q^2}{\rho(s_a)} (s - s_a) \ln |s - s_a| + \dots \right) \quad (19)$$

*3.2.2. Counting the isometric modes* As shown in table 1, poles and a-type points only are essential singularities for equation (17) in the sense that they generally lead to solutions not smooth enough with respect to §2.2.3. Besides boundary conditions, each one of these singular points indeed yields an additional equation  $a^g = 0$  to be satisfied by a generic solution  $\omega_q$ . The vector space of solutions  $\omega_q$  is finally of dimension: 2 (the order of the ODE) minus the number of poles minus the number of additional boundary conditions minus the number of a-type singular points.

This integer 2 minus the number of poles minus the number of additional boundary conditions has a geometrical meaning. It is 2 for a cylinder, 1 for a paraboloid, 1 for a sphere with a circular hole (see below), 0 for a full sphere. On a torus, integration of equation (17) is made along a loop, and two boundary conditions must be added for the rotation vector to be single-valued (one for  $\omega_q$  and another for  $\omega'_q$ ): this integer is 0 for the torus. More generally, for a surface of revolution with free edges, this integer coincides with the number of edges of the surface. When other boundary conditions are added (clamped edges for example), we will still call this integer, by definition, the *effective* number of edges of the surface.

Let  $\epsilon$  be the number of degrees of freedom (for isometric deformations of the surface) for each value of  $q$ :

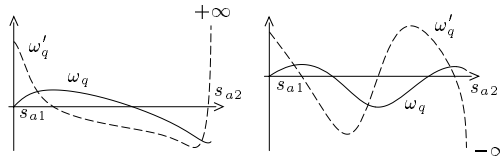
$$\epsilon = (\text{effective number of edges}) - (\text{number of a-curves}). \quad (20)$$

This expression is used in figures 4 and 7 to conclude the rigidity of a few surfaces of revolution.

The criterion that a surface of revolution is isometrically rigid is simply  $\epsilon \leq 0$ . Through equation (20), a-type singular points, which physically correspond to a-curves, are seen to play a very special role in the rigidity of the overall surface. A generalisation of a-curves to surfaces not of revolution will be sought later, leading to a natural extension of the rigidity criterion.

The case of a sphere with a circular hole is of special interest: it is not rigid ( $\epsilon = 1$ ) and its modes of deformations can be found almost analytically [13]. If the size of

## Geometric Rigidity of Shells



**Figure 5.** Numerical integration of equation (17) representing  $\omega_q$  et  $\omega'_q$  on the interval  $[s_{a1}, s_{a2}]$ , with the exceptional expansion at  $s_{a1}$  as an initial condition. The graphs correspond to two different surfaces taken from the same one-parameter family; since  $a_{a2}^g(\lambda)$  is seen to change its sign from one surface to the other one, the presence of an exceptional surface inbetween follows.

the hole is continuously shrunk to zero, these modes of deformations should disappear since a full sphere is rigid ( $\epsilon = 0$ ). This problem has been investigated numerically [3]: the vibration frequency of these modes has indeed been found divergent for a hole of vanishingly small size; for shells of finite thickness, this divergence is regularised, and the isometric modes progressively merge with extensional modes, which initially have much higher vibration frequencies [3]. In a future work, we will present quantitative results concerning this overlap, together with an analysis of the waves which actually tend to be localised at the edge of the small hole.

### 3.3. Exceptional modes of deformation

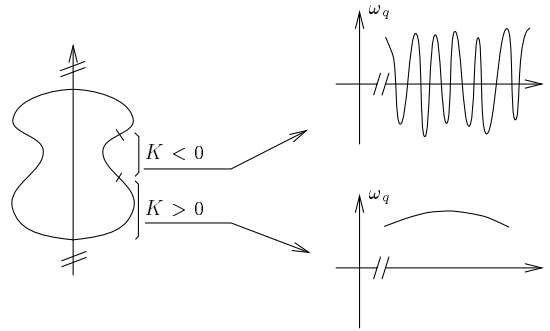
**3.3.1. Origin** From the preceding discussion, the surface is expected to be rigid when  $\epsilon \leq 0$ , i. e. when it has at least two poles, two a-curves, two boundary conditions, or any combination of these: in that case, two or more linear equations must be satisfied by a generic solution  $\omega_q$ . Above, these equations have been implicitly assumed independent, since each one of them was written to restrict the dimension of the  $\omega_q$  space by one unit.

Here we show that, under certain circumstances, the smoothness conditions at different poles or different a-points can be made to coincide. As a result, there will be one more degree of freedom than expected by the geometrical formula (20). Those degrees of freedom will be called *exceptional*, as well as any surface exhibiting exceptional degrees of freedom.

Exceptional surfaces can be found in practice by solving equation (17) using a shooting method: take a family of surfaces of revolution with  $\epsilon \leq 0$  indexed by a parameter  $\lambda$ . For sake of definiteness, we will assume that these have two a-type singular points  $s_{a1}$  and  $s_{a2}$ . The ODE (17) can be integrated from  $s_{a1}$  to  $s_{a2}$  with the exceptional behaviour at  $s_{a1}$  as the initial condition:  $a_{a1}^g = 0$ ,  $a_{a1}^c = 1$ . The coefficient  $a_{a2}^g(\lambda)$  of this solution at  $s_{a2}$  can then be evaluated. Then, if  $\lambda$  can be adjusted so as to have  $a_{a2}^g(\lambda)$  vanish (as is the case in figure 5),

the corresponding surface is exceptional. Surfaces featuring exceptional modes of deformation are thus quantised.

When an exceptional degree of freedom is sought, equation (17) must be integrated with the constraint that the solution  $\omega_q$  remains bounded in the vicinity of poles or a-curves. This situation is very reminiscent of the singular Sturm-Liouville problem [16]. In the Sturm-Liouville equation, however, there is a continuously adjustable parameter, and solutions (eigenfunctions) exist only for discrete values of this parameter (this defines the spectrum); while in equation (17), the parameter  $q^2$  is



**Figure 6.** For increasing values of  $q$ ,  $\omega_q$  oscillates faster and faster on hyperbolic parts of the surface ( $K < 0$ ) and more and more slowly on elliptic parts ( $K > 0$ ).

*discrete*. As a result, exceptional degrees of freedom can be found only for particular shapes of the surface, *i. e.* when the surface itself is adjusted. This is the reason why exceptional surfaces are quantised.

**3.3.2. Compact convex surfaces and the Sturm comparison theorem** Only some types of surfaces of revolution can exhibit exceptional degrees of freedom, as we shall state more precisely here. It would indeed be surprising to find exceptional surfaces among a family of convex surfaces of revolution with two poles: we mentioned in §2 that this kind of surface has no finite isometric deformations (although *infinitesimal* isometric deformations might exist by themselves, strictly speaking).

Proving that convex and compact surfaces of revolution never exhibit exceptional degrees of freedom will help us finding out what surfaces of revolution *can* be exceptional.

Before dealing with compact convex surfaces, it is helpful to follow the analogy with the Sturm-Liouville problem further. In equation (17), the only dependence on the parameter  $q$  is through the coefficient of  $\omega_q$ :

$$\text{const}(s) - q^2 \frac{K(s)}{z'^2(s)}, \quad (21)$$

where  $\text{const}(s)$  is some function independent of  $q$ . Arguments very similar to the Sturm comparison theorem [16] can then be used to prove the following “oscillation lemma”: for increasing  $q$ , the solution of equation (17),  $\omega_q$ , oscillates:

- faster and faster on segments corresponding to hyperbolic parts of the surface,  $K(s) < 0$ ;
- more and more slowly on segments corresponding to elliptic parts of the surface,  $K(s) > 0$ .

This result is sketched in figure 6.

At this stage, the infinitesimal rigidity of convex compact surfaces can be proved: such a surface has two poles, which are assumed to correspond to  $s = 0$  and 1. These poles surround an elliptic region  $K > 0$ . Let us remember that there exists a solution

*Geometric Rigidity of Shells*

$\omega_1$  given by (18b), corresponding to a rigid-body rotation of the surface; of course, this  $\omega_1$  satisfies the smoothness conditions at both poles:

$$\omega_1 \stackrel{s \rightarrow 0}{\sim} \text{const}_1 \cdot s \quad \text{and} \quad \omega_1 \stackrel{s \rightarrow 1}{\sim} \text{const}_2 \cdot (1-s), \quad (22)$$

and has a single extremum (it is the first component of the Fourier transform with respect to  $\theta$  of  $\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_x \rangle$ ).

If there existed a non-trivial ( $q \geq 2$ ) mode of isometric deformation  $\omega_q$  on a compact convex surface of revolution, with acceptable smoothness:

$$\omega_q \stackrel{s \rightarrow 0}{\sim} \text{const}'_1 \cdot s^q \quad \text{and} \quad \omega_q \stackrel{s \rightarrow 1}{\sim} \text{const}'_2 \cdot (1-s)^q, \quad (23)$$

this would be in contradiction with the oscillation lemma since:

- oscillations of  $\omega_q$  are slower than those of  $\omega_1$  on  $[0, 1]$ , and strictly slower at the poles  $s = 0$  and  $s = 1$ ;
- both  $\omega_1$  and  $\omega_q$  vanish at the poles;
- $\omega_1$  makes a single oscillation between the poles.

*3.3.3. Existence of exceptional modes* We can now give a precise criterion for the existence of exceptional degrees of freedom among a family of surfaces of revolution having  $\epsilon \leq 0$ :

- if there exists an s-segment corresponding to an elliptic part of the surface ( $K > 0$ ), bounded by 2 essential singular points (*i. e.* a pole or an a-type point), the surface cannot be exceptional since an argument similar to the one just given applies.
- if, contrarily, all the s-segments bounded by 2 essential singular points:
  - either contain an r-type point (see figure 3), so that the sign of  $K$  is not constant,
  - or are hyperbolic ( $K < 0$ ),

then,  $\omega_q$  can be made to oscillate on hyperbolic parts of the surface (at least, for large enough  $q$ ) and exceptional surfaces can be isolated.

This criterion completes the Sturm-like argument proposed by Cohn-Vossen for the case of a closed, convex surface of revolution [8][§3], and of a torus [8][§5]. It is illustrated by a few examples in figure 7.

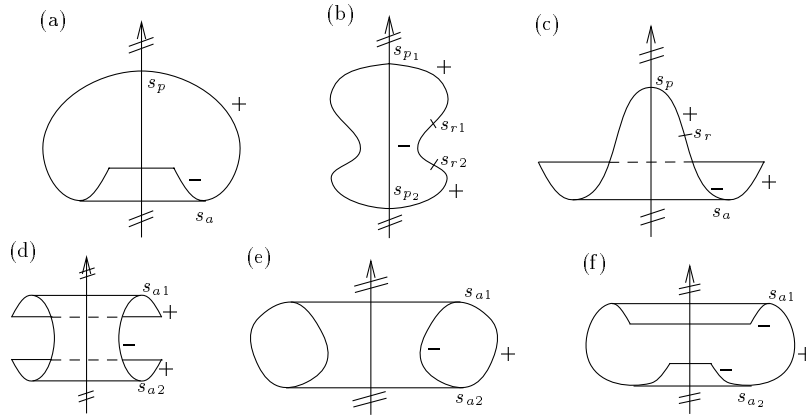
In the limit  $q \rightarrow \infty$  (short wave approximation), WKB-like arguments [17] can be used to study the quantisation condition for exceptional surfaces. Hyperbolic parts of the surface are then mapped to classically permitted regions, while elliptic ones are mapped to classically forbidden ones. Circles of vanishing Gaussian curvature correspond to turning points of the potential.

*3.3.4. Examples of exceptional modes* We have sought exceptional surfaces numerically among the following one-parameter family of torn tori (see figure 8):

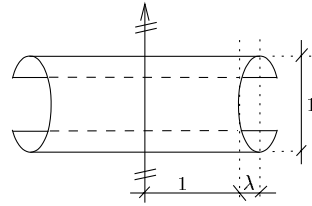
$$\begin{cases} \rho(u) = 1 + \lambda - \lambda \sin u \\ z(u) = \cos u \end{cases} \quad \text{for } u \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \quad \lambda > 0. \quad (24)$$

For every value of  $q \geq 2$ , it appeared that a surface exhibiting an exceptional  $q$ -mode of pure bending can be found for a particular value of  $\lambda$ ,  $\lambda_q$ , since  $\omega_q$  was found to oscillate rapidly between the two a-type points, in accordance with our predictions—see figure 7 (d). An example of an exceptional surface from this family is shown in figure 9.

*Geometric Rigidity of Shells*



**Figure 7.** Examples of surfaces of revolution having generically no modes of deformation ( $\epsilon \leq 0$ ). The sign of the Gaussian curvature and the singular points are represented. For all surfaces  $\epsilon = 0$ , except for surface (e) for which  $\epsilon = -2$ . According to §3.3.3, (b), (c) and (d) can be exceptional, but not (a), (e) nor (f).



**Figure 8.** One-parameter family of open tori ( $\epsilon = 0$ ) used for isolating numerically exceptional surfaces of revolution.

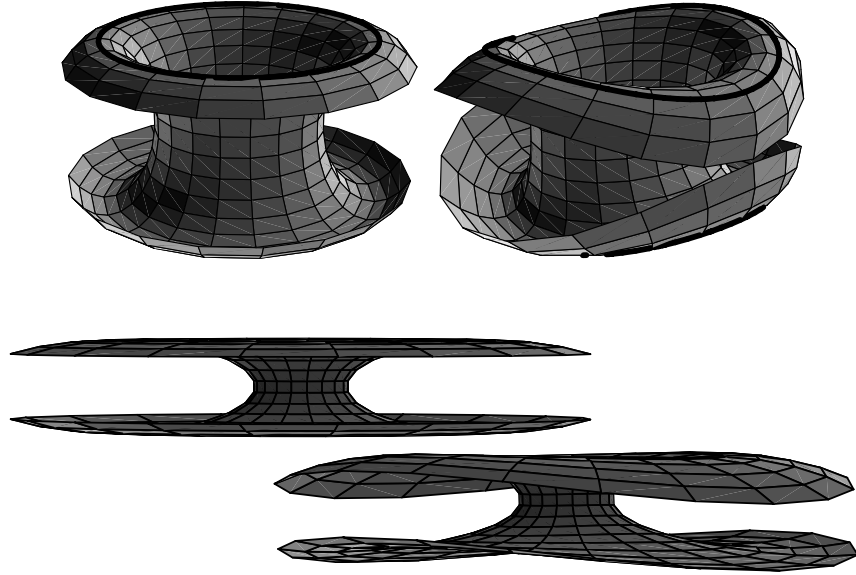
#### 4. Rigidifying curves

The fact that surfaces of revolution may be rigidified by a-curves can be interpreted geometrically (a-curves were defined at §3.2.1). This interpretation is of interest, because it can easily be extended to surfaces not of revolution; this will result in the description of rigidifying curves on generic unstretchable surfaces.

##### 4.1. Geometric interpretation of the rigidity due to a-curves on surfaces of revolution

Let  $\mathcal{C}$  be an a-curve on a surface of revolution (a-curves are defined in figure 3). Its rigidification property is investigated from a geometrical point of view. The surface on which  $\mathcal{C}$  lies is assumed to undergo a smooth isometric deformation. We shall mark with a subscript “i” the quantities pertaining to the initial (undeformed) state.

By definition of a-curves,  $\mathcal{C}_i$  is actually a circle. We shall ignore this, however, and use only weaker properties of  $\mathcal{C}_i$ , like the fact that it is planar: our aim is to keep the proof as general as possible, and prepare an easy extension of the results to general surfaces (not of revolution). Each time a property of  $\mathcal{C}_i$  is used, it will be explicitly

*Geometric Rigidity of Shells*

**Figure 9.** Examples of exceptional modes of infinitesimal deformation, sought among the family of surfaces depicted in figure 8 for  $k = 2$ . Exceptional modes occur for quantified values of the parameter  $\lambda$ : on top,  $\lambda_2 = 0.618$  corresponds to  $\omega_2$  having one node between the a-points; on bottom,  $\lambda_2' = 3.107$ , and  $\omega_2$  has two nodes. These surfaces are plotted at rest (left) and deformed (right). One of the two a-curves can be seen on the first surface.

mentioned.

Let  $\kappa(s)$  and  $\tilde{\kappa}(s)$  be respectively the extrinsic and intrinsic curvature of  $\mathcal{C}$  at a point  $s$ , and  $\mathbf{t}(s)$  a tangent to  $\mathcal{C}$  at this point. We point out again that the extrinsic curvature is unsigned, while the intrinsic curvature refers to the surface in which the curve is embedded and thus depends on both the orientation of the surface and of the curve itself. The intrinsic curvature is conserved under isometric deformation of the surface, which we write  $\tilde{\kappa}(s) = \tilde{\kappa}_i(s)$ .

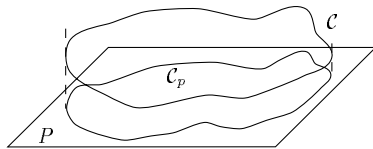
*A-curves are asymptotic* For any curve drawn on a surface [1],  $\kappa(s) \geq |\tilde{\kappa}(s)|$ , or, equivalently,  $\kappa(s) \geq |\tilde{\kappa}_i(s)|$ . Equality holds when  $II(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0$ , *i. e.* wherever the curve  $\mathcal{C}$  is *asymptotic*.

In the undeformed configuration, and by definition of a-curves,  $\mathcal{C}_i$  is asymptotic everywhere (this is where the *a* in “a-curve” comes from). The equality is thus satisfied in the preceding inequality. Therefore, at every point  $s$ ,  $\kappa(s)$  increases during the deformation:

$$\kappa(s) \geq \kappa_i(s). \quad (25)$$

This fact is shown to imply the rigidification by a-curves.

*Geometric Rigidity of Shells*



**Figure 10.** The projection of the curve  $\mathcal{C}$  onto the plane  $P$  in which it was initially contained doesn't modify its curvature, to first order in the deformation.

*A-curves are planar* After some algebra, one obtains the first order variation of the curvature  $\kappa$  of a curve caused by a generic infinitesimal deformation of this curve:

$$\mathbf{r}(s) \mapsto \mathbf{r}(s) + v(s) \mathbf{n}(s) + w(s) \mathbf{b}(s), \quad (26)$$

$(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  being its Frénet frame. It reads:

$$\delta\kappa = v(\kappa^2 - \tau^2) + v'' - w\tau' - 2w'\tau, \quad (27)$$

where  $\tau$  is the initial torsion of the curve, and where primes stand for derivatives with respect to  $s$ . Applying this calculation to the a-curve  $\mathcal{C}$ , the torsion of which vanishes identically, we find that  $w$  is irrelevant in this expression for the curvature perturbation, to first order in the deformation. More generally, for any curve  $\mathcal{C}$  which is *planar* in the undeformed state,  $\tau \equiv 0$ , and this statement remains true;  $w$  is then the out-of-plane deformation.

Let us introduce the projection  $\mathcal{C}_p$  of the curve  $\mathcal{C}$  onto the plane  $P$  containing  $\mathcal{C}_i$  (see figure 10).

The resulting curve being planar, its curvatures satisfy  $\kappa_p = |\tilde{\kappa}_p|$ , with obvious notations. We can now reformulate the statement in the preceding paragraph as follows: to first order in the deformation,  $\kappa = \kappa_p$ .

Using now equation (25), we find that the curvature of  $\mathcal{C}_p$  is also a minimum in the undeformed state.  $\kappa_p(s) \geq \kappa_{pi}(s)$ , or, equivalently,

$$|\tilde{\kappa}_p| \geq |\tilde{\kappa}_{pi}| \quad (28)$$

*A-curves are closed and convex* Now, let us take into account the fact that the a-curve  $\mathcal{C}_i$  is not only planar, but also *closed and strictly convex*. Then  $\mathcal{C}_p$  remains convex after infinitesimal deformation, and the integral of the absolute intrinsic curvature over a simple planar loop is:

$$\int_{\mathcal{C}_p} |\tilde{\kappa}_p| = \left| \int_{\mathcal{C}_p} \tilde{\kappa}_p \right| = 2\pi, \quad (29)$$

so that the integral on the left-hand side is constant during the deformation. On the other hand, we have shown that  $|\tilde{\kappa}_p|$  is minimum in the initial state.

*Conclusion* Consistency thus requires that  $|\tilde{\kappa}_p|$  is conserved during the isometric deformation of the surface, to first order in the displacement. As a consequence, the curve  $\mathcal{C}_p$  experiences a rigid-body motion in  $P$ . The physical motion of the curve  $\mathcal{C}$  on the unstretchable surface is then *normal* to the plane  $P$ , modulo a rigid body motion. This particular deformation of an a-curve can be seen on the top of figure 9.

This property severely constrains not only the motion of the curve  $\mathcal{C}$ , but also the modes of deformation of the surface itself in the vicinity of the curve. It accounts for the rigidification property (20) of a-curves on surfaces of revolution.

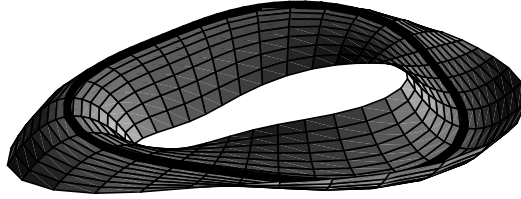
*Geometric Rigidity of Shells*

Figure 11. A typical rigidifying curve (caps-curve) on a shell.

*4.2. Generalisation: rigidification of shells*

The generalisation to surfaces that are not of revolution is now straightforward. In the preceding proof, we have not used the fact that the surface was of revolution: any closed, asymptotic, planar and strictly convex curve (caps-curve)  $\mathcal{C}$  on an unstretchable surface will deform normally to its rest plane, modulo a rigid-body motion. As previously, rigidification of the surface itself will follow.

From the Beltrami-Enneper theorem [1, p. III.291], a secondary property of  $\mathcal{C}$  can be obtained: since it is asymptotic and has a vanishing torsion, the Gaussian curvature necessarily vanishes on it, *i. e.* the tangents to  $\mathcal{C}$  are not only asymptotic but they also define a *principal* direction of (zero) curvature. Rigidifying curves are thus localised at the merging of elliptic and hyperbolic parts on the surface. A typical rigidifying curve is represented in figure 11.

The rigidity of caps-curves can be recovered by the following trick: by the arguments of the last paragraph, the Gaussian curvature vanishes on a caps-curve  $\mathcal{C}$ , and the tangents to  $\mathcal{C}$  define an asymptotic direction. These are exactly the conditions which allow equation (2.2.3) to be integrated along  $\mathcal{C}$ :  $\omega$  is constant along  $\mathcal{C}$ . It can be seen easily that the normal direction  $e_n$  is also constant along  $\mathcal{C}$ , so that the projection of  $\Omega$  onto the normal to the rest plane of  $\mathcal{C}$  is constant. The infinitesimal deformation of  $\mathcal{C}$  will thus be normal to this plane, modulo a rigid-body motion. Although less intuitive than the geometric arguments above, this trick provides a consistency check to both these geometric arguments and equation (2.2.3).

Caps-curves permit a natural extension of the rigidity criterion proposed in §3.2.2. The arguments presented in the introduction show that not only the geometric properties of the shell, but also its elastic characteristics should be influenced altogether by the presence of caps-curves.

**5. Conclusion**

We have given an exact equation for the rigidity of unstretchable shells, which was found consistent with known equations governing the infinitesimal rigidity of shells. For the surfaces of revolution, we have solved the problem of determining the existence of modes of pure bending deformations: in particular, we have shown that these modes are influenced by the presence of rigidifying a-curves, which we have introduced; we have also discussed the presence of exceptional modes for quantised surfaces.

Finally, for generic curved shells, we have found rigidifying curves, which are expected to determine their vibration spectra, as well as their crumpling and their buckling threshold. In future work, we plan to calculate vibration spectra and buckling



### *Geometric Rigidity of Shells*

thresholds of shells of revolution, and discuss them in the light of these results.

### Acknowledgments

We gratefully thank Yves Pomeau for helpful discussions and encouragements, as well as Prabhat Agarwal for his remarks.

### References

- [1] Spivak M 1979 *Differential Geometry* Vol. III to V. Publish or perish Inc, Houston
- [2] Rayleigh J W S 1945 *The Theory of Sound* Dover Publications, New York
- [3] Patricio P 1998 *Instabilités géométriques en élasticité* Thèse de doctorat de l'Université de Paris VII
- [4] Ben Amar M and Pomeau Y 1997 *Proc. R. Soc. A* **453** 729–55
- [5] Lobkovsky A E 1996 *Phys. Rev. E* **53** 3750–
- [6] Pogorelov A V 1988 *Bendings of Surfaces and Stability of Shells.*, Translation of mathematical monographs **72**, American Mathematical Society, Providence.
- [7] Pauchard L and Rica S 1998 *Phil. Mag. B* **78** 235–
- [8] Cohn-Vossen S 1929–30 *Math. Annalen* **102** 10–
- [9] Killing W 1885 *Die Nicht-euklidischen Raumformen in Analytischer Behandlung* G. B. Teubner, Leipzig
- [10] Alexandrov A D 1938 *Recueil Math. (Moscou)* **4** 67–
- [11] Nirenberg L 1963 *Nonlinear Problems (Proc. Sympos., Madison, Wis., 1962)*, Univ. of Wisconsin Press (Madison, Wisconsin) 177–
- [12] Struik D J 1961, *Lectures on Classical Differential Geometry*, second edition, Addison-Wesley, Reading (Mass.)
- [13] Niordson F I 1985 *Shell Theory*. J. D. Achebach *et al.* editors, North-Holland, Amsterdam, New-York, Oxford.
- [14] B. Audoly, Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI, defended in Jan. 2000.
- [15] ———1998 *Geometric Crumpling of a Sheet of Paper*, to be submitted to Nonlinearity.
- [16] Many books can be found about the Sturm-Liouville problem, in particular: Birkhoff G., Rota G.-C., 1959. *Ordinary Differential Equations*, chap. X. Blaisdell publishing company, London
- [17] Many quantum-mechanics textbooks include a discussion of the WKB approximation, in particular: Dicke R. H., Wittke J. P., 1960. *Introduction to Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Reading (Mass.)



**Deuxième partie**

**Mécanique  
de la fracture interfaciale**



There's a crack in everything.  
That's how the light gets in.

LEONARD COHEN

De nos jours, les matériaux composites multi-couches sont couramment utilisés dans l'industrie [30]. Leur résistance mécanique pose des problèmes spécifiques. En particulier, l'interface située entre deux matériaux différents est, du point de vue de la mécanique, un point faible : lorsque ces matériaux sont sollicités par des contraintes, d'origine thermique par exemple (cf. §8.3), la fracture de l'interface est un mode de rupture couramment observé [33]. De plus, on connaît mal les conditions mécaniques qui conduisent à cette rupture. Une meilleure compréhension de la *fracture interfaciale* représente donc un enjeu important dans le domaine des matériaux composites. C'est l'objet de cette partie.

La fracture interfaciale est un phénomène complexe et encore mal compris, ce qui suffirait déjà à justifier son étude. Les développements présentés ici permettent, en outre, de préparer la dernière partie de ce travail, qui porte sur la délamination. Nous nous plaçons ici à des échelles *petites* devant l'épaisseur du film délaminé, et cherchons un critère macroscopique de fracturation de l'interface, en fonction des contraintes appliquées sur le film. Dans la prochaine et dernière partie, nous pourrions nous placer à des échelles *grandes* devant l'épaisseur du film, le critère de délamination établi ici incluant tous les effets microscopiques. Cette approche en deux étapes permet une description cohérente de la délamination, qui, de plus, se suffit à elle-même.

On étudie la fracture interfaciale à l'échelle microscopique : les contraintes à la pointe d'une fissure, que nous déterminons, se distinguent de celles que l'on rencontre en fracture des milieux homogènes. On verra que ces résultats permettent de comprendre pourquoi, à l'échelle macroscopique, une fracture semble plus résistante à s'ouvrir davantage quand elle est cisailée (mode *II*) que quand on l'« écartèle » (mode *I*) — propriété fondamentale des interfaces, connue sous le nom de

« dépendance de mode de la ténacité de l'interface » (*mode dependent toughness* en anglais).

## Chapitre 4

# Fracture d'un matériau homogène

Pour préparer l'étude de la fracture interfaciale, il convient de rappeler quelques éléments de la théorie de la fracture en milieu homogène (on y référera plus tard comme théorie « classique » de la fracture).

### 4.1 Élasticité d'un matériau homogène isotrope

La théorie de la fracture est une branche de l'élasticité. Nous introduisons les équations de l'élasticité linéaire (sur la base des équations de Hooke), et montrons comment les conditions aux limites au bord d'un plan de fissuration conduisent aux fondements de la théorie de la fracture : divergence des contraintes en  $r^{-\frac{1}{2}}$ , critère de propagation de Griffith, etc.

#### 4.1.1 Tenseurs des déformations et des contraintes

Nous établissons pour commencer les équations de l'élasticité pour un matériau homogène isotrope. Soit  $(x, y, z)$  un système de coordonnées orthonormales par rapport à un référentiel fixe. Soumis à des contraintes mécaniques, un corps solide subit un champ de déplacement  $\mathbf{u}(x, y, z)$ , en variables lagrangiennes. Il y a déformation quand les distances entre deux points du solide sont modifiées <sup>1</sup>. La variation, au cours de la déformation, d'un élément de longueur  $dl$  entre des points

---

<sup>1</sup>Pour un solide *en volume*, la déformation se mesure par les variations des longueurs. La situation est donc très différente des surfaces, qui peuvent sous certaines conditions se déformer isométriquement (cf. la première partie).

séparés de  $(dx, dy, dz)$  est donnée par :

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l, \quad (4.1)$$

en notations tensorielles (les indices répétés sont sommés). Mettant cette expression sous la forme  $dl'^2 = dl^2 + u_{ij} dx_i dx_j$ , on en déduit le tenseur des déformations,  $u_{ij}$  :

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right). \quad (4.2)$$

Ce tenseur est symétrique et sans dimension. On note que les déformations comportent une contribution non linéaire en les déplacements. Ces non-linéarités, d'origine purement géométrique, joueront un rôle essentiel dans les équations de F.-von K.

D'autre part, on introduit le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$ . Ce tenseur est défini par la force appliquée sur un volume arbitraire du solide par ses voisins. La contribution élémentaire à cette force,  $d\mathbf{F}$ , correspondant à un élément de surface, prend par définition la forme  $dF_i = \sigma_{ij} n_j dS$ . Le vecteur  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à la surface. Le cas de la pression hydrostatique correspond à un tenseur des contraintes diagonal  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$ ; la partie non diagonale représente les effets de cisaillement. Par sa définition, le tenseur  $\sigma_{ij}$  est symétrique [38].

#### 4.1.2 La loi de Hooke

Les propriétés élastiques d'un matériau sont décrites par une relation constitutive liant déformations et contraintes. Une approximation très largement utilisée est celle de la réponse linéaire, introduite par Hooke. Valable dans la limite des faibles déformations<sup>2</sup>, et pour les matériaux isotropes, cette approximation suppose la proportionnalité entre contrainte et déformation. De même qu'en mécanique des fluides, la proportionnalité entre gradient de vitesse et contraintes visqueuses amène à introduire *deux* viscosités, de même la proportionnalité entre les tenseurs symétriques à deux indices  $\sigma_{ij}$  et  $u_{ij}$  introduit deux constantes caractéristiques du matériau. Plusieurs équivalents de ces constantes sont possibles : nous utiliserons essentiellement le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\sigma$ . La stabilité élastique du matériau suppose que le coefficient de Poisson soit dans l'intervalle  $-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$ . Beaucoup de matériaux ont un coefficient de Poisson proche

<sup>2</sup>L'hypothèse de la réponse linéaire est justifiée par le fait que nombre de matériaux, à l'exception notable du caoutchouc, se brisent avant d'entrer dans un régime d'élasticité non linéaire. Cela ne concerne pas les non-linéarités d'origine géométrique qui, elles, sont fréquemment rencontrées (cf. 8.3).



de 0,3. Il s'avérera pratique pour la suite d'introduire un module dérivé, le module de cisaillement :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}. \quad (4.3)$$

Les relations de Hooke s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} [(1 - \sigma)u_{xx} + \sigma(u_{yy} + u_{zz})], \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} [(1 - \sigma)u_{yy} + \sigma(u_{xx} + u_{zz})], \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} [(1 - \sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})], \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1 + \sigma} u_{xy}, \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{1 + \sigma} u_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{1 + \sigma} u_{yz}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Résoudre un problème élastique consiste à trouver un champ de déplacement  $u$  qui satisfasse la condition d'équilibre mécanique en tout point intérieur au solide :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad j = x, y, z, \quad (4.5)$$

avec des conditions aux limites imposées sur les bords (contraintes ou déformations imposées par exemple).

Avec les conditions aux limites correspondant à une fissure, on peut déduire des équations ci-dessus la forme asymptotique des contraintes près de la pointe de la fissure. C'est le programme des prochains paragraphes. Par la suite, nous établirons les équations régissant les plaques élastiques minces (équations de F.-von K.) en partant de ces mêmes équations fondamentales.

## 4.2 Éléments de mécanique de la fracture

Cette présentation succincte des trois modes fondamentaux de fracture est inspirée de [39]. On considère une fissure en forme de demi-plan. On s'intéresse aux configurations d'équilibre du solide fissuré, ce qui signifie que l'on utilise les équations de la mécanique (4.6) sans dépendance par rapport au temps. Soit  $e_z$  la direction parallèle au front de la fissure, et  $(Oxz)$  le plan contenant la fissure (cf. fig. 4.1).

On s'intéressera tout d'abord aux déformations planes, c'est-à-dire indépendantes de  $z$  et telles que  $u_z \equiv 0$ . Dans ces conditions, les équations d'équilibre

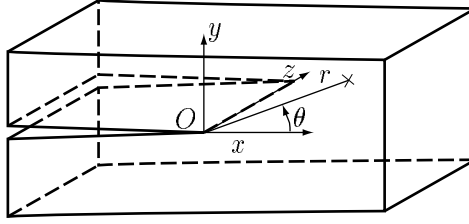


FIG. 4.1 – Une fissure dans un matériau homogène.

mécanique (4.5) prennent la forme :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} &= 0, \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} &= 0.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Il existe donc une fonction, appelée potentiel d'Airy, dont les contraintes dérivent :

$$\sigma_{xx} = \chi_{,yy}, \quad \sigma_{yy} = \chi_{,xx}, \quad \sigma_{xy} = -\chi_{,xy}.\quad (4.7)$$

Nous rencontrerons un autre potentiel d'Airy plus loin, dans le contexte des équations de F.-von K.

Les composantes du tenseur de contrainte ne sont pas indépendantes : en élasticité bidimensionnelle, ces composantes sont au nombre de *trois* ( $\sigma_{xx;yy;xy}$ ), alors qu'elles sont définies en fonction des *deux* composantes indépendantes de la déformation ( $u_{x;y}$ ). Il existe donc une relation liant les différents  $\sigma_{ij}$ . Cette condition d'intégrabilité pour  $\sigma_{ij}$  s'obtient en éliminant les déformations des relations de Hooke (4.4). Dans le cas qui nous intéresse (invariance dans la direction  $z$  et élasticité linéaire), cette condition se traduit par le fait que le potentiel d'Airy,  $\chi$  est *biharmonique* :

$$\Delta \Delta \chi = 0.\quad (4.8)$$

Les équations de l'élasticité sont du quatrième ordre, et c'est la raison pour laquelle la résolution d'un problème élastique se ramène très généralement à une équation *bilaplacienne* [38, (7,7)], et non simplement laplacienne comme en électrostatique. Le laplacien de l'équation précédente est bidimensionnel, car il n'y a pas de dépendance en la variable  $z$  dans notre problème.

On impose les conditions aux limites correspondant à la configuration de la figure 4.1 : deux demi-plans sans contraintes se rejoignent à l'origine :  $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$  en  $y = 0, x \leq 0$ . Il est pratique de passer en coordonnées polaires. L'équation (4.7) devient alors :

$$\sigma_{rr} = \frac{\chi_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{\chi_{,r}}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \chi_{,rr}, \quad \sigma_{r\theta} = -\left(\frac{\chi_{,\theta}}{r}\right)_{,r}.\quad (4.9)$$

Finalement, le problème des déformations planes se traduit par l'équation bilaplacienne (4.8) assortie des quatre conditions aux limites sur les bords de la fissure :

$$\left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right|_{\theta=\pm\pi} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \frac{\chi_{,\theta}}{r} \right|_{\theta=\pm\pi} = 0. \quad (4.10)$$

Pour résoudre un problème particulier d'élasticité, on se donne d'autres conditions aux limites, indiquant par exemple que d'autres faces du solide sont sans contraintes. Ici, nous recherchons simplement les comportements asymptotiques possibles pour les contraintes au voisinage du front de fissuration. Il n'est donc pas nécessaire d'imposer d'autres conditions aux limites (par exemple à l'infini). Nous serons cependant amené par la suite à introduire une contrainte supplémentaire garantissant que l'énergie élastique totale reste finie.

On recherche une solution des équations (4.8) et (4.10) sous la forme :

$$\chi(r, \theta) = r^{-\lambda+2} \Phi(\theta), \quad (4.11)$$

de sorte que les contraintes, reliées aux secondes dérivées de  $\chi$ , seront homogènes à  $r^{-\lambda}$ . Le calcul du bilaplacien et la prise en compte des conditions aux limites (4.10) [39] montrent qu'il n'existe de solution que lorsque  $\lambda$  est entier ou demi-entier. De plus, les solutions correspondant à  $\lambda \geq 1$  représentent une concentration d'énergie infinie à la pointe de la fissure. La plus forte divergence des contraintes admissible à la pointe est donc donnée par  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Il existe deux solutions indépendantes pour cette valeur de  $\lambda$ , appelées mode *I* et mode *II*. En ce qui concerne les déformations planes, la forme asymptotique du tenseur des déformations au voisinage d'une fissure sera donc la superposition linéaire de ces deux modes fondamentaux :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( 5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( -5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( 3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( -3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ces formules sont dues à Williams. Il faut remarquer que la dépendance angulaire est universelle dans ces formules : elle ne dépend d'aucun paramètre géométrique ou mécanique. Les coefficients  $K_I$ ,  $K_{II}$ , appelés coefficients d'intensité des contraintes, traduisent l'intensité de la charge sur la pointe de la fissure. Ils dépendent des contraintes appliquées.

Il existe en fait deux variantes de l'élasticité plane : le cas des *déplacements* plans, et celui des *contraintes* planes (pour la définition, voir plus loin p. 73). Si

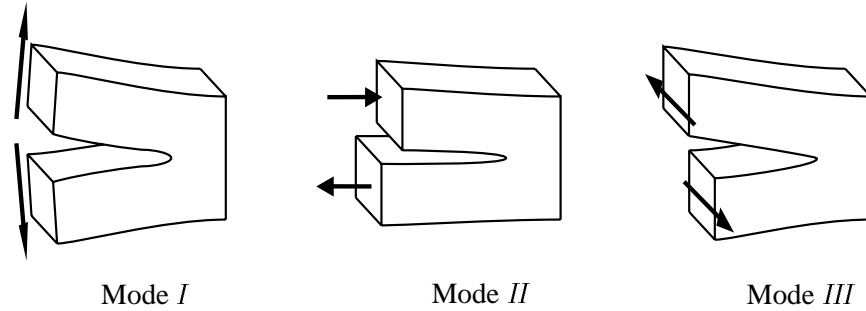


FIG. 4.2 – Les trois modes de fracture fondamentaux.

l'expression asymptotique des contraintes est la même pour ces deux variantes de l'élasticité bidimensionnelle, celle des déplacements diffère légèrement. Nous donnons la forme des déplacements correspondants à (4.12), dans le cas de *déplacements plans* :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (3 - 4\sigma - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (5 - 4\sigma + \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2}, \\ u_y &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (3 - 4\sigma - \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (-1 + 4\sigma - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

En prenant  $\theta = \pm\pi$  dans les équations précédentes, il apparaît que le mode *I* correspond à l'ouverture de la fissure ( $u_x \propto \sqrt{-x}$ ,  $u_y \equiv 0$  sur les lèvres de la fissure), alors que le mode *II* est un mode de cisaillement ( $u_y \propto \sqrt{-x}$ ,  $u_x \equiv 0$  sur les lèvres de la fissure) — voir la fig. 4.2. Le coefficient  $K_I$  doit être positif. Si  $K_I < 0$ , les matériaux s'interpénètrent — c'est que la fissure est en fait refermée près de la pointe, et les conditions aux limites de bords libres doivent être remplacées par des conditions aux limites de *contact*.

Pour compléter cette étude asymptotique de la fissure en milieu homogène, il reste à considérer les déformations dans la direction  $z$ . Cette partie est la plus facile, car ces déformations sont découplées des déformations planes. La composante transverse du déplacement,  $u_z$ , est tout simplement harmonique. Il existe un troisième mode fondamental de fracture, le mode *III*, qui correspond à ce cisaillement transverse. Nous ne donnerons pas ici la forme des contraintes et des déplacements pour ce mode. Notons simplement que l'on a les mêmes lois d'échelles pour le mode *III* que pour les deux premiers modes :  $u_z \propto r^{\frac{1}{2}}$  et  $\sigma_{zz} \propto r^{-\frac{1}{2}}$  (les points en indice permettent de distinguer le tenseur des contraintes  $\sigma_{zz}$  du coefficient de Poisson  $\sigma$ ). Par souci de simplicité, nous ne considérerons pas d'effets transverses

dans la suite de notre étude sur la fracture : nous n'aurons jamais à considérer d'effet du mode *III*.

## 4.3 L'intégrale de Rice

### 4.3.1 Définition et propriétés de l'intégrale $J$

On s'intéresse, comme précédemment, à une fissure semi-plane à l'équilibre dans un matériau homogène isotrope. Donnons-nous dans une section transverse à cette fissure un contour  $\tau$  entourant la pointe (en gras sur la figure 4.3). Soit  $\mathbf{n}$  le vecteur normal unitaire extérieur défini le long de  $\tau$ , et  $w$  la densité d'énergie élastique. Cette densité d'énergie est définie par :

$$w = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij}. \quad (4.14)$$

Le cadre dans lequel nous nous plaçons est celui de l'élasticité Hookéenne : les contraintes sont linéaires en les déformations, et, par conséquent, la densité d'énergie élastique donnée ci-dessus est bien quadratique en les déformations. Considérons l'intégrale curviligne introduite par Jim Rice [59, 60] :

$$J = \int_{\tau} (w n_x - \sigma_{ij} u_{i,x} n_j) dS, \quad (4.15)$$

où la direction  $x$  est celle de la fissure. L'élément différentiel  $dS$  est le produit de l'élément de longueur sur  $\tau$  par une unité de longueur transverse.

Nous allons d'abord montrer que cette intégrale est indépendante du contour  $\tau$ . Soit en effet un autre contour  $\tau'$ , et  $\Omega$  le domaine délimité par  $\tau$  et  $\tau'$  (cf. fig. 4.3). La différence entre les intégrales de Rice calculées sur chacun des contours s'écrit comme une intégrale sur le bord  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$  :

$$J_{\tau} - J_{\tau'} = \int_{\partial\Omega} (w n_x - \sigma_{ij} u_{i,x} n_j) dl. \quad (4.16)$$

Il faut prendre comme normale à  $\partial\Omega$  la normale *extérieure* par rapport au domaine  $\Omega$ . Sur  $\tau$ , les normales à  $\partial\Omega$  et à  $\tau$  coïncident donc mais, sur  $\tau'$ , les normales à  $\partial\Omega$  et à  $\tau'$  sont opposées.

Le contour  $\partial\Omega$  contient, outre  $\tau$  et  $\tau'$ , deux portions des lèvres de la fissure,  $\omega$  et  $\omega'$ . En effet, l'application du théorème de Stokes, ci-dessous, dans l'anneau délimité par  $\tau$  et  $\tau'$  poserait problème au voisinage de l'interface, où les champs élastiques sont discontinus. Les chemins  $\omega$  et  $\omega'$  permettent d'exclure l'interface du domaine  $\Omega$ . Les contributions de l'intégrale de Rice sur  $\omega$  et  $\omega'$  sont bien nulles

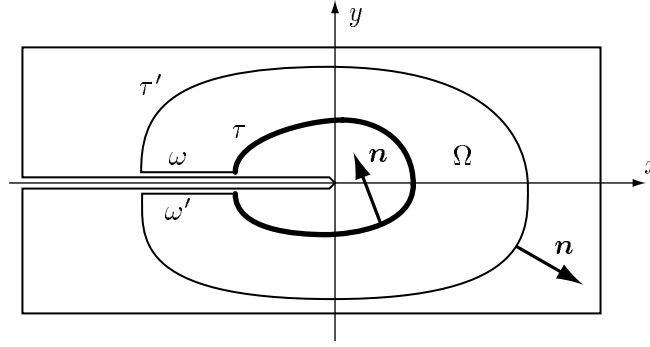


FIG. 4.3 – Conventions permettant de vérifier que l'intégrale de Rice est indépendante du chemin.

dans le membre de droite de l'équation ci-dessus, car  $n_x$  s'y annule (les lèvres de la fissure sont parallèles à la direction  $x$ ), ainsi que  $\sigma_{ij}u_{i,x}n_j$  (seul le terme  $j = y$  rend la normale non nulle, et le bord est libre donc  $\sigma_{yj} = 0$ ). Remarquons dès à présent que ces contributions seraient non nulles si les lèvres de la fissure étaient en contact, un cas que nous envisagerons au §5. Pour l'heure, supposons que les lèvres ne se touchent pas, de sorte qu'il y a bien égalité dans (4.16).

L'intégrale sur un contour fermé peut être transformée en intégrale dans le domaine  $\Omega$  par application du théorème de Stokes :

$$J_\tau - J_{\tau'} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial (\sigma_{ij}u_{i,x})}{\partial x_j} \right) dx dy, \quad (4.17)$$

où  $x_j$  désigne la  $j$ -ième coordonnée. Comme la densité d'énergie  $w$  est quadratique en  $u_{ij}$ , sa différentielle peut s'écrire

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u_{ij}} du_{ij} = \sigma_{ij} du_{ij}. \quad (4.18)$$

D'autre part, la condition d'équilibre mécanique donne  $\partial_j \sigma_{ij} = 0$ . On peut donc réécrire l'équation (4.17) sous la forme :

$$J_\tau - J_{\tau'} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} - \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial x_j}. \quad (4.19)$$

La définition (4.2) du tenseur de déformation montre qu'au premier ordre en les déformations,  $u_{ij,x} = u_{i,xj}$ . Si l'on néglige les non-linéarités dans (4.2), l'intégrale (4.19) s'annule donc. Ceci prouve que l'intégrale de Rice est bien indépendante du contour. Justifions que l'on puisse négliger les non-linéarités géométriques dans (4.2). L'hypothèse de l'élasticité Hookéenne, que nous avons toujours

utilisée, suppose de faibles *déformations*; négliger les non-linéarités d'origine géométrique dans (4.2) est justifié dans la limite des faibles *déplacements*. Hormis le cas des grandes rotations, que nous prendrons soin d'éviter, il n'y a donc pas lieu, en mécanique de la fracture, de retenir les non-linéarités géométriques. La situation sera très différente dans le cas des plaques : la composante verticale du déplacement n'apparaissant pas dans les équations à l'ordre linéaire, on devra conserver certaines non-linéarités d'origine géométrique pour tenir compte de cette composante du déplacement. C'est ce qui rend la théorie des plaques minces essentiellement non linéaire, alors que la mécanique de la fracture est plutôt linéaire — même si les conditions au bord (contact/séparation, ou stick/slip en présence de frottement) peuvent introduire certaines non-linéarités.

### 4.3.2 Application à la fracture

L'intégrale de Rice est essentielle en mécanique de la fracture. Elle s'interprète en effet comme le flux d'énergie allant vers la pointe de la fissure <sup>3</sup>. Ce flux,  $G$ , est appelé taux de restitution de l'énergie. Il correspond à l'énergie transmise à la pointe, par unité de longueur de propagation de la fissure, et par unité de longueur transverse [39]. Il est donc homogène à une tension de surface. Le terme de « restitution » renvoie au fait que l'énergie élastique est transférée du volume du solide vers la pointe de la fissure. L'importance de l'intégrale de Rice vient de ce que, étant une expression du taux de restitution de l'énergie indépendante du contour, elle permet d'écrire directement une relation liant la forme asymptotique du champ élastique au chargement *macroscopique* sur le système considéré. Il suffit, pour obtenir cette relation, d'utiliser la définition de l'intégrale de Rice, prise d'une part sur un contour infinitésimal entourant la pointe, et d'autre part sur le bord du système, où est appliqué le chargement.

L'intégrale de Rice prise sur le contour extérieur est une forme quadratique fonction du chargement, qui dépend du problème particulier envisagé. En ce qui concerne le contour entourant la pointe, la forme asymptotique des champs élastiques (4.12) et (4.13) donne, une fois insérée dans la définition (4.15) de l'intégrale de Rice :

$$G = \frac{1 - \sigma^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{K_{III}^2}{2\mu}, \quad (4.20)$$

formule connue sous le nom de *formule d'Irwin*. Ainsi, le taux de restitution de l'énergie,  $G$ , qui n'est autre que la quantité d'énergie mise à la disposition de la

---

<sup>3</sup>Il existe une interprétation équivalente [47] de  $G$  faisant appel à la force fictive s'exerçant sur la pointe de la fissure.

pointe de la fissure pour se propager, par exemple pour briser des liaisons chimiques, ne dépend que des coefficients d'intensité des contraintes. Ce résultat signifie qu'il est inutile de connaître la configuration détaillée du champ élastique pour savoir si la fissure va se propager, la condition pour cette propagation n'étant fonction que des trois coefficients  $K_{I,II,III}$ . Nous reviendrons plus bas sur les critères de délamination.

L'intégrale de Rice permet de comprendre la focalisation des contraintes près de la pointe de la fissure, et les lois d'échelle obtenues plus haut :  $u_{ij} \propto r^{1/2}$  pour les déplacements, et  $\sigma_{ij} \propto r^{-1/2}$  pour les contraintes. Envisageons en effet les divergences des déplacements  $u_{ij} \propto r^{-\lambda}$  compatibles avec la forme de l'intégrale de Rice,  $\lambda$  étant un exposant à déterminer. Les contraintes étant homogènes à une dérivée des déplacements, on a  $\sigma_{ij} \propto r^{-\lambda-1}$  au voisinage de la pointe d'une fissure. La densité d'énergie élastique  $w \propto \sigma_{ij} u_{ij}$  suit donc la loi  $w \propto r^{-2\lambda-1}$ . Soit  $J_r$  l'intégrale de Rice calculée sur un petit cylindre de rayon  $r$ . On tire de ce qui précède  $J_r \propto r^{-2\lambda+1}$ , étant donné qu'il faut intégrer  $w$  sur une surface, le cylindre, pour obtenir  $J_r$ . Ainsi, l'indépendance de contour pour  $J$ ,  $\frac{\partial J_r}{\partial r} = 0$ , implique que  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Nous verrons plus bas qu'il est impossible de généraliser cet argument aux fissures interfaciales lorsque l'on modélise le contact des lèvres par une loi de frottement de type Coulomb. Dans ce type de fissure, la divergence des contraintes suivra d'ailleurs une loi anormale.

## 4.4 Propagation quasi-statique d'une fissure

### 4.4.1 Position du problème

Nous avons jusqu'ici discuté la *statique* d'un milieu comportant une fissure prédéterminée. Pour clore cette partie consacrée à la fracture en milieu homogène, nous indiquons comment incorporer dans cette description l'avancée de la fissure. Nous nous bornerons au cas de la propagation quasi-statique : dans cette approximation, on détermine à tout instant la déformation du solide en considérant que la fracture est donnée, et en négligeant les effets inertiels. Reste donc à savoir comment, en retour, on modélise l'effet des déformations près de la pointe sur la propagation ou l'arrêt de la fissure, et sur son orientation.

La fissuration est un processus dissipatif et irréversible. Si l'on réalise qu'en plus elle prend place à des échelles si petites que l'approximation des milieux continus n'est plus toujours justifiée, et que les contraintes près de la pointe sont telles que l'élasticité linéaire ne s'applique plus, on se convaincra sans mal qu'il y a peu d'espoir d'arriver à une modélisation réaliste et détaillée de la fracture. Au voisinage de la pointe, il existe une région dans laquelle l'élasticité linéaire des milieux continus n'est plus vérifiée. Nous l'appellerons région de Barenblatt. Selon



les systèmes considérés, l'extension de cette zone est imposée par :

- les effets cohésifs : sur quelle distance les liens interfaciaux sont-ils si distendus <sup>4</sup> qu'ils s'écartent d'un comportement réversible, sans avoir toutefois complètement perdu leur capacité de rappel ?
- les effets élastiques non linéaires : quelle est la taille du tube entourant la pointe où le matériau répond de façon non linéaire, à cause d'effets de plasticité, ou de viscoélasticité par exemple ?
- en dernier lieu, la distance inter-atomique introduit une distance caractéristique en-deçà de laquelle il faut bien renoncer à la modélisation continue.

On trouvera plus loin une estimation de la taille de la région de Barenblatt pour chacun de ces cas de figures.

#### 4.4.2 L'approche de Barenblatt

Différents modèles ont été introduits pour représenter les effets cohésifs (les liens interfaciaux peuvent être modélisés par des ressorts qui se brisent à une certaine contrainte critique), ou plastiques par exemple. Barenblatt a montré qu'aux petites échelles de longueur correspondantes, la divergence des contraintes est régularisée. Il a aussi établi, et c'est un résultat fondamental pour la suite, que la propagation quasi-statique de la fissure correspond à :

$$G_B = \Gamma \quad (\text{propagation quasi-statique}), \quad (4.21)$$

où  $G_B$  est le taux de restitution de l'énergie, qui dépend du chargement extérieur ; il doit être évalué sur un contour dont la taille caractéristique est la taille de la région de Barenblatt. La seconde quantité dans cette équation,  $\Gamma$  est une tension de surface, caractéristique de l'interface, qui reflète la dissipation d'énergie accompagnant la propagation de la fissure. On l'appelle ténacité de l'interface. Pour un modèle de zone cohésive au moyen de ressorts qui cassent, par exemple, la ténacité  $\Gamma$  est reliée à la dissipation d'énergie lors de la rupture d'un ressort : c'est l'aire sous la courbe de la caractéristique  $F(\rho)$ ,  $F$  étant la force de rappel, et  $\rho$  l'allongement (cf. fig. 4.4).

Le critère de propagation ci-dessus peut donc se voir comme un bilan d'énergie traversant la frontière de la région de Barenblatt, rapporté à une unité de surface d'avancée de la fissure. Le taux de restitution  $G_B$  mesure l'énergie élastique transférée vers la pointe, alors que  $\Gamma$  mesure l'énergie dissipée au cours de l'avancée de la pointe, pour rompre les liaisons interfaciales par exemple. Un critère de propagation pour la fissure, qui inclurait le cas non quasi-statique, pourrait donc être :  $G_B \geq \Gamma$ , avec une propagation hors d'équilibre lorsque l'inégalité est stricte.

<sup>4</sup>La modélisation de la cohésion est particulièrement délicate, ne serait-ce que parce que les liaisons chimiques résistent beaucoup mieux à la compression qu'à l'extension.

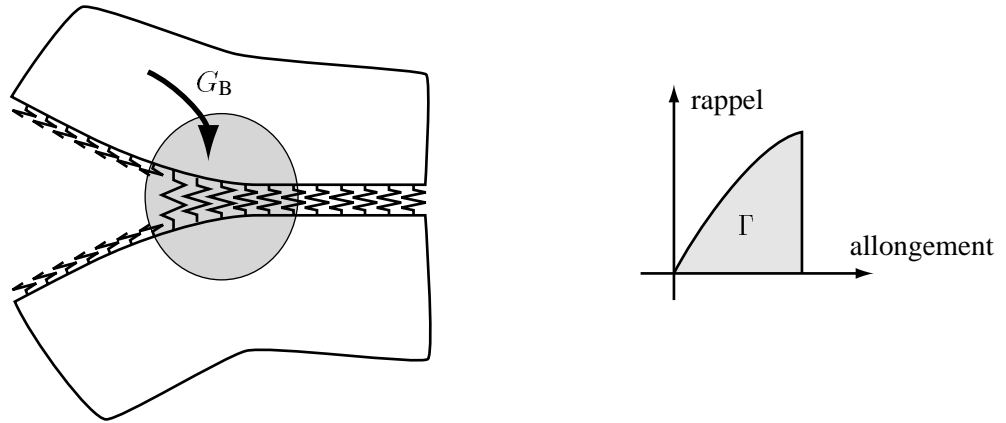


FIG. 4.4 – Région de Barenblatt pour un modèle de zone cohésif avec ressorts. Le bilan d'énergie à la traversée de la région de Barenblatt montre que, pour une propagation quasi-statique, le taux de restitution d'énergie,  $G_B$ , calculé par l'intégrale de Rice sur le bord de la région de Barenblatt, vaut la ténacité de l'interface,  $\Gamma$ . À droite, on montre comment la ténacité de l'interface est reliée à la dissipation lors de la rupture d'un ressort.

#### 4.4.3 Le critère de Griffith

Dans le critère (4.21) d'avancée de la fissure, les processus non linéaires complexes dans la zone de Barenblatt apparaissent exclusivement *via* la ténacité  $\Gamma$ . On peut donc oublier le détail de ces processus et ne retenir que la grandeur effective  $\Gamma$ . C'est heureux puisque nous avons noté qu'il était inenvisageable de modéliser fidèlement ce qui se produit dans région de Barenblatt. La ténacité  $\Gamma$  est déterminée expérimentalement, matériau par matériau. Si, ainsi, on oublie la région de Barenblatt, l'intégrale de Rice est indépendante de chemin, et on peut en fait évaluer le taux de restitution de l'énergie  $G_B$  sur n'importe quel chemin, par exemple sur un contour infiniment petit autour de la pointe :

$$G_{\text{pte}} \geq \Gamma \quad (\text{critère de propagation de Griffith}). \quad (4.22)$$

Ce critère avait été proposé par Griffith avant d'être établi plus rigoureusement par Barenblatt ; Griffith avait interprété  $\Gamma$  comme deux fois la tension de surface du matériau, ce qui est vrai dans la limite où seuls les effets cohésifs sont importants dans la région de Barenblatt. Nous verrons que pour les fissures interfaciales, les critères de Barenblatt (4.21) et de Griffith (4.22) peuvent différer sensiblement ; nous montrerons que l'on peut en attendre des effets physiques importants.

Enfin, la direction de propagation de la fissure en milieu homogène est régie par

un critère dit « de symétrie locale ». Ce critère empirique stipule que la propagation se fait dans une direction telle que le coefficient d'intensité des contraintes correspondant au mode de cisaillement,  $K_{II}$ , s'annule. L'idée est que si un cisaillement apparaît, il dévie la direction de propagation de la fissure. En fracture dynamique, il se peut que le  $K_{II}$  s'annule dans plusieurs directions différentes ; ceci conduit à un mécanisme qui pourrait être à l'origine des micro-branchements observés à grande vitesse de propagation [1].



## Chapitre 5

# Fracture interfaciale

### 5.1 Dépendance de mode des fissures interfaciales

En fracture interfaciale, le chemin de la fissure n'est pas régi par un principe de symétrie locale. L'interface représente en effet une forte inhomogénéité, et la fissure tend à la suivre. Nous ne considérons pas de fissures quittant ou traversant une interface, ce qui constitue pourtant un problème très important dans le domaine du génie des matériaux. Sous cette hypothèse, le chemin emprunté par la fissure est connu à l'avance, c'est l'interface. Les modes *I* et *II* coexistent à la pointe de la fissure — par souci de simplicité, nous nous restreindrons aussi à l'élasticité plane dans la suite, et ne considérerons plus le mode *III*. Il est pratique d'utiliser les variables  $G$  et  $\psi$  pour caractériser le champ asymptotique :  $G$  est le taux de restitution de l'énergie, défini par l'intégrale de Rice (4.15) sur un petit contour entourant la pointe ; il dépend de l'intensité du chargement. Le paramètre  $\psi$  est défini comme la phase dans le plan  $(K_I, K_{II})$ , mesurée dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ . Il est appelé paramètre de mixité modale et mesure l'importance relative des modes *I* et *II* à la pointe (cf. fig. 5.1). La fracture dans un milieu homogène correspondrait à  $K_{II} = 0$ , *i.e.*  $\psi = 0$ .

Une propriété remarquable des fissures interfaciales est que leur ténacité,  $\Gamma$ , c'est-à-dire la valeur critique du  $G$  qui entraîne la propagation de l'interface, dépend du mode de chargement, soit de l'angle  $\psi$  [33]. Nous verrons plus loin que cette propriété est essentielle pour expliquer la stabilité des cloques de délamination. Les courbes de ténacité  $\Gamma(\psi)$  ont été obtenues expérimentalement pour un grand nombre d'interfaces. La tendance presque universelle consiste en un sévère renforcement de la ténacité lorsque la proportion de mode *II* devient plus importante (cf. les données expérimentales reproduites sur la fig. 5.2). On parle de *dépendance de mode* de la ténacité de l'interface : il faut amener plus d'énergie

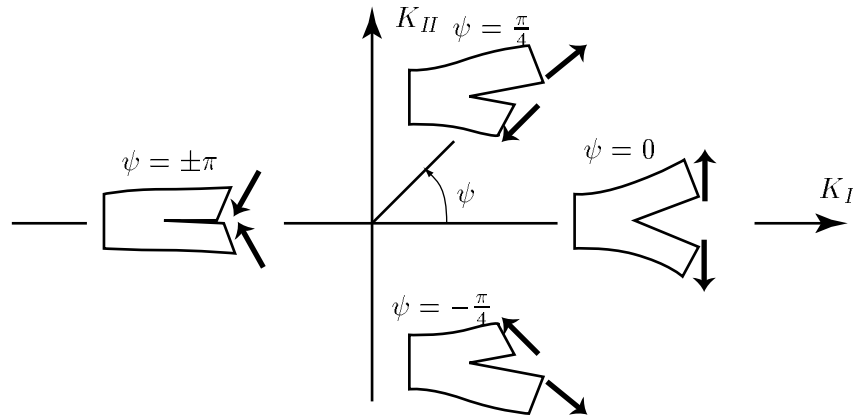


FIG. 5.1 – Le paramètre de mixité modale,  $\psi$ , définit l'importance respective des modes  $I$  et  $II$  à la pointe d'une fissure. Il est défini comme la phase dans le plan  $(K_I, K_{II})$  mesurée dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

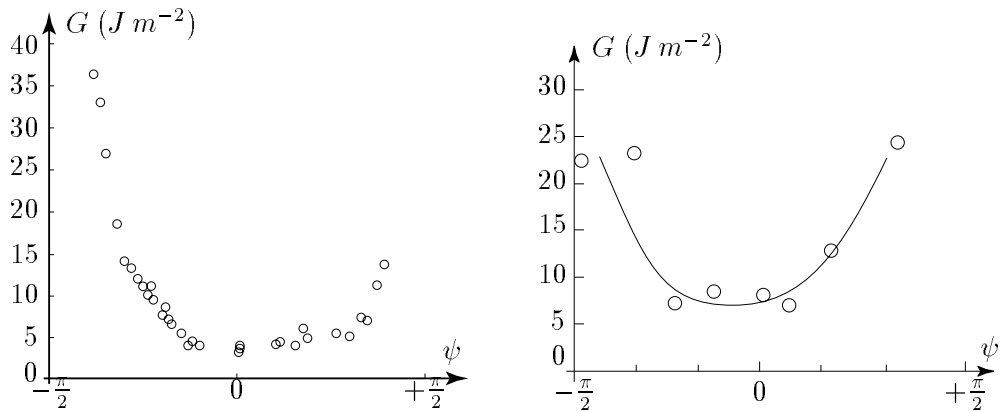


FIG. 5.2 – La dépendance de mode d'une interface : courbes expérimentales de ténacité pour des matériaux bi-couches obtenus par Liechti et Chai [42] pour une interface verre/epoxy (à gauche) et par Wang [74] pour une interface cuivre/aluminium (à droite).

à l'interface pour en fracturer une unité d'aire par cisaillement (mode  $II$ ), qu'en mode d'ouverture simple (mode  $I$ ). Cette dépendance de mode remet en cause les arguments du §4.4 ci-dessus, qui tendraient au contraire à prouver que  $\Gamma$  est une tension superficielle caractéristique de l'interface.

Plusieurs mécanismes ont été proposés pour rendre compte de cette dépendance de mode. Comme  $\Gamma$  rend compte de processus dissipatifs, les mécanismes candidats doivent être dissipatifs. Le rôle de la *plasticité* dans le voisinage de la pointe a été mis en avant [66, 71]. Nous considérons un autre mécanisme, dû au contact des lèvres près de la pointe [61].

## 5.2 Friction et dépendance de mode

On pourra noter que la ténacité de l'interface augmente justement quand la fissure tend à se refermer sous l'effet des contraintes appliquées : quand  $|\psi|$  croît jusqu'à la valeur  $\pi/2$ , la fissure se referme progressivement, l'importance relative du mode d'ouverture  $I$  décroissant par rapport au mode de cisaillement  $II$ . En même temps, les mesures expérimentales indiquent que la ténacité augmente fortement : la ténacité mesurée quand la fissure est en train de se refermer ( $|\psi| = \pm\pi/2$ ) est typiquement 2 à 10 fois plus grande que lorsque cette dernière est bien ouverte ( $\psi = 0$ ). Ce renforcement de  $\Gamma$  accompagnant la fermeture de la fissure suggère que la source de dissipation responsable de la dépendance de mode pourrait bien être une *interaction de contact* entre les lèvres de la fissure.

Nous avons voulu estimer l'effet de cette interaction de contact sur la ténacité, afin de savoir si la friction interfaciale pouvait rendre compte des profils expérimentaux de ténacité  $\Gamma(\psi)$ . Un modèle a été proposé par Evans et Hutchinson [26], pour étudier l'effet des aspérités à la surface des lèvres. Dans ce modèle, les auteurs ont mis évidence un effet de verrouillage frictionnel à la pointe de la fissure, lorsque le cisaillement écrase les aspérités d'une lèvre sur celles de l'autre lèvre (cf. fig. 5.3). Ce résultat est l'analogue exact, en théorie de la fracture, du verrouillage d'un solide sur un plan incliné. C'est un résultat bien connu que lorsque l'inclinaison du plan incliné n'excède pas l'angle de Coulomb, le solide reste au repos, même si l'on augmente la masse du solide. De même, des aspérités planes en contact peuvent-elles verrouiller la pointe d'une fissure, quelle que soit l'intensité des contraintes. L'analogue de l'angle du plan incliné est ici joué par l'angle d'inclinaison des aspérités,  $\varphi$ , qui est donc un paramètre essentiel : dans la limite où  $\varphi \rightarrow 0$ , tous ces effets disparaissent. Ce modèle ne prétend pas être quantitatif : on voit mal quelle valeur donner au paramètre  $\varphi$  d'une importance primordiale dans cette théorie. En second lieu, il est connu que le contact entre aspérités induit des contraintes très importantes. La plasticité entre alors en jeu, ce qui limite la

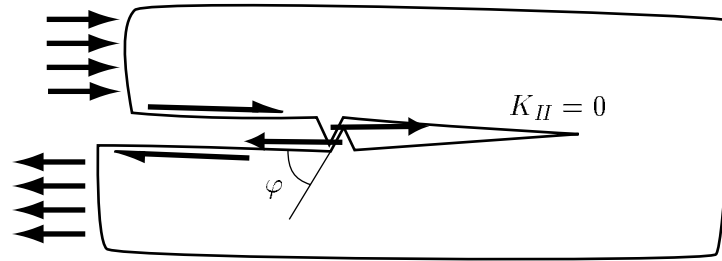


FIG. 5.3 – Modèle proposé par Evans et Hutchinson [26] pour étudier l'écrantage des contraintes à la pointe par des aspérités. Un verrouillage frictionnel est possible dans la région de contact entre aspérités.

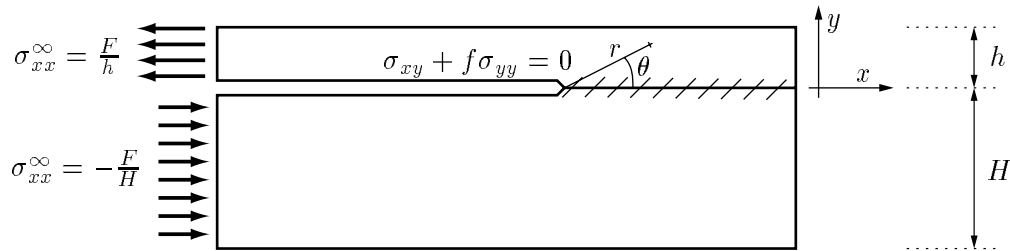


FIG. 5.4 – Le modèle introduit par Stringfellow et Freund [68] pour étudier l'influence de la friction entre les lèvres sur la ténacité d'une fissure.

possibilité de verrouillage d'une fissure par les aspérités.

### 5.3 Le modèle

Pour estimer le rôle de la friction interfaciale, nous avons donc choisi d'utiliser un autre modèle, qui se prête mieux à une approche quantitative. Ce modèle, introduit par Stringfellow et Freund [68], est présenté sur la figure 5.4. Il considère une fissure *refermée* : on suppose le chargement tel qu'en arrière de la pointe de la fissure, les lèvres se retrouvent plaquées l'une sur l'autre — nous verrons que cette situation se produit par exemple au cours de la délamination. On représente l'interaction de contact entre ces lèvres par une loi de Coulomb (proportionnalité entre pression de contact et cisaillement *via* un coefficient de Coulomb,  $f$ , constant). La dissipation à l'interface rend l'intégrale de Rice *dépendante* du contour : le membre de droite dans l'équation (4.16) n'est pas nul pour  $i = x, j = y$  car un cisaillement non nul  $\sigma_{xy}$  est transmis à l'interface. Notons  $G_{\text{ext}}$  la valeur de l'intégrale de Rice calculée sur le pourtour du système. Cette valeur est le taux de restitution



d'énergie rendu disponible par le chargement extérieur mais à cause de la dissipation frictionnelle à l'interface, le taux de restitution de l'énergie à la pointe est plus faible<sup>1</sup> :  $G_{\text{pte}} \leq G_{\text{ext}}$ . Comme l'interface se fissure à la pointe, c'est  $G_{\text{pte}}$  qui doit intervenir dans le critère de propagation : la fracture a lieu pour  $G_{\text{pte}} \geq \Gamma_{\text{intr}}$ , où  $\Gamma_{\text{intr}}$  est la ténacité intrinsèque de l'interface, introduite dans l'équation (4.22).

Comme en pratique il est possible de calculer  $G_{\text{ext}}$  connaissant le seul chargement extérieur, on définit la ténacité *effective*  $\Gamma_{\text{eff}}$  comme la valeur critique du taux de restitution *extérieure*,  $G_{\text{ext}}$ , permettant la propagation de la fracture. D'après ce qui précède,

$$\Gamma_{\text{eff}} = \gamma \Gamma_{\text{intr}} \quad \text{où } \gamma = \frac{G_{\text{ext}}}{G_{\text{pte}}} . \quad (5.1)$$

Le facteur  $\gamma$  mesure l'efficacité de l'*écranage* des contraintes appliquées, vues de la pointe de la fissure, par frottement à l'interface. Cette équation permet d'oublier la friction dans le critère de propagation de l'interface : il suffit d'utiliser la ténacité *effective* et le taux de restitution  $G_{\text{ext}}$ , calculable simplement en fonction du chargement appliqué.

Stringfellow et Freund ont évalué le renforcement  $\gamma$  de ténacité dû à la friction, en calculant le rapport  $G_{\text{ext}}/G_{\text{pte}}$  numériquement. Ils ont en premier lieu considéré une fissure en milieu homogène soumise à un chargement purement cisailant, avec un coefficient de friction à l'interface  $f = 0,5$ . Dans la configuration de la figure 5.4, leurs calculs indiquent que l'effet de la friction interfaciale est de renforcer la ténacité de l'interface d'un facteur environ  $\gamma_{\text{SF, hom}} - 1 = 0,20$ . Cet effet n'existe que lorsque la fissure est refermée ; cette valeur de  $\gamma$  permet donc d'estimer la contribution de la friction interfaciale à la dépendance de mode de l'interface. Dans ce modèle, la ténacité de l'interface est  $\gamma$  fois plus grande aux grandes valeurs du paramètre de mixité modale ( $|\psi| > \pi/2$ , fissure refermée) qu'aux faibles valeurs ( $\psi = 0$ , fissure bien ouverte).

Ce résultat apparaît décevant : les 20 % de renforcement de la ténacité prédits par ce modèle sont bien en deçà des facteurs deux ou plus obtenus dans les expériences (cf. fig. 5.2). Cela pourrait signifier que la friction interfaciale n'est pas un mécanisme intervenant dans la dépendance de mode.

Mais cela pourrait aussi signifier que ce modèle est incomplet. La discontinuité des propriétés élastiques film/substrat à la traversée de l'interface n'a justement pas été prise en compte : nous avons jusqu'ici considéré une fissure dans un milieu *homogène*, alors que la dépendance de mode est observée pour les fissures *inter-*

---

<sup>1</sup>La démonstration rigoureuse de cette inégalité, moins facile à établir qu'il n'y paraît, sera faite plus bas. Nous verrons qu'elle repose sur l'irréversibilité de l'ouverture de la fracture.

*faciales*<sup>2</sup>. Plusieurs indices suggèrent que cette discontinuité des propriétés élastiques joue un rôle important dans l'écrantage frictionnel du chargement. En effet, il est intuitivement clair que le film de la figure 5.4 est plus efficacement plaqué sur un substrat infiniment rigide, que sur un substrat fait du même matériau. D'autre part, si l'on cherche un développement perturbatif de l'écrantage frictionnel  $\gamma$  en fonction du coefficient de frottement  $f$ , on s'aperçoit que ce développement est *singulier* dans une fissure interfaciale, alors qu'il est régulier dans une fissure en milieu homogène. Cet argument est démontré dans l'article reproduit p. 89, au paragraphe 1.1, auquel nous renvoyons le lecteur. Le fait que le développement de  $\gamma$  devienne singulier pour des fissures interfaciales laisse penser que la friction peut avoir des effets *singulièrement* importants pour ce type de fissure.

## 5.4 Étude asymptotique près de la pointe

Les arguments ci-dessus indiquent qu'il faudrait évaluer l'écrantage frictionnel, pour un modèle d'*interface* avec friction entre les lèvres de la fissure. En particulier, il est important de tenir compte de la discontinuité des propriétés élastiques de part et d'autre de l'interface.

### 5.4.1 Exposant anormal $\lambda$ , nullité de $G_{\text{pte}}$

Dans la deuxième partie de leur article, Stringfellow et Freund ont précisément tenté de prendre en compte cette discontinuité des propriétés élastiques. Mais nous allons montrer que leur approche des fissures interfaciales est incohérente. Ces auteurs déterminent l'état d'équilibre élastique de leur modèle d'interface au moyen d'un algorithme de discrétisation du type éléments finis. Connaissant l'état élastique de l'interface dans un voisinage raisonnablement petit de la pointe, une intégrale de Rice permet d'estimer le taux de restitution de l'énergie  $G_{\text{pte}}$ . En comparant le résultat à l'intégrale de Rice sur un contour extérieur,  $G_{\text{ext}}$ , on en déduit la valeur de l'écrantage  $\gamma = G_{\text{ext}}/G_{\text{pte}}$ . L'incohérence de cette approche vient de ce que le taux de restitution de l'énergie à la pointe *est strictement nul pour toute fissure interfaciale*, résultat que nous allons établir ci-dessous :  $G_{\text{pte}} = 0$ . L'estimation numérique de  $G_{\text{pte}}$  au moyen d'un contour petit mais non réduit à un point est en ce sens arbitraire. En effet, les résultats qui suivent montrent que cette estimation de  $G_{\text{pte}}$  tend lentement vers  $G_{\text{pte}} = 0$  pour un contour de plus en plus petit. La valeur de  $\gamma$  calculée par Stringfellow et Freund dans le cas d'une fissure

<sup>2</sup>On ne sait pas si cette dépendance de mode disparaît ou non pour les fissures en milieu homogène, car elle devient tout simplement inobservable, à cause du principe de symétrie locale : une fissure se propage dans une direction telle que  $\psi = 0$ , et il n'y a pas de sens à parler de ténacité pour d'autres valeurs de  $\psi$ .

interfaciale est donc, au moins en partie, un artefact de la discrétisation en éléments finis.

Nous avons vu plus haut que la divergence des contraintes en  $\sigma_{ij} \propto r^{-1/2}$  dans les fissures en milieu homogène est reliée à un invariant d'échelle, l'intégrale de Rice : l'exposant  $-\frac{1}{2}$  est le seul compatible avec l'invariance de chemin de  $J$ . Afin de comprendre l'origine de la dépendance de mode, nous avons été amené à étudier une fissure interfaciale refermée, avec de la friction à l'interface. Or pour ce genre de fissure, la dissipation à l'interface fait que l'intégrale de chemin *n'est pas conservée*. Par conséquent, la divergence des contraintes ne suit pas nécessairement la loi  $\sigma_{ij} \propto r^{-1/2}$ . Il faut donc reprendre l'analyse asymptotique des contraintes du §4.2, pour le cas des fissures interfaciales.

Cette étude asymptotique de la fissure interfaciale a été initiée par Comninou et Dundurs. Nous y avons également contribué. Le contact de deux surfaces subissant un frottement de Coulomb se décompose en plusieurs états : glissement dans un sens ou dans l'autre (*slip* en anglais), ou verrouillage (*stick*). À chacun de ces états correspond une condition aux limites spécifique à imposer sur les lèvres de la fissure : proportionnalité du cisaillement et de la pression de contact dans le cas du glissement, avec un signe dépendant du sens de glissement ; constance du déplacement tangentiel dans le cas du verrouillage (cf. fig. 5.5). Différents états peuvent coexister le long d'une même interface : il peut par exemple y avoir glissement dans une région éloignée de la pointe, l'interface étant verrouillée au voisinage de cette dernière. Nous n'aurons pas à tenir compte de ces complications supplémentaires : puisque nous cherchons la forme asymptotique des contraintes, nous ne considérerons que l'état de l'interface au voisinage de la pointe. Nous dirons alors que la fissure glisse ou qu'elle est verrouillée selon l'état de la région de contact jouxtant la pointe.

Comninou et Dundurs ont montré que, dans une fracture interfaciale refermée avec friction, la divergence des contraintes suit un exposant *anormal* — c'est-à-dire différent du classique  $-\frac{1}{2}$ . On introduit un coefficient  $\beta$  adimensionné qui mesure la discontinuité des propriétés élastiques à l'interface. Ce coefficient  $\beta$  est appelé deuxième paramètre de discontinuité élastique de Dundurs et vaut :

$$\beta = \frac{\mu_2(\kappa_1 - 1) - \mu_1(\kappa_2 - 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)}, \quad (5.2)$$

où  $\mu$  désigne le module de cisaillement introduit en (4.3), les indices 1 et 2 se rapportent à chacun des matériaux. Le paramètre  $\kappa$  est un coefficient de Poisson effectif. Comme pour une fissure dans un matériau homogène, l'étude de la fissure interfaciale refermée se fait au moyen des équations de l'élasticité *bidimensionnelle*. Deux types de situations permettent de se ramener à un problème bidimensionnel :

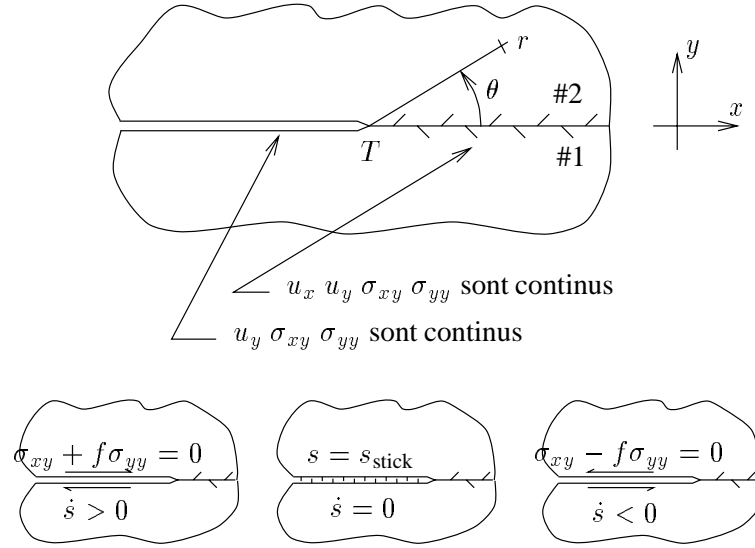


FIG. 5.5 – Le problème asymptotique pour une fissure interfaciale refermée. Une des conditions aux limites à l'interface dépend de l'état de la région de contact : glissement dans un sens ou dans l'autre, ou verrouillage.  $s(x)$  désigne le glissement à l'interface.

- dans le cas de *déformations planes* ( $u_z \equiv 0$ ),  $\kappa$  est défini par  $\kappa = (3 - 4\sigma)$  ;
- dans le cas de *contraintes planes*, ( $\sigma_z \equiv 0$ ), il faut définir  $\kappa = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}$ .

Les *déformations* seront par exemple planes si l'échantillon est cerclé par un cadre indéformable dans le plan de la fissure ( $xz$ ). Les *contraintes* seront planes si l'échantillon est libre de se dilater transversalement. Notons que dans le cas de matériaux identiques ( $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ), le paramètre  $\beta$  s'annule, ce qui justifie sa dénomination.

Une analyse similaire à celle ayant conduit à l'équation (4.12) permet d'obtenir l'expression asymptotique des tenseurs de contrainte et de déplacement au voisinage de la pointe refermée de la fissure interfaciale [17]. Nous ne donnerons que la forme explicite d'une composante des contraintes,  $\sigma_{\theta\theta}$  :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \theta) &= K(1 - \lambda)r^{-\lambda} \left\{ (2 - \lambda)(1 - \beta) \sin(\lambda\theta) \right. \\
 &\quad \left. + [2 - \lambda(1 - \beta)] \sin((2 - \lambda)\theta) \right\} \quad \text{avec } -\pi < \theta < 0, \\
 \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, \theta) &= K(1 - \lambda)r^{-\lambda} \left\{ (2 - \lambda)(1 + \beta) \sin(\lambda\theta) \right. \\
 &\quad \left. + [2 - \lambda(1 + \beta)] \sin((2 - \lambda)\theta) \right\} \quad \text{avec } 0 < \theta < \pi.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Les autres composantes du tenseur de contraintes ont une expression semblable,

avec notamment une dépendance en  $r$  en  $r^{-\lambda}$ . Ces formules peuvent être retrouvées au moyen de l'analyse complexe [23, 48].

Le coefficient  $K$  est une constante multiplicative indéterminée — on a en effet utilisé les équations de l'élasticité linéaire. C'est un coefficient d'intensité des contraintes qui généralise le  $K_{II}$  de la fracture classique. Le mode  $I$  n'existe plus car la fissure est refermée. On peut vérifier que cette solution vérifie en particulier la continuité de la pression de contact de part et d'autre de la fissure :  $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, -\pi) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, \pi)$  et de part et d'autre de la portion intacte de l'interface :  $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, 0)$ .

L'exposant  $\lambda$  peut être déterminé en remplaçant les composantes  $\sigma_{r\theta}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  données en (5.3) dans la loi de Coulomb à l'interface :  $\sigma_{xy} + \text{sgn}(\dot{s})f\sigma_{yy} = 0$  en  $\theta = \pm\pi$ . On notera bien que le coefficient de frottement est partout accompagné d'un signe qui dépend du sens de glissement des lèvres :  $s(x)$  désigne le glissement  $s = u_x^2 - u_x^1$  au bord de la fissure. On ne considérera pas ici la possibilité de verrouillage (*stick*),  $\dot{s} \equiv 0$  ; pour une discussion complète, on se reportera à l'article reproduit plus loin en p. 87. La réinjection des solutions données en (5.3) dans la loi de Coulomb conduit à l'équation pour l'exposant  $\lambda$  :

$$\text{ct}(\lambda\pi) = \text{sgn}(\dot{s})f\beta. \quad (5.4)$$

La densité d'énergie élastique est proportionnelle au produit des contraintes par les déformations et diverge donc avec une puissance  $-\lambda + (-\lambda + 1)$ . Pour que l'énergie élastique totale près de la pointe reste finie, il faut donc que  $-2\lambda + 1 > -1$ , soit  $\lambda < 1$ . Nous reviendrons sur cette borne.

On voit que si la discontinuité élastique à l'interface est absente <sup>3</sup> ( $\beta = 0$ ) ou s'il n'y a pas de frottement ( $f = 0$ ), l'exposant classique  $\lambda = \frac{1}{2}$  est solution de (5.4). *A contrario*, l'équation (5.4) montre qu'en présence d'une discontinuité élastique *et* de frottement à l'interface, la divergence des contraintes ne se fait plus en  $r^{-\frac{1}{2}}$ . La présence d'un exposant *anormal* <sup>4</sup>  $\lambda \neq \frac{1}{2}$  a soulevé d'importantes questions, restées sans réponses pendant longtemps : elles touchent d'une part à la possibilité de singularités anormalement fortes et d'autre part à la définition d'une ténacité effective. Ci-dessous, nous détaillons ces questions et indiquons les réponses que nous avons pu y apporter.

<sup>3</sup>Le fait que l'exposant classique  $\lambda = \frac{1}{2}$  soit retrouvé pour une fissure homogène ( $\beta = 0$ ) avec frottements ( $f = 0$ ) ne doit pas faire penser qu'il n'y a pas de dissipation. Le coefficient d'intensité des contraintes  $K_{II}$  est en effet diminué en présence de frottement, même si la nature de la singularité n'est pas affectée par les frottements.

<sup>4</sup>Le terme d'*anormal* a été choisi pour marquer l'opposition avec la théorie classique de la fracture — fracture d'un matériau homogène — où  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

### 5.4.2 Problèmes soulevés par $\lambda \neq \frac{1}{2}$

Il s'agit d'abord de savoir quelle détermination de  $\lambda$  choisir dans l'équation (5.4). Si les signes relatifs du glissement  $\dot{s}$  et du paramètre de discontinuité élastique  $\beta$  sont tels que  $\beta \dot{s} < 0$ , alors  $\text{ct}(\lambda \pi) < 0$ . Dans ce cas, la plus forte singularité compatible avec la condition d'énergie totale finie,  $\lambda < 1$ , est anormalement forte :  $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ . De telles divergences sont particulièrement problématiques. D'une part, nous avons vu précédemment que seul l'exposant  $\lambda = \frac{1}{2}$  est compatible avec un taux de restitution fini et non nul à la pointe. Pour  $\lambda > \frac{1}{2}$ , le taux de restitution à la pointe est infini. Que signifierait alors un flux d'énergie infini vers la pointe ? D'autre part, on comprend mal pourquoi les frottements, au lieu de régulariser la divergence des contraintes en  $r^{-\frac{1}{2}}$ , la rendrait encore plus aiguë. Si les divergences anormalement fortes sont physiques, comment les interpréter ? Si elles ne sont pas physiques, pourquoi sont-elles solutions des équations ?

Une deuxième série de questions concerne le glissement dans le sens opposé à celui envisagé ci-dessus, c'est-à-dire quand  $\beta \dot{s} > 0$ . Dans l'équation (5.4),  $\text{ct}(\lambda \pi) > 0$ , donc  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ . La singularité est maintenant anormalement faible et le taux de restitution de l'énergie à la pointe *s'annule*. Dans l'équation (5.1), la ténacité effective devient alors infinie. Quel sens donner à cette ténacité infinie, alors qu'expérimentalement, les fissures interfaciales se propagent bel et bien ? Ne peut-on pas trouver une meilleure définition de la ténacité ? De façon équivalente, comment peut-on continuer à utiliser le taux de restitution de l'énergie dans le critère de propagation (4.22), alors qu'il est nul ? Ces divergences anormales ont-elles un sens physique et des effets observables, ou faut-il simplement les voir comme une bizarrerie du modèle ?

Pour insister sur le côté indéniable de ces difficultés, nous rappellerons que Stringfellow et Freund [68], dans leur simulations numériques, ont déterminé un taux de restitution  $G_{\text{pte}}$  par une intégrale de Rice sur un petit contour. Or nous avons montré que leur modèle de friction interfaciale conduit à des exposants anormaux et à un taux de restitution de l'énergie qui est soit nul, soit infini à la pointe. Leur approche ne semble donc pas cohérente. . . ce qui en un sens est heureux puisqu'elle ne rend pas compte d'une forte dépendance de mode.

### 5.4.3 Élimination des divergences fortes

Nous espérons avoir contribué à éclaircir les points soulevés plus haut. Alors que la possibilité de divergences anormalement fortes ( $\lambda > \frac{1}{2}$ ) n'avait pas pu être écartée, nous avons montré que celles-ci sont *des solutions des équations qui ne sont jamais réalisées*. En considérant en détail l'histoire de la fissure, et, en particulier, en envisageant la possibilité qu'une zone de verrouillage frictionnel appa-

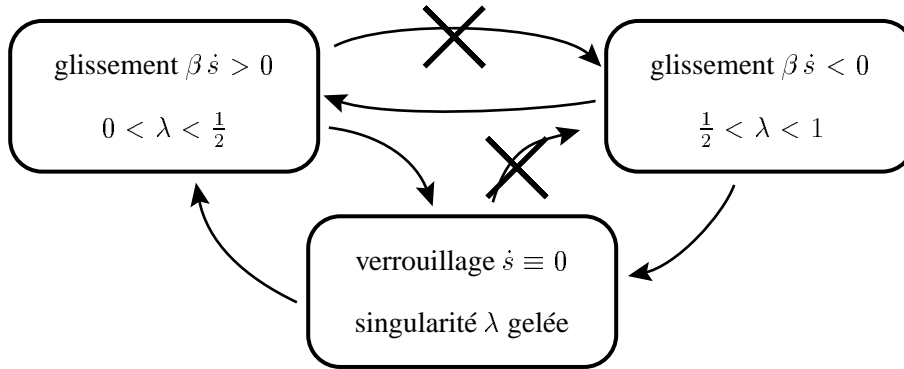


FIG. 5.6 – Schéma de la démonstration donnée dans l'article [5], prouvant que les divergences anormalement fortes sont des solutions des équations qui ne sont jamais réalisées. Les cases représentent l'état du contact de Coulomb à la pointe et les flèches les changements d'état possibles. La transition vers une singularité anormalement forte ne peut se faire ni par disparition d'une zone de *stick* à la pointe (croix inférieure), ni par changement instantané du sens de glissement (croix supérieure). Il y a donc alternance entre un glissement donnant lieu à une singularité faible (case de gauche), et un verrouillage (case du bas). La singularité reste *faible*.

raïsse ou disparaisse à la pointe, nous avons été amené à conclure que les singularités anormalement fortes ne peuvent jamais apparaître (cf. fig. 5.6). Cette démonstration utilise explicitement l'hypothèse que la propagation de la fissure est irréversible. Par conséquent,  $\lambda$  peut être déterminé par l'équation :

$$\text{ct}(\lambda\pi) = f|\beta|, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}. \quad (5.5)$$

Cette équation est beaucoup plus simple que (5.4) car dans cette dernière, il fallait connaître le sens du glissement entre les lèvres  $\text{sgn}(\dot{s})$  — donc l'histoire de la fissure — pour en déduire  $\lambda$ . Par (5.5), il apparaît que  $\lambda$  est en fait une constante de l'interface, indépendante de l'histoire du chargement. Nous renvoyons à l'article reproduit en page 87 pour les détails de cette démonstration.

Le fait que nous ayons pu écarter définitivement la possibilité de singularités anormalement fortes en prouvant  $\lambda < \frac{1}{2}$  répond du même coup à la première famille de questions : le taux de restitution de l'énergie à la pointe ne peut pas devenir infini (à moins d'autoriser la propagation rétrograde de la fissure). Les frottements, conformément à l'intuition, régularisent bien les divergences. En ce sens, le modèle de frottement de Coulomb à l'interface est donc cohérent, ce qui n'était pas évident à première vue.

Mentionnons quelques propriétés remarquables de l'interface, établies au passage dans l'article [5] en p. 87 :

- le glissement entre les lèvres ne peut se faire que dans un seul sens au voisinage de la pointe. Ce sens, intrinsèque à l'interface, est imposé par le signe du coefficient de discontinuité élastique,  $\beta$ . Il est défini par  $\beta \dot{s} > 0$  ;
- si l'on tente d'imposer un cisaillement opposé au sens de glissement intrinsèque, le glissement est empêché par la formation d'une bulle près de la pointe de la fissure : les lèvres s'ouvrent en arrière de la pointe (cf. fig. 4 p. 98). Ceci explique l'observation de bulles dans certaines simulations numériques [40, 41, 68] ;
- si l'on applique un cisaillement dans le sens autorisé mais que l'on en relâche l'intensité, le glissement dans le sens interdit est évité par l'apparition d'une zone de verrouillage (*stick*) au voisinage de la pointe (cf. fig. 3 p. 97) ;
- le coefficient d'intensité des contraintes  $K$  ne peut qu'augmenter en intensité tant que la fissure ne se propage pas. Cette remarque pourrait être importante pour l'étude de la fatigue. Au cours d'un cycle de chargement sur une interface tel que la fissure ne progresse pas, le coefficient d'intensité des contraintes,  $K$ , n'est *pas* cyclique mais croît irréversiblement : la fatigue est emmagasinée à la pointe.

## 5.5 Dépendance de mode induite par la friction

### 5.5.1 Une première approche

Si nous avons répondu à la première famille de questions, en écartant définitivement la possibilité de divergences anormalement fortes, il reste maintenant à élucider la deuxième série de question : sachant que les singularités sont anormalement faibles, comment définir une ténacité ? Et surtout, comment quantifier l'effet de la friction sur la dépendance de mode de la fissure, notre motivation initiale ?

Nous avons pris le parti de ne pas considérer l'exposant anormal comme une simple curiosité de notre modèle d'interface. Au contraire, nous avons pensé que la présence d'un exposant anormal dans les équations devait correspondre à des effets mécaniques bien mesurables. L'équation (5.1) conduit à une ténacité effective infinie,  $\Gamma_{\text{eff}} = \infty$  puisque  $G_{\text{pte}} = 0$ . C'est, après tout, parfaitement cohérent. En effet, l'annulation de  $G$  à la pointe (puisque  $\lambda < \frac{1}{2}$ ) signifie que l'énergie élastique apportée par le chargement extérieur est *intégralement* dissipée dans la région de contact. Le flux allant à la pointe est strictement nul. La propagation de la fissure nécessite au moins de briser les liaisons à l'interface et on s'attend à ce que cette propagation ne soit pas possible sans flux d'énergie vers la pointe. On s'attend donc à un verrouillage frictionnel de la fissure (elle ne peut pas se propager), ce qui, en



termes de ténacité effective s'écrit bien  $\Gamma_{\text{eff}} = \infty$ .

Cet argument est, en un sens, encourageant. Si la ténacité d'une fissure interfaciale refermée était infinie, la dépendance de mode prédite par notre modèle serait... infinie :  $\Gamma_{\text{eff}} = \Gamma_{\text{intr}}$  pour une fissure ouverte ( $|\psi| < \pi/2$ ) et  $\Gamma_{\text{eff}} = \infty$  quand le chargement referme la fissure ( $|\psi| > \pi/2$ ). Ceci accrédite l'idée que le frottement peut expliquer la forte dépendance de mode, à condition de tenir compte correctement de la discontinuité des propriétés élastiques à l'interface (importance du paramètre de discontinuité élastique  $\beta \neq 0$  dans tout ce qui précède).

### 5.5.2 Définition cohérente du taux de restitution $G$

L'approche ci-dessus a beau être encourageante, elle est un peu simplificatrice et doit être affinée pour au moins deux raisons. D'une part, parce que, dans leurs simulations numériques, Stringfellow et Freund n'ont pas observé cette annulation de  $G_{\text{pte}}$  : utilisant un contour raisonnablement petit (un vingtième de l'épaisseur du film sur la figure 5.4), l'intégrale de Rice qu'ils calculent numériquement [68] est loin d'être nulle. Ceci semble incompatible avec les résultats analytiques présentés ici et doit être expliqué. D'autre part, parce que la propagation des fissures interfaciales est couramment observée dans les expériences et que le raisonnement «  $\lambda$  est plus petit que  $\frac{1}{2}$  donc  $G_{\text{pte}} = 0$ , donc la fissure ne peut pas avancer » semble mis en défaut par les faits.

Pour des valeurs typiques de paramètres élastiques, l'exposant  $\lambda$  est très faiblement anormal. Dans l'article reproduit en p. 159, nous évaluons son ordre de grandeur à :

$$\left| \lambda - \frac{1}{2} \right| \sim 0,025. \quad (5.6)$$

Au paragraphe 12, p. 62, un raisonnement en loi d'échelles nous a permis d'établir que l'intégrale de Rice prise sur un petit contour autour de la pointe varie, en fonction de la taille  $r$  de ce contour, comme :

$$J_r \propto r^{-2\lambda+1} = r^{2(\frac{1}{2}-\lambda)}. \quad (5.7)$$

Le dernier exposant est donc positif mais numériquement petit. Par conséquent, la décroissance de  $J_r$  est très lente [22] : pour que sa valeur soit divisée par deux, il faut que la taille du contour d'intégration,  $r$ , soit divisée par  $\exp\left(\frac{\ln 2}{2(1/2-\lambda)}\right) \sim 10^6$ . Si, à strictement parler, l'intégrale de Rice s'annule sur un contour infiniment petit autour de la pointe ( $G_{\text{pte}} = J_{r=0} = 0$ ), l'approche de la limite est extrêmement lente quand le contour est réduit à un point. Ceci explique que les simulations numériques Stringfellow et Freund [68] n'aient pas observé l'annulation de  $G_{\text{pte}}$ .

Ceci met aussi en lumière la naïveté du raisonnement qui voudrait que la ténacité soit infinie, au motif que, formellement, le taux de restitution s'annule à la pointe. Si la valeur numérique de  $G_{\text{pte}}$  déterminée par Stringfellow et Freund [68] dépend implicitement de la résolution numérique ( $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ), la valeur analytique  $G_{\text{pte}} = 0$  ne peut pas non plus être utilisée telle quelle pour déterminer la ténacité de l'interface.

Quel contour faut-il alors utiliser pour calculer un taux de restitution de l'énergie qui puisse remplacer  $G_{\text{pte}}$  dans la définition (5.1) de la ténacité ? Cette définition de la ténacité repose, on s'en souvient, sur le critère de propagation de Griffith (4.22) :  $G_{\text{pte}} \geq \Gamma_{\text{intr}}$ . C'est donc dans ce critère qu'il faut modifier la définition du taux de restitution de l'énergie. Il est ici opportun de se rappeler que le critère de Griffith a été établi de façon quasi-rigoureuse par Barenblatt. Le raisonnement de Barenblatt a pu sembler superflu : en théorie classique de la fissure, il confirme *a posteriori* le critère de Griffith. Cependant, et c'est fondamental, *il ne conduit pas au critère de Griffith* dans le cas de la fracture interfaciale avec friction.

En reprenant le raisonnement de Barenblatt et, notamment, l'équation (4.21), nous allons pouvoir écrire un critère de propagation qui présente deux avantages sur le critère de Griffith : d'une part, il ne fait pas intervenir de taux de restitution à la pointe  $G_{\text{pte}}$ , dont la nullité soulevait de nombreuses difficultés ; d'autre part, c'est un critère qui est établi de manière quasi-rigoureuse, alors que le critère de Griffith se veut simplement « heuristique ».

L'idée importante qui ressort du travail de Barenblatt est que l'on ne peut prétendre appliquer le modèle de l'élasticité linéaire des milieux continus aux petites échelles près de la pointe : en présence de fortes contraintes, des effets non linéaires y deviennent importants (plasticité, cohésion de l'interface, etc.) et, à supposer même que l'on dispose d'un matériau parfaitement élastique, l'hypothèse des milieux continus n'est pas valable aux échelles atomiques. Il faut donc introduire une région au voisinage de la pointe, la région de Barenblatt, que l'on regarde comme une boîte noire. Soit  $\delta$  la taille caractéristique de cette région. Barenblatt montre comment déduire d'un bilan d'énergie à l'échelle  $\delta$  le critère de propagation (4.21). Ce critère ressemble au critère de Griffith. Il présente néanmoins l'avantage de relier explicitement la ténacité  $\Gamma$  à la dissipation dans la région de Barenblatt, et, surtout, il explicite l'échelle à laquelle il faut calculer le taux de restitution de l'énergie : cette échelle est  $\delta$ . Le taux de restitution de l'énergie qui doit remplacer  $G_{\text{pte}}$  dans la définition de la ténacité effective est donc  $G_{\text{B}}$ . Ce taux de restitution est donné par une intégrale de Rice sur un contour de taille caractéristique  $\delta$  :  $G_{\text{B}} = J_{r=\delta}$ . Comme nous avons vu que la décroissance de  $J_r$  en fonction de  $r$  est très lente, la connaissance de l'ordre de grandeur de  $\delta$  suffit. La ténacité

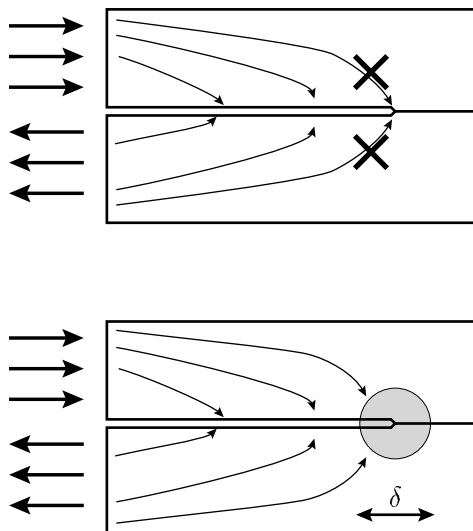


FIG. 5.7 – Représentation schématique des flux d'énergie dans le solide. Le flux d'énergie allant dans la pointe est strictement nul (en haut), car  $\lambda < \frac{1}{2}$ . Cependant, notre modèle ne prétend pas reproduire la réalité aux échelles inférieures à  $\delta$ , taille de la région de Barenblatt. Comme sur la figure 4.4, c'est donc  $G_B$ , et non  $G_{pte}$ , qu'il faut utiliser dans un critère de délaminéation :  $G_B$  s'obtient par une intégrale de Rice sur un contour de taille petite mais *finie*,  $\delta$ . Par suite, la longueur  $\delta$  permet de définir une ténacité  $\Gamma_{eff}$  grande mais *finie*.

effective doit donc être définie comme :

$$\Gamma_{eff} = \gamma \Gamma_{intr} \quad \text{où } \gamma = \frac{G_{ext}}{G_B}, \quad G_B \text{ calculé à l'échelle } \delta. \quad (5.8)$$

### 5.5.3 Application à l'estimation des effets frictionnels

L'introduction de l'échelle  $\delta$  permet de résoudre les questions auxquelles nous étions confrontés : comme taux de restitution de l'énergie, il ne faut pas choisir le flux allant *exactement* à la pointe mais celui entrant dans la région de Barenblatt (cf. fig. 5.7). Le premier contour est un point, le deuxième est microscopique mais la différence est de taille, car l'annulation de  $J_r$  pour  $r \rightarrow 0$  est extrêmement lente.

Nous avons utilisé cette approche dans la deuxième partie de l'article « Mode dependence and the delamination of thin films » (cf. p. 156 *et sq.*). Cela nous a permis d'évaluer numériquement la contribution de la friction à la dépendance de mode d'une interface. La valeur du paramètre  $\delta$  est critique. Pour une interface

parfaitement cassante, *i.e.* pour laquelle la plasticité est confinée au voisinage immédiat de la pointe,  $\delta$  peut être très petit : quelques centaines de distances interatomiques s'il s'agit d'une interface entre solides cristallins [9]. Si  $\delta$  est petit,  $J_r$  peut décroître sensiblement avant l'échelle ultime  $\delta$ , d'où un important écrantage frictionnel de la pointe, et une ténacité effective élevée. Si, au contraire, les matériaux sont très plastiques,  $\delta$  pourra être plus grand de plusieurs ordres de grandeur, et  $G_{\text{pte}} = J_{r=\delta}$  ne sera que peu différent de sa valeur macroscopique. L'augmentation de la ténacité effective due à la friction est alors plus faible.

Dans l'article reproduit en p. 156, nous avons étudié le cas d'une interface idéalement cassante entre deux matériaux cristallins, cas de figure qui maximise les effets frictionnels. Nous avons utilisé les estimations données par Barenblatt pour la taille  $\delta$  de la région cohésive,  $\delta = 100 a$ , où "a" est une distance inter-atomique. Ces calculs montrent (cf. p. 160) que l'effet de la friction est d'augmenter la ténacité apparente de l'interface par un facteur :

$$\gamma - 1 = 1.21. \quad (5.9)$$

La ténacité fait donc plus que doubler. Cette valeur numérique a été calculée pour les valeurs typiques suivantes, les mêmes que dans l'article original de Stringfellow et Freund : modules élastiques variant dans un rapport  $E_f/E_d = \frac{1}{4}$  entre film et substrat, et coefficient de Poisson identique  $\sigma_f = \sigma_s = 0,3$ . On a pris comme coefficient de friction  $f = 0,5$ .

En négligeant la dissipation frictionnelle intervenant aux échelles inférieures à la résolution numérique (soit, en dessous d'un vingtième de l'épaisseur du film), Stringfellow et Freund [68] ont calculé un renforcement de ténacité dû à la friction :  $\gamma_{\text{SF}} - 1 = 0,47$ . Pour des matériaux cassants, il nous a fallu réviser cette estimation de  $\gamma$  à la hausse : la comparaison avec (5.9) montre que quasiment les deux tiers de l'écrantage frictionnel se produisent en fait sur des échelles *très petites* devant l'épaisseur du film. Le rôle important des petites échelles est à mettre en relation avec la présence d'un exposant anormal : la friction qui se produit près de la pointe, où la pression de contact diverge, a des effets *singuliers* car elle affecte l'exposant de la divergence des contraintes ( $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ) et pas seulement son intensité.

Ainsi, notre modèle montre que la friction peut faire varier la ténacité du simple au double, lorsque le mode de chargement varie. Ce renforcement de ténacité, plus élevé que ce qui a été estimé auparavant dans la littérature, est aussi plus conforme aux valeurs expérimentales de la dépendance de mode. Expérimentalement, l'amplitude de variation de la ténacité est d'un facteur 3 à 10 lorsque la fissure se referme. Notre estimation  $\gamma = 2,21$ , bien que toujours en deçà, devient du bon ordre de grandeur. Le frottement des lèvres à l'interface semble donc pouvoir expliquer, au moins en partie, la dépendance de mode des interfaces.

Le modèle étudié ici ne s'applique que lorsque l'interface est *refermée*. Nous avons vu plus haut que lorsque le cisaillement est dans le sens opposé à la direction intrinsèque de l'interface, il se forme une bulle près de la pointe. Notre estimation de la ténacité ne vaut donc que lorsque le sens de cisaillement est *conforme* au sens intrinsèque de l'interface, c'est-à-dire pour  $|\psi| > \pi/2$  et  $\psi$  du même signe que  $\beta$ . Avec un cisaillement opposé, il y a, du fait de la bulle, moins de contact entre les lèvres, et l'on s'attend à ce que les effets frictionnels soient moins importants. Ceci pourrait expliquer l'asymétrie de la ténacité observée dans certaines expériences [42, 71].

Enfin, nous avons considéré le cas d'une fissure idéalement cassante, ce qui, en minimisant la taille  $\delta$  de la région de Barenblatt, maximise du même coup les effets frictionnels. On sait, d'autre part, que, dans les interfaces non idéalement cassantes, la plasticité induit une dépendance de mode [66, 71]. Frottement et plasticité sont donc deux mécanismes qui contribuent à la dépendance de mode. Le poids respectif de leur contribution dépend de la fragilité de l'interface considérée.

## 5.6 Conclusion

L'étude poussée d'un modèle de fissure interfaciale avec friction solide nous a permis de montrer sa cohérence. Certains paradoxes apparents, comme la possibilité de divergences anormalement fortes, ont en effet pu être écartés. Ce résultat a été rendu possible par la prise en compte de *l'histoire* de la fissure. En passant, nous avons mis à jour des propriétés assez remarquables de l'interface fissurée : croissance irréversible du coefficient d'intensité des contraintes si la fissure ne se propage pas (même en cas de chargement cyclique), verrouillage frictionnel permettant à la pointe de conserver la plus grande valeur jamais atteinte du coefficient d'intensité des contraintes, réponse fortement asymétrique à un cisaillement (glissement dans le sens autorisé, formation d'une bulle dans le sens interdit). La richesse des comportements obtenus s'explique par les fortes non-linéarités présentes dans le modèle : on utilise à chaque instant l'élasticité linéaire mais, d'une part, les conditions aux limites du frottement de Coulomb varient de façon non linéaire (en fonction du sens de glissement, et avec la possibilité de verrouillage), et, d'autre part, l'état du système ne dépend pas seulement du chargement instantané mais aussi de son histoire (cf. p. 91 pour l'origine de cette historicité, et [31] pour un autre exemple de système mécanique où la friction introduit une dépendance par rapport à l'histoire). Cette dépendance par rapport à l'histoire du chargement explique que les singularités fortes  $\lambda > \frac{1}{2}$  puissent être solutions des équations sans jamais se voir réalisées.

Ayant ainsi établi la cohérence du modèle, nous sommes revenus à notre mo-

tivation initiale : nous voulions estimer l'influence des frottements sur la ténacité effective, afin de savoir si la friction interfaciale peut rendre compte de la dépendance de mode observée dans les expériences. Le critère de propagation de Griffith s'est avéré impossible à utiliser : la divergence des contraintes est anormalement faible en présence de frottement près de la pointe, ce qui interdit d'utiliser le taux de restitution de l'énergie à la pointe. Nous avons exploité une justification micro-mécanique du critère de Griffith, due à Barenblatt. Les arguments de ce dernier montrent qu'il faut définir le taux de restitution de l'énergie par une intégrale de Rice non pas à la pointe mais autour d'une région de taille *finie*  $\delta$ , la région de Barenblatt. En théorie classique de la fracture, la petite taille  $\delta$  de la région non linéaire n'intervient pas *in fine* dans le critère de propagation, et l'argument de Barenblatt peut sembler superflu car il aboutit au critère de Griffith. Cependant, dans le cas d'une fissure avec un exposant anormal  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ , il est essentiel de conserver la taille  $\delta$  car la limite  $\delta \rightarrow 0$  devient singulière (la ténacité diverge). Nous avons donc pu estimer l'influence de la friction sur la ténacité effective de l'interface. L'écrantage frictionnel aux petites échelles, matérialisé dans les équations par l'anormalité de l'exposant  $\lambda$ , s'est avéré essentiel : pour une fissure fragile, il explique presque les deux tiers du surcroît de ténacité dû à la friction. La révision à la hausse des estimations antérieures est plus compatible avec les mesures expérimentales de la dépendance de mode.

Le parti-pris de créditer d'une réalité physique l'exposant anormal  $\lambda$  se trouve ainsi justifié. Il semble qu'il ne faille pas seulement voir cet exposant anormal comme une « curiosité » du modèle, car des effets bien mesurables ont été mis en avant (renforcement de la ténacité dû aux petites échelles). En mécanique de la fracture, il existe bien d'autres situations où apparaissent des exposants anormaux, par exemple lorsqu'une fissure traverse une interface. Des critères de propagation « heuristiques » sont alors souvent utilisés pour remplacer le critère de Griffith, par exemple le critère de He et Hutchinson [32]. La méthode présentée ici pour écrire un critère de propagation de l'interface en présence d'exposants anormaux présente l'avantage d'être déductive.

Enfin, il nous semblerait intéressant de mesurer la dépendance de mode d'une fissure avant et après immersion dans un lubrifiant — l'effet du lubrifiant étant de diminuer, voire d'éliminer, la friction interfaciale. Cette expérience n'a pas encore été réalisée à notre connaissance. Nous l'appelons de nos vœux, car elle permettrait une vérification expérimentale du rôle du frottement dans la dépendance de mode.

## **Chapitre 6**

**Article à paraître dans  
*J. Mech. Phys. Sol.***





# Asymptotic Study of the Interfacial Crack with Friction

B. Audoly

*Laboratoire de Physique Statistique de l'École Normale Supérieure,  
associé au CNRS, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.*

---

## Abstract

We study a model of interface crack in which contact of the crack faces obeys a Coulomb law of friction. For such cracks, the possibility that the stress has a stronger singularity than  $r^{-1/2}$  near the tip has been reported. In this paper, we demonstrate that these strong singularities can in fact be discarded, because they would suppose a backward propagation of the crack. In passing, we prove that near-tip slip is possible in one direction only, which is imposed by the sign of the elastic mismatch. The locking of the stress intensity factor during a non-monotonic cycle of loading is pointed out, as well as the formation of a bubble near the tip under certain loading conditions.

*Key words:* A. fracture; B. friction; B. layered material; A. stress intensity factor.

---

## 1 Introduction

The understanding of the mechanical properties of layered materials is a challenge with many potential applications. These materials are nowadays widely used in the industry, and their structural performances are limited by a variety of mechanisms. Among them is the propagation of interfacial cracks, to which we restrict our attention. As for cracks in homogeneous media, the propagation of interface cracks is believed to depend on the asymptotic expansion of the stress near the crack tip. In this paper, we study the structure of the singularity of the stress at the tip.

We consider a crack propagating quasi-statically at the interface between dissimilar materials. Because of the elastic mismatch of the materials joining

---

<sup>1</sup> Basile.Audoly@lps.ens.fr



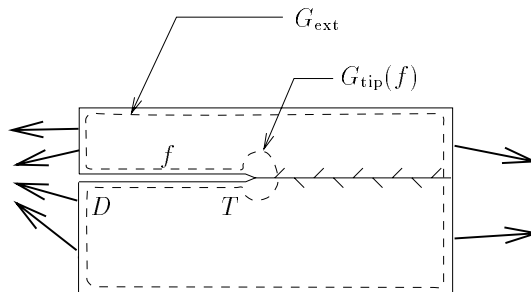


Fig. 2. Path of integration used to calculate the dissipation of the energy release rate,  $G$ , for a fixed, arbitrary, external loading (bold arrows).

faces by a Coulomb law of friction. The corresponding boundary conditions are shown in figure 1. In the contact zone, three regimes are possible: the crack faces can slip in either direction, or stick. One of the boundary conditions changes accordingly. Since we make an asymptotic analysis near the crack tip, we shall not be concerned with the possibility that several stick and slip zones coexist along the interface (COMNINOU and DUNDURS, 1979): we only consider the region touching the crack tip.

Before mentioning important results obtained by Comninou and Dundurs for this model of crack, we present simple arguments showing that interfacial friction near the crack tip yields singular effects. Our point is to show that, because of friction, our model cannot be approached by conventional crack analysis.

### 1.1 Interfacial friction as a singular perturbation

We consider a bimaterial with a partially cracked interface. A fixed, arbitrary, external loading is applied on the sample. For sake of simplicity, we assume that the interface is fully closed, and that slip takes place near the tip (this assumption is not essential). We study the dependence of the energy release rate (MALYSHEV and SALGANIK, 1965) at the tip,  $G_{\text{tip}}$ , on the friction coefficient,  $f$ , for this fixed external loading (see figure 2). We make a perturbation analysis, and we seek an expansion of  $G_{\text{tip}}(f)$  in powers of  $f$ . At zeroth order, there is no dissipation ( $f = 0$ ); by conservation of the Rice integral (RICE, 1968a-b), the energy release rate at the tip is then given by the external loading:  $G_{\text{tip}}^{[0]} = G_{\text{ext}}$ . When friction is turned on, the energy release rate becomes contour dependent. By a straightforward use of the Rice integral on the contour depicted in figure 2, the frictional dissipation of the energy release rate

in the contact zone  $[DT]$  reads:

$$G_{\text{ext}} - G_{\text{tip}} = \int_{[DT]} (-\sigma_{xy}) \frac{\partial s(x)}{\partial x} |dx|, \quad (2)$$

where we remind that  $s$  is the relative shift across the interface. By the Coulomb law of friction, the contact shear stress is proportional to the contact pressure:  $\sigma_{xy} = \pm f \sigma_{yy}$ , with a sign that depends on the direction of slip. The previous equation therefore leads to the first order expansion of  $G_{\text{tip}}(f) = G_{\text{tip}}^{[0]} + f G_{\text{tip}}^{[1]} + \dots$  with:

$$G_{\text{tip}}^{[1]} = \pm \int_{[DT]} \sigma_{yy}^{[0]}(x) \frac{\partial s^{[0]}(x)}{\partial x} |dx|, \quad (3)$$

where the quantities appearing in the r.h.s. member must be evaluated in the absence of friction.

We now perform a dimensional analysis of the integrand: let  $r = |x - x_{\text{tip}}|$  be the distance to the tip along the interface. In the absence of friction, conservation of the J-integral near the tip imposes the scaling law:  $\sigma_{yy}^{[0]}(r) \propto r^{-1/2}$ , from which  $s^{[0]}(r) \propto r^{1/2}$  can be derived. The integrand in the last equation therefore scales like  $(x - x_{\text{tip}})^{-1}$  near the tip, and the integral (3) giving  $G_{\text{tip}}^{[1]}$  diverges logarithmically near the tip: the expansion of the energy release rate at the tip in powers of  $f$  is singular. This result indicates that interfacial friction can have strong effects near the crack tip. Indeed, the conventional crack theory does not apply to our problem: we shall see below that the stress divergence near the crack tip does not satisfy the usual scaling law:  $\sigma \propto r^{-1/2}$ .

### 1.2 Expansions obtained by Comninou and Dundurs

We now turn to the direct study of the stress singularity near the tip when interfacial friction is considered, and no longer consider expansions in small  $f$ . We present results obtained by COMNINO and DUNDURS (1979).

Comninou and Dundurs have solved the static linear 2D elasticity equations near the tip of a closed interfacial crack; they consider slip of the crack faces against each other. They obtain a full expansion for the near-tip stress in the materials, the leading term of which reads (COMNINO and DUNDURS, 1977, 1980b):

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = C \Sigma_{ij}(\theta) r^{-\lambda}, \quad (4)$$

where  $(r, \theta)$  are polar coordinates with origin  $T$ ,  $\Sigma_{ij}(\theta)$  are universal functions of  $\theta$  given by COMNINOU and DUNDURS (1980b).  $C$  is a stress intensity factor which depends on the external loading. As shown in figure 1, the coefficient of friction,  $f > 0$ , comes in the equations with a sign that depends on the direction of slip,  $(\text{sgn } \dot{s})$ , and they indeed propose that the exponent  $\lambda$  should be determined by:

$$\cot \lambda \pi = \text{sgn}(\dot{s})\beta f \quad \text{with } 0 < \lambda < 1. \quad (5)$$

For  $\lambda \geq 1$ , the elastic energy stored near the crack tip would be infinite: the proposed range for  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , therefore corresponds to the most diverging term in the expansion compatible with a finite energy. The fact that  $\lambda$  is generically different from  $\frac{1}{2}$  can be understood in the light of §1.1.

The relationship between the quantities  $s$  and  $\lambda$  is complex. On one hand,  $\lambda$  obviously depends on the direction of slip,  $(\text{sgn } \dot{s})$ , through equation (5). On the other hand, from equation (4) or [(3.18), DUNDURS and COMNINOU, 1979], the near-tip expansion of  $s$  has a leading term  $s \propto (x_{\text{tip}} - x)^{1-\lambda}$ ; therefore,  $s$  and  $(\text{sgn } \dot{s})$  in turn depend on  $\lambda$ . The quantities  $(\text{sgn } \dot{s})$  and  $\lambda$  are thus self-referencing. As a result, it is possible that  $(\text{sgn } \dot{s})$  and  $\lambda$  depend not only on the current loading, but also on the crack history: they should be determined by successive attempts to make the equations self-consistent (COMNINOU and DUNDURS, 1980b; DENG, 1994). For certain loading histories of the interfacial crack, it has been observed (DUNDURS and COMNINOU, 1979) that the singularity of the stress is smoother than  $r^{-1/2}$  ( $\lambda \leq \frac{1}{2}$ ). On the other hand, the possibility that  $\frac{1}{2} < \lambda < 1$  in equation (5) is problematic (p. 79, DUNDURS and COMNINOU, 1979); this eventuality, although not exemplified so far, has not been shown inconsistent either.

## 2 Singularity of the stress near the tip

In this section, we present new results about the singularity of the stress in the presence of friction. First, we prove that  $\lambda$  in fact cannot be larger than  $\frac{1}{2}$ . This is consistent with the intuition that friction tends to make the stress *less* divergent near the crack tip (as noted above,  $\lambda = \frac{1}{2}$  in the absence of friction); moreover, infinite energy flow towards the crack tip, which would occur for  $\lambda > \frac{1}{2}$ , are removed from the theory. Secondly, we show that  $\lambda$  is actually *independent* of the loading history, and that equation (5) can be replaced by a simpler one:

$$\cot \lambda \pi = |\beta|f \quad \text{with } 0 < \lambda < \frac{1}{2}. \quad (6)$$

We shall note  $\lambda_0$  the unique solution of this equation, which is now history independent:  $\lambda_0$  is a function of the materials constants only. Thanks to this result, the asymptotic study of a closed crack will be greatly simplified because equations (4) and (6) are no longer self-referencing:  $\lambda$ , as determined from equation (6), should simply be put into equation (4). The location of stick and slip zones along the interface, and the stress intensity factor  $C$ , however, remain history dependent.

### 2.1 The stress is less singular than $r^{-\frac{1}{2}}$

If the lips are slipping ( $\dot{s}(x_{\text{tip}}^-) \neq 0$ ), the expansion of the stress near the tip of a closed crack reads (DUNDURS and COMNINOU, 1979):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) = & C_{1a} \Sigma_{ij}^{1a}(\theta) r^{-1+\lambda_0} + C_{1b} \Sigma_{ij}^{1b}(\theta) r^{-\lambda_0} + C_{1c} \Sigma_{ij}^{1c}(\theta) r^0 + \\ & C_{2a} \Sigma_{ij}^{2a}(\theta) r^{+\lambda_0} + C_{2b} \Sigma_{ij}^{2b}(\theta) r^{1-\lambda_0} + C_{2c} \Sigma_{ij}^{2c}(\theta) r^1 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

This is the same expansion as in equation (4) with terms added beyond the dominant order. We also have used a trick to suppress artificially the time-dependence of the exponent in equation (4): from equation (5), the dominant exponent for the stress is  $\lambda = \lambda_0$  or  $1 - \lambda_0$ , depending on  $\text{sgn}(\beta \dot{s})$ . Both expansions have been written in the above equation, with the convention that one of these vanishes:

$$\text{if } \beta \dot{s} > 0 \text{ at } x = (x_{\text{tip}})^-, \quad C_{1a} = C_{2a} = \dots = 0 \quad (8\text{-a})$$

$$\text{if } \beta \dot{s} < 0 \text{ at } x = (x_{\text{tip}})^-, \quad C_{1b} = C_{2b} = \dots = 0. \quad (8\text{-b})$$

This convention expresses equation (5).

In the following, it will be convenient to introduce the index  $d$ , which we define as  $b$  if  $\beta \dot{s} > 0$  or  $a$  if  $\beta \dot{s} < 0$ : among the  $a$  and  $b$  terms in equation (7), only the  $d$  terms are non vanishing. We also define  $\lambda_{1a} = 1 - \lambda_0$  and  $\lambda_{1b} = \lambda_0$  for obvious reasons.  $\lambda_d = \lambda_{1a}$  or  $\lambda_{1b}$  is in the range  $0 < \lambda_d < 1$ .

As explained above, Comninou and Dundurs have found solutions to the equations of linear elasticity near the crack tip,  $T$ . In particular, they have given the asymptotic expression for the relative shift,  $s$ , and for the normal stress at the interface,  $N$ , in the slip zone [(3.18–19), DUNDURS and COMNINOU, 1979]:

$$s(x, t) = -\frac{1}{\mu^*} C_{1d} (x_{\text{tip}} - x)^{1-\lambda_d} \sin \lambda_0 \pi + \dots \quad (9\text{-a})$$

$$N(x, t) = \beta C_{1d} (x_{\text{tip}} - x)^{-\lambda_d} \sin \lambda_0 \pi + \dots, \quad (9\text{-b})$$

where  $\mu^*(\mu_2, \mu_1, \nu_2, \nu_1, \lambda)$  is a combination of the elastic modulus of the materials and  $\beta$  is the mismatch parameter defined in (1).

Consistency requires that the normal stress along the slipping part of the interface,  $N(x) = \sigma_{yy}(x, y = 0)$ , be compressive ( $N(x) \leq 0$ ), so that the lips are pressed one against the other. This yields [(3.40), DUNDURS and COMNINOU, 1979]:

$$\beta C_{1d} \leq 0. \quad (10)$$

We shall consider that this condition is automatically satisfied. Indeed, a tensile contact pressure  $N > 0$  would indicate that the crack is open near the tip, which, again, is not possible when  $\beta \neq 0$ .  $N \leq 0$  is in fact guaranteed by the tuning of the size of the contact region with the applied loading (AUDOLY, 1999).

We consider the possibility that the crack advances quasi-statically: the crack tip is at  $x_{\text{tip}}(t)$  at time  $t$ , and, we shall call  $v_{\text{tip}}(t) = \dot{x}_{\text{tip}}(t)$  the instantaneous crack tip velocity. The sign of  $(\beta \dot{s})$  needed in equations (8-a) and (8-b) can be obtained as follows; derivation of equation (9-a) with respect to time yields:

$$\beta \dot{s} = -\frac{\beta C_{1d}}{\mu^*} \sin \lambda_0 \pi \left( \frac{\dot{C}_{1d}}{C_{1d}} + (1 - \lambda_d) \frac{v_{\text{tip}}}{x_{\text{tip}} - x} \right) (x_{\text{tip}} - x)^{1-\lambda_d}. \quad (11)$$

$\mu^*$  is positive [(3.21), DUNDURS and COMNINOU, 1979] and  $\beta C_{1d}$  is negative from equation (10); the sign of  $(\beta \dot{s})$  near the tip in the last equation is thus given by the bracketed term:

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\beta \dot{s})|_{x=x_{\text{tip}}^-} &= \text{sgn} \left( \frac{d}{dt} \ln |C_{1d}| + (1 - \lambda_d) \frac{v_{\text{tip}}}{x_{\text{tip}} - x} \right) \\ &= \begin{cases} + & \text{if } v_{\text{tip}} > 0, \\ \text{sgn} \left( \frac{d}{dt} \ln |C_{1d}| \right) & \text{if } v_{\text{tip}} = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

where we have used  $\lambda_d < 1$ . Equation (12) holds under the conditions that  $C_{1d} \neq 0$  and that the lips are slipping in the vicinity of the crack tip ( $\beta \dot{s} \neq 0$ ). At this point, we recover the fact that singularities stronger than  $r^{-1/2}$  are absent when the crack propagates (DENG, 1994): then,  $\beta \dot{s} > 0$  from the equation above, and equation (5) shows that  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ .

We shall now review all the possible motions of the lips near the crack tip (slip in either direction, stick), and study the corresponding dynamics of  $C_{1a}$ . Let us first assume  $C_{1a} \neq 0$  and that the lips are slipping in such a direction

that  $\beta \dot{s} < 0$ ; then  $d = a$  and equation (12) shows that:

$$\text{if } \beta \dot{s}(x_{\text{tip}}^-) < 0 \text{ and } C_{1a} \neq 0, \quad \text{then } v_{\text{tip}} = 0 \text{ and } \frac{d}{dt} \ln |C_{1a}| < 0. \quad (13\text{-a})$$

If the lips are slipping in the other direction, it follows from equation (8-a) that:

$$\text{if } \beta \dot{s}(x_{\text{tip}}^-) > 0, \quad \text{then } C_{1a} = 0. \quad (13\text{-b})$$

Finally, if the lips are sticking near the crack tip, the expansion (7) is no longer valid. However, in this case, the relative slip displacement of the lips,  $s$ , is frozen to  $s = s_{\text{stick}}$ . Furthermore, if  $s_{\text{stick}}$  of the form (9-a) with  $d = a$  and  $C_{1a} \neq 0$  is put in the stick problem in figure 1 as a boundary condition, it is clear that the leading order of the stress remains given by equation (7). For this reason, the stress intensity factor  $C_{1a}$  is also frozen by the stick zone:

$$\text{if } \beta \dot{s}(x_{\text{tip}}^-) = 0 \text{ and } C_{1a} \neq 0, \quad \text{then } C_{1a} \text{ is constant in time.} \quad (13\text{-c})$$

Since we consider only quasi-static propagation of the cracks, all displacements are continuous functions of time, and  $C_{1a}(t)$  is continuous. Collecting equations (13-a)–(13-c), one shows that  $|C_{1a}(t)|$  decreases at all times. The only assumption that we now make on the crack history is very weak: we assume that the crack was not loaded sometime in the past. This is true, for example, if the sample was initially free of loads, as happens in most practical situations (note that we do not require that the loading has been turned on monotonically, like in (COMNINOU and DUNDURS, 1980a); this would be a much stronger assumption). In the case of delamination of thin films obtained by vapor deposition, for example, the mismatch strain which loads the interface crack appears progressively when the sample cools down after high temperature deposition (HUTCHINSON and SUO, 1991), hence  $C_{1a}(t = -\infty) = 0$ .

Under the assumption stated above,  $C_{1a}$  vanishes at all times, and divergences of the stress stronger than the usual inverse square root law are removed from the theory. This result is based on the irreversibility of the crack opening: in the preceding proof, a key argument was that the crack can only propagate forward—see equation (12).

## 2.2 The dominant exponent $\lambda$ is not history dependent

Let us now review the possible stick or slip states of the interface near the tip (at  $x = x_{\text{tip}}^-$ ). We shall write that there is near-tip stick when  $\dot{s}(x_{\text{tip}}^-) = 0$ , and



that there is *positive* near-tip slip when  $\beta \dot{s}(x_{\text{tip}}^-) > 0$ , and *negative* near-tip slip when  $\beta \dot{s}(x_{\text{tip}}^-) < 0$ . The near-tip slip direction determines the near-tip stress divergence: for positive near-tip slip, the stress intensity factor  $C_{1b}$  is generically non-vanishing (we remind that  $C_{1a}$  vanishes from §2.1); for negative near-tip slip, however, the near-tip stress divergence shall be suppressed because  $C_{1b} = 0$  from equation (8-b). We note that, by the same arguments as those used to derive equation (13-c),  $C_{1b}(t)$ , which is now the leading stress intensity factor, is a continuous function of time and is conserved during near-tip stick. Below, we establish that near-tip negative slip is not possible; this result will permit a definitive answer to the question of the history dependence of the exponent  $\lambda$ .

Assume, first, that positive near-tip slip takes place sometime in the crack history, and lasts until time  $t = t_0$ . At time  $t_0$ , the crack lips can *a priori* either start to stick near the tip, or to slip in the negative direction ( $\beta \dot{s} < 0$ ). According to Comninou and Dundurs, this change can be traced in the equations as follows: if the assumption  $\beta \dot{s}(x_{\text{tip}}^-) > 0$  is used at times later than  $t_0$ , either equation (10) or (12) becomes inconsistent (DUNDURS and COMNINO, 1979). We have mentioned that equation (10) is automatically satisfied; therefore, equation (12) must become inconsistent with  $\beta \dot{s}(x_{\text{tip}}^-) > 0$  at time  $t_0$ . As a result,  $v_{\text{tip}}(t_0) = 0$  and the stress intensity factor  $|C_{1b}^{\text{err}}|$ , calculated under the (erroneous) assumption  $\beta \dot{s}(x_{\text{tip}}^-) > 0$ , is strictly decreasing at times just after  $t_0$  (see figure 3). We shall label by “err” all quantities calculated under this erroneous assumption at times later than  $t_0$ .

That  $|C_{1b}^{\text{err}}|$  strictly decreases just after  $t_0$  obviously implies  $|C_{1b}^{\text{err}}(t_0^+)| > 0$ . Since  $C_{1b}(t)$  is a continuous function of time, the actual stress intensity factor  $C_{1b}$  satisfies:  $|C_{1b}(t_0^+)| = |C_{1b}(t_0^-)| = |C_{1b}^{\text{err}}(t_0^+)| > 0$  and, by continuity,  $C_{1b}$  remains nonzero during a time interval  $\Delta t > 0$  after time  $t_0$ . Using equation (8-b),  $\beta \dot{s}(x_{\text{tip}}^-) \geq 0$  on this finite interval  $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ . By assumption, positive slip ends at time  $t_0$ , hence stick starting at time  $t_0$ . Therefore, we have proved that when the crack faces stop slipping in the direction  $\beta \dot{s}(x_{\text{tip}}^-) > 0$  near the tip, a stick zone develops from the tip; moreover, this stick zone will continue to exist near the tip for a finite time interval before negative slip can eventually be reached ( $\Delta t > 0$ ).

We can now examine what happens when this stick zone disappears, say, at time  $t'_0$ . We remind that  $C_{1b}$  has been conserved during near-tip stick (see figure 3). Moreover,  $C_{1b}$  was non-vanishing when the stick zone appeared (see previous paragraph). Therefore,  $C_{1b}(t)$ , which, again, is continuous in time, is non-vanishing at times just after  $t'_0$ . From equation (8-b), negative near-tip slip cannot take place just after time  $t'_0$ , and the interface necessarily goes back to positive near-tip slip.

Finally, we use again the assumption that the crack was not loaded sometime

in the past:  $C_{1b}$  was then vanishing, and  $|C_{1b}|$  has necessarily started to increase as the loading has been turned on. Equation (12) shows that the system has then entered either state:  $\dot{s}(x_{\text{tip}}^-) = 0$  (stick near the tip), or  $\beta\dot{s}(x_{\text{tip}}^-) > 0$  (slip in the positive direction near the tip). At subsequent times, the system eventually goes from one state to the other, but slip in the forbidden direction,  $\beta\dot{s}(x_{\text{tip}}^-) < 0$ , can never be reached: at all times,

$$\beta \dot{s}|_{x=x_{\text{tip}}^-} \geq 0. \quad (14)$$

As a result, the dependence of  $\lambda$  on  $(\text{sgn } \dot{s})$  in equation (5) is made-up, and it is much easier to determine the exponent  $\lambda$  using equation (6). We hereby have proved the important result: the exponent of the divergent term in the stress expansion near the tip is  $-\lambda_0 \geq -\frac{1}{2}$ , and it does not depend on the loading history. It would be history-dependent only if the crack could propagate backwards.

### 3 Prevention of slip in the forbidden direction

In the previous section, we have established a striking property of the interface crack with friction: in the vicinity of the tip, slip can take place in one direction only, which depends on the sign of the elastic mismatch. Below, we point out two mechanisms that prevent slip in the opposite direction.

From equation (14), the applied loading tends to induce slip in the forbidden direction when the stress intensity factor obtained from the conventional crack analysis satisfies:  $\text{sgn } \frac{d}{dt} K_{II} = \text{sgn}(-\beta)$ . This can happen in two situations: first, when applied shear stress is compatible with the authorized slip direction ( $\text{sgn } K_{II} = \text{sgn } \beta$ ), but is decreasing in magnitude ( $d|K_{II}|/dt < 0$ ). This situation is typically encountered during cyclic loading sequences; it is studied in §3.1. The second situation is when the applied shear stress is opposite the intrinsic slip direction ( $\text{sgn } K_{II} = -\text{sgn } \beta$ ), and increasing ( $d|K_{II}|/dt > 0$ ): in §3.2, we study the effect of an applied shear conflicting with the intrinsic slip direction.

#### 3.1 Locking of the stress intensity factor

We consider a bimaterial with a partially cracked interface, submitted to a non monotonic sequence of loading, as in figure 3. For sake of definiteness, we consider the case  $\beta > 0$ , so that the slip direction near the crack tip imposed by equation (14) is  $\dot{s} > 0$ . The loading is assumed to be compatible with the

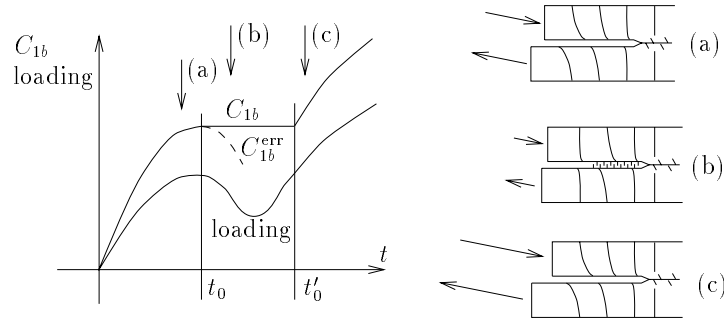


Fig. 3. Locking of the stress intensity factor  $C_{1b}$  during a non-monotonic variation of the loading, when imposed loading complies with the intrinsic slip direction. Crack is assumed not to propagate ( $v_{tip} = 0$ ).  $C_{1b}$  is proportional to loading as long as the loading is monotonic (a); at time  $t_0$ , the loading starts decreasing, and  $C_{1b}$  is locked by a stick zone near the tip (b). As the loading is increased again, the size of the stick zone decreases, and it disappears at time  $t'_0$  when the loading reaches again the same value as at time  $t_0$  (c).

intrinsic slip direction: it induces a stress intensity factor  $K_{II} > 0$ . The crack is assumed not to propagate ( $v_{tip} = 0$ ).

From the results of §2.2, the stress intensity factor  $C_{1b}$  increases proportionally to the loading, as long as the loads are increased monotonically; at time  $t_0$ , when the loading starts decreasing,  $C_{1b}^{err}$ , which is proportional to loading, also decreases; equations (12) and (14) then becomes inconsistent. This indicates that a stick zone develops near the crack tip. As the loading is being decreased more and more, it is reasonable to expect that the stick zone spreads outwards from the crack tip. Similarly, it can be expected that this stick zone will shrink when the loading is increased again. We remind that  $C_{1b}$  is frozen as long as a stick zone exists near the tip. At time  $t'_0$ , when the loading comes back to the same level as at time  $t_0$ , the system is in the same state as at time  $t_0$ , and the near-tip stick zone disappears.  $C_{1b}$  then again follows the applied loading.

In figure 3, the stress intensity factor  $C_{1b}$  is seen to increase irreversibly. Using equations (12) and (14), it can indeed be seen that  $|C_{1b}|$  increases as long as the crack does not advance. During decrease of the loads, a decrease of the stress intensity factor  $C_{1b}$  is prevented by the formation of a stick zone at the crack tip (see figure 3). This irreversible increase of the stress intensity factor is an example of memory effects in cracks. It may be relevant in the study of fatigue.

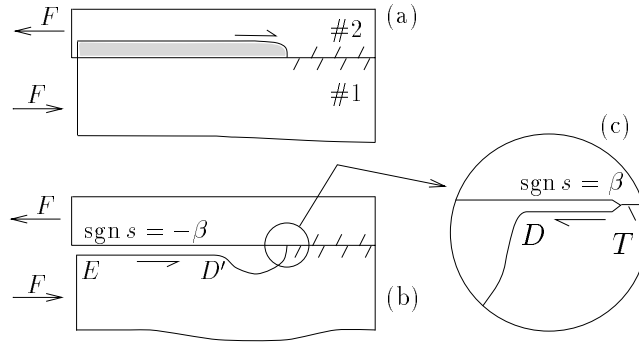


Fig. 4. Formation of a bubble near the crack tip when the loading is opposite the intrinsic slip direction of the interface. Macroscopic interpenetration is obtained in the conventional crack analysis (a). Interpenetration is forbidden in our model, and a bubble is formed near the tip (b). Very close to the tip, the crack closes again, and the intrinsic slip direction of the interface is recovered (c).

### 3.2 Formation of a bubble near the crack tip

We shall now discuss the state of the system when the imposed loading is opposite the intrinsic slip direction ( $\text{sgn } K_{II} = -\text{sgn } \beta$ ). Again, we consider a partially cracked bimaterial. Integration of equation (14) with respect to time is possible, because the crack remains closed near the tip at all times; assuming moreover, as in §2.1, that the crack was initially free of load, one obtains:  $\beta s(x, t) \geq 0$  at all times in the left vicinity of the crack tip, hence equation (15-a) below. We impose a loading such that  $\text{sgn } K_{II} = -\text{sgn } \beta$ ; then, the induced slip direction at the interface can be expected to be:  $\text{sgn } s = \text{sgn } K_{II}$ , hence equation (15-b).

$$\text{sgn } s = \text{sgn}(+\beta) \quad \text{imposed by near-tip analysis} \quad (15\text{-a})$$

$$\text{sgn } s = \text{sgn}(-\beta) \quad \text{imposed by external loading.} \quad (15\text{-b})$$

In these conditions, the direction of slip imposed by the material constant on one hand, and by the external loading on the other hand, are indeed in conflict.

Noticing that equation (15-a) applies at microscopic scales near the tip, while equation (15-b) has a macroscopic origin (the loading), one can solve the contradiction as follow: the materials contact along two different regions separated by a bubble (see figure 4). One region,  $[ED']$ , is macroscopic; the other one,  $[DT]$ , touches the crack tip  $T$  and has microscopic extent. In the macroscopic contact zone,  $[ED']$ , the direction of slip is imposed by the loading, and satisfies

$\text{sgn } s = \text{sgn } K_{II} = \text{sgn}(-\beta)$ . In the microscopic contact region near the crack tip, the slip direction is imposed by the materials constants:  $\text{sgn } s = \text{sgn } \beta$ . The bubble can therefore be seen as a transition between a region where the slip direction is imposed by the loading, as in equation (15-b), to a region where the slip direction is imposed by the properties of the interface, as in equation (15-a), when these directions are incompatible.

In figure 4, a bubble has been represented. For sake of simplicity, we take the material #2, above, infinitely rigid ( $\beta > 0$ ). Then, the authorized slip direction near the crack tip is  $\beta \dot{s} > 0$ , and the loading is assumed to impose  $K_{II} < 0$ , hence the direction of the applied force on the picture. We note that in this geometry, macroscopic interpenetration of the materials is obtained in the conventional crack analysis:  $K_I < 0$  (SUO and HUTCHINSON, 1990). Consideration of the interfacial contact is therefore essential. For the geometry in figure 4 ( $K_{II} < 0$ ), a bubble has indeed been observed numerically by STRINGFELLOW and FREUND (1993) when  $\beta > 0$ . Our analysis offers a simple interpretation to the apparition of this bubble.

An equivalent picture to the formation of the bubble can be given. In the conventional analysis of interface cracks, where contact of the crack lips is not considered, the stress intensity factors  $K_I$  and  $K_{II}$  are scale dependent in the presence of elastic mismatch (RICE, 1988):

$$(K_I + \nu K_{II})|_{l^*} = (K_I + \nu K_{II})|_l \left( \frac{l^*}{l} \right)^{2\varepsilon}, \quad (16)$$

where  $\varepsilon = \ln((1 - \beta)/(1 + \beta))/2\pi$  is a mismatch parameter, and  $l$  and  $l^*$  are two different lengthscales at which the stress intensity factor are evaluated. The parameter  $\varepsilon$  is numerically small for a variety of interfaces, and this scale dependence can often be neglected (RICE, 1988); this is why we have introduced stress intensity factors without mention to any lengthscale elsewhere in this paper. Assume that, for some given external loading, the crack closes at a macroscopic scale  $l$ :  $K_I|_l = 0$ . Using the equation above, and noticing that  $\text{sgn } \varepsilon = \text{sgn}(-\beta)$ , it is easily seen that  $K_I|_{l^*}$  becomes positive at lengthscales  $l^*$  smaller than  $l$  if  $\text{sgn } K_{II}|_l = \text{sgn}(-\beta)$ . That  $K_I$  becomes positive at small scales means that the crack reopens, hence the formation of a bubble for  $\text{sgn } K_{II} = -\text{sgn } \beta$ . Contrarily,  $K_I|_{l^*}$  becomes negative at small scales  $l^*$  when  $\text{sgn } K_{II}|_l = \text{sgn } \beta$ , which indicates that the crack is fully closed.

The formation of a bubble near the tip has important consequences for the interfacial crack: because a bubble is present only for a definite sign of  $K_{II}$ ,  $\text{sgn } K_{II} = \text{sgn}(-\beta)$ , the geometry of the contact regions at the interface strongly depends on this sign. As a result, the apparent toughness of the interface  $\Gamma(\psi)$  resulting from frictional screening of the external loads (STRINGFELLOW and FREUND, 1993) should be asymmetric (AUDOLY, 1999).

#### 4 Summary and conclusion

We have studied the concentration of stress near the tip of an interface crack with friction. We have shown that the dominant term in the expansion of the stress is given by equation (4), where the exponent  $\lambda$  is smaller than  $\frac{1}{2}$ : divergences stronger than in the conventional crack analysis ( $\sigma \propto r^{-1/2}$ ) have therefore been removed from the theory. In contrast to what had been postulated (COMNINOU and DUNDURS, 1980b; DENG, 1994), this exponent is history independent. Moreover, we have shown that the near-tip slip can occur in one direction only; this direction is imposed by the properties of the materials—see equation (14). All these results derive from the fact that the crack can only propagate forward. Two mechanisms prevent slip in the forbidden direction. First, a stick zone spreads outwards from the crack tip when a non monotonic cycle of loading is applied. Secondly, a bubble is nucleated near the tip when the imposed loading would induce slip in the forbidden direction.

A memory effect at the crack tip has been discussed: the crack tip retains the highest value of the stress intensity factor ever reached since the crack is arrested. It has also been pointed out that the formation of a bubble at the crack tip should make the effective toughness of the interface asymmetric. Finally, our analysis allows an approach of the interfacial crack with friction using the concept of energy release rate: infinite flows of energy towards the crack tip have been ruled out from the theory. In a subsequent paper (AUDOLY, 1999), the interface toughness induced by friction is investigated on the basis of the present analysis.

#### Acknowledgements

I wish to thank M. Adda-Bedia, J. W. Hutchinson, Y. Pomeau and J. R. Rice for helpful discussions, comments and encouragements, as well as R. Magis for technical support. The Laboratoire de Physique Statistique is associated with the CNRS, the École Normale Supérieure, and the Universités Paris 6 and Paris 7.

## References

- AUDOLY, B. 1999 Submitted to *J. Mech. Phys. Soli*
- COMNINOU, M. 1977 *J. Appl. Mech.* **44**, 780.
- COMNINOU, M. and DUNDURS, J. 1979 *Eng. Frac. Mech.* **12**, 191.
- COMNINOU, M. and DUNDURS, J. 1980a *J. Elasticity* **10**, 203.
- COMNINOU, M. and DUNDURS, J. 1980b *Res Mechanica* **1**, 249.
- DENG, X. 1994 *Int. J. Sol. Struct.* **31**, 2407.
- DUNDURS, J. and COMNINOU, M. 1979 *J. Elasticity* **9**, 71.
- HUTCHINSON, J. W. and SUO, Z. 1991 *Adv. Appl. Mech.* **29**, 63.
- MALYSHEV, B. M. and SALGANIK, R. L. 1965 *Int. J. Frac. Mech.* **1**, 114.
- RICE, J. R. 1968a In *Fracture: an advanced treatise* (edited by H. LIEBOWITZ), Vol p. 191. Academic press, New York.
- RICE, J. R. 1968b *J. Appl. Mech.* **35**, 379.
- RICE, J. R. 1988 *J. Appl. Mech.*, **110**, 98.
- STRINGFELLOW, R. G. and FREUND, L. B. 1993 *Int. J. Sol. Struct.* **30**, 1379.
- SUO, Z. and HUTCHINSON, J. W. 1990 *Int. J. Frac.* **43**, 1.





**Troisième partie**

**Mécanique de la délamination**



La technologie des films minces trouve des applications très variées dans l'industrie : amélioration des performances d'outils de découpe par utilisation d'une couche mince, qui peut être en carbone, en composés à base de titane, etc. ; fabrication de circuits intégrés, les films minces étant utilisés comme barrière chimique ; traitement de surface des polymères transparents remplaçant le verre dans l'industrie automobile, etc. [30]. La fiabilité mécanique de ces matériaux en couches pose parfois problème. Les couches minces sont en effet souvent obtenues par évaporation sur un substrat. Le matériau obtenu est pratiquement sans contrainte à la température de condensation (élevée) mais la différence de coefficient de dilatation thermique entre film et substrat entraîne l'apparition de contraintes dans le film lors du refroidissement à température ambiante. Ces contraintes se retrouvent supportées par l'interface et peuvent conduire à sa rupture (voir la deuxième partie).

Cette partie a pour objet un type particulier de rupture de matériaux composites : la délamination des films minces. Ce mode de rupture a beaucoup été étudié expérimentalement, et dans des conditions assez bien contrôlées. Le principe des expériences est le suivant : une couche mince est déposée sur un substrat par évaporation. Lorsque le coefficient de dilatation thermique du substrat est *supérieur* à celui du film, le refroidissement à température ambiante donne lieu à une contrainte résiduelle *compressive* dans le film. Si la compression est suffisante, le film tend à flamber, en se décollant du substrat. On dit que le film se délamine. Des profils de délamination remarquables sont alors observés, en particulier ceux en « fil de téléphone » : le film prend l'aspect d'un tunnel allongé aux bords sinueux et parallèles (cf. fig. 6.1). Cette configuration surgit dans des conditions expérimentales très diverses. Les ordres de grandeurs typiques sont, pour ces expériences : épaisseur du film de 200 nm, compression initiale du film valant 2 % de son module de Young, largeur de la région délaminée et période spatiale des oscillations de l'ordre de 15  $\mu\text{m}$  [29].

La délamination est encore assez mal comprise théoriquement, car les seules données expérimentales exploitables sont les clichés de profils de délamination. Ils ne rendent compte que très indirectement des phénomènes mécaniques à l'œuvre. L'instabilité de délamination résulte d'une compétition entre élasticité du film et cohésion de l'interface film-substrat. Ce phénomène réunit donc deux grandes branches de l'élasticité : fracture et élasticité des films minces. De plus, les structures en fil de téléphone se caractérisent par une forte universalité, et une certaine complexité. Tout ceci a de quoi plaire au physicien-mécanicien théoricien. La délamination permet aussi d'étudier indirectement les fissures interfaciales : l'observation directe de la région « cloquée » montre où la fissure a rompu. Une des propriétés essentielles des fissures interfaciales, leur dépendance de mode, a d'ailleurs été postulée dans le cadre de la délamination, avant de se trouver confirmée pour une

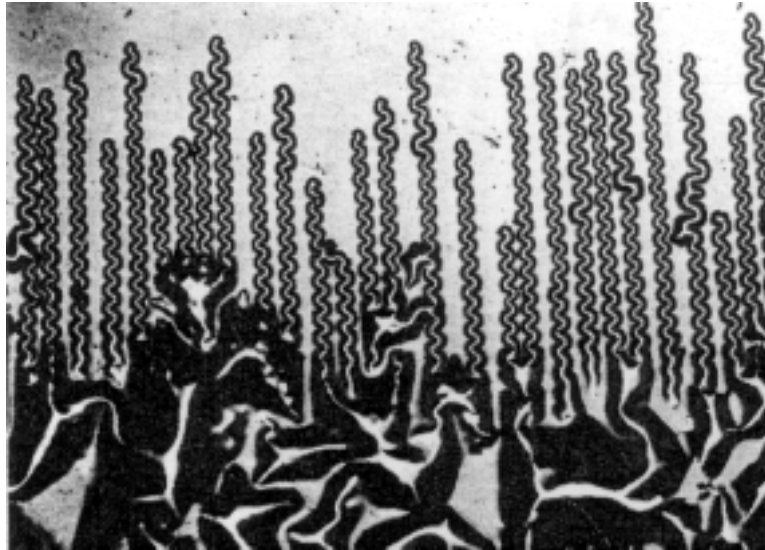


FIG. 6.1 – Observation expérimentale de la délamination en fil de téléphone, par Gille et Rau [29], sur une couche mince de carbone de 200 nm d'épaisseur obtenue par bombardement d'ions carbone sur du quartz. Ces motifs ont été observés dans une multitude d'expériences utilisant différents films, supports, et techniques de déposition [30].

vaste classe de matériaux bi-couches. En ce sens, la délamination des films minces est une sorte de problème modèle dont une meilleure compréhension pourrait intéresser les applications technologiques évoquées plus haut.

Dans la partie précédente, nous avons abordé l'aspect « fracture » de la délamination. Nous avons en particulier insisté sur le fait que la fissuration d'une interface se caractérise par sa dépendance de mode : l'interface est plus tenace en cisaillement (mode  $II$ ) qu'en écartement (mode  $I$ ). La présente partie porte, elle, sur l'aspect « élasticité des films minces », l'autre composante de la délamination. Nous commencerons par établir les équations de Föppl–von Kármán (F.–von K.). À titre d'exemple, nous les résoudrons pour deux types de cloques particuliers : le tunnel rectiligne infini, et la cloque circulaire. Nous montrerons que la structure des équations de F.–von K. *et* la dépendance de mode de l'interface permettent d'expliquer la stabilité des profils de délamination. Enfin, nous étudierons plus précisément les profils en fil de téléphone. L'étude de la stabilité d'une cloque rectiligne révélera que ces motifs peuvent être compris comme résultat d'une instabilité purement élastique.



## Chapitre 7

# Équations de Föppl–von Kármán

### 7.1 Dédution des équations de F.–von K.

Nous établissons ici les équations de Föppl–von Kármán, en suivant assez librement la référence [38]. Pour une dérivation rigoureuse (au sens mathématique) de ces équations, et pour l’extension au cas des coques, on pourra consulter [14]. Soit  $h$  l’épaisseur de la plaque, supposée très petite devant ses autres dimensions. Nous prendrons comme plan de repos de la plaque le plan  $(Oxy)$ , la direction normale étant  $z$ . La configuration de la plaque déformée est définie par le déplacement vertical  $\zeta(x, y)$ , appelé aussi *flèche*.

#### 7.1.1 Équations de F.–von K. sans flexion

Nous allons particulariser les équations de l’élasticité tridimensionnelle au cas d’une plaque mince. Les bords supérieurs et inférieurs de la plaque sont sans contraintes, ce qui se traduit par :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{h}{2}. \quad (7.1)$$

Comme l’épaisseur  $h$  est petite, et comme, par la condition d’équilibre mécanique  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$ , les dérivées des  $\sigma_{ij}$  dans des directions différentes sont toutes du même ordre de grandeur, on en déduit que les composantes des contraintes apparaissant dans l’équation (7.1) sont négligeables par rapport aux autres composantes des contraintes, et ce, *dans toute l’épaisseur de la plaque*. On écrira donc :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0. \quad (7.2)$$

Cette expression permet de simplifier les équations de Hooke. Dans les directions  $xz$ ,  $yz$  et  $zz$ , on est conduit aux relations suivantes :

$$u_{xz} = 0 \quad u_{yz} = 0, \quad (7.3a)$$

$$u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}). \quad (7.3b)$$

Les équations (7.3), injectées dans les relations de Hooke (4.4) restantes, permettent alors de relier les contraintes planes aux déformations *planes* :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left( u_{xx} + \frac{\sigma(1-\sigma)}{1-2\sigma} u_{yy} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left( u_{yy} + \frac{\sigma(1-\sigma)}{1-2\sigma} u_{xx} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{xy}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

On est donc ramené à de l'élasticité bidimensionnelle.

D'après l'équation (7.2), on ne doit retenir, dans la densité d'énergie élastique  $w = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij}$ , que la contribution bidimensionnelle  $w = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  décrivent les directions tangentes ( $x$  et  $y$ ). Il est donc tentant d'oublier purement et simplement la direction  $z$ , qui n'intervient ni dans l'énergie, ni dans les relations (7.4) reliant les contraintes aux déformations : négligeons les variations des grandeurs élastiques dans l'épaisseur  $z$  — nous aurons en fait à revenir plus bas sur cette approximation, car elle empêche de prendre en compte l'énergie de flexion. Moyennant cette hypothèse, l'énergie élastique de la plaque intégrée dans l'épaisseur vaut :

$$E_{\text{ext}} = \frac{h}{2} \iint \sigma_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} \, dx \, dy \quad \text{avec la condition d'équilibre} \quad \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (7.5)$$

Les grandeurs intervenant dans cette équation sont en fait moyennées dans l'épaisseur, et les indices  $\alpha$  et  $\beta$  sont bidimensionnels. Les composantes  $\sigma_{\alpha\beta}$  du tenseur de contraintes sont fonction des déplacements plans  $u_\alpha$  via les relations (7.4). L'indice « ext » rappelle que cette énergie ne prend pas en compte la flexion mais seulement l'extension.

Si les déformations et les contraintes faisant intervenir  $z$  ont pu être éliminées, il faut remarquer que la flèche, elle, est toujours présente dans l'énergie élastique (7.5). Dans la définition (4.5) du tenseur de déformations :

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_x}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_y}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta},$$



il est en effet légitime de négliger les termes quadratiques en les composantes tangentielles du déplacement,  $u_x$  et  $u_y$ . Cependant, comme  $\zeta$  n'intervient nulle part à l'ordre linéaire dans les équations de l'élasticité des plaques, on ne peut pas négliger le dernier terme de l'équation ci-dessus (non-linéarités en  $\zeta$ ). L'absence de termes linéaires en  $\zeta$  peut se voir comme une conséquence de la symétrie  $z \mapsto -z$ . Elle est aussi liée au fait que *toutes* les déformations normales d'un plan sont isométriques au premier ordre. Les déformations sont donc du deuxième ordre en  $\zeta$ . Ainsi, il faut prendre pour définition du tenseur de déplacement bidimensionnel :

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta}. \quad (7.6)$$

Nous verrons d'ailleurs plus bas que les déplacements verticaux sont beaucoup plus grands que les déplacements tangents dans la limite  $h \rightarrow 0$ . Cela justifiera *a posteriori* que l'on doit conserver les non-linéarités en  $\zeta$  seulement.

Il faut, pour trouver les équations d'équilibre des plaques, exprimer la stationnarité de l'énergie (7.5). Comme l'intégrande de cette énergie est une forme quadratique en les déformations, la variation de  $E_{\text{ext}}$  consécutive à une petite perturbation du déplacement,  $(\delta u_x, \delta u_y, \delta \zeta)$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{ext}} &= h \iint \sigma_{\alpha\beta} (\delta u_{\alpha\beta}) \, dx \, dy \\ &= h \iint \sigma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \right\} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Pour écrire la dernière équation, nous avons utilisé la définition (7.6) des déplacements, et la symétrie de  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Une intégration par parties donne :

$$= -h \iint \left[ \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} (\delta u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) \delta \zeta \right] \, dx \, dy. \quad (7.7)$$

La stationnarité de l'énergie par rapport aux déplacements tangentiels  $\delta u_\alpha$  conduit donc à nouveau à la condition d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \quad (7.8a)$$

Comme on l'a vu en mécanique de la fracture au §4.2, ces relations permettent d'introduire le potentiel d'Airy  $\chi$  dont dérivent les composantes tangentielles des contraintes :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}. \quad (7.8b)$$

Comme noté au §4.2, il est possible d'éliminer les deux fonctions  $u_x$  et  $u_y$  des trois composantes des contraintes  $u_{xx;yy;xy}$ . On en déduit une équation satisfaite par la fonction d'Airy. Au §4.2, nous avons ainsi montré que  $\chi$  était biharmonique — formule (4.8). La situation est ici légèrement différente, car nous avons dû conserver les non-linéarités en  $\zeta$  dans la définition des déformations. C'est toujours la combinaison  $\frac{\partial^2 u_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$  qui permet d'éliminer les déplacements tangentiels [38]. Écrite en fonction des contraintes au moyen des relations (7.4), cette relation conduit maintenant à :

$$\Delta \Delta \chi + E \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} = 0. \quad (7.9)$$

L'équation satisfaite par  $\chi$  est donc toujours biharmonique — ce qui est la marque de l'élasticité — mais un terme de source est apparu. Ce terme n'est autre que la courbure de Gauss. Nous y reviendrons.

Il reste à écrire la stationnarité de l'énergie (7.7) par rapport aux variations de la flèche :

$$-h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) = 0,$$

qui, en vertu de (7.8a), se réécrit :

$$-h \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0,$$

soit, en fonction du potentiel d'Airy :

$$-h \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (7.10)$$

Les équations (7.9) et (7.10) constituent les équations de Föppl–von Kármán *sans flexion* (on parle de membranes).

En l'état, ces équations n'ont qu'un intérêt très limité. En effet, si les conditions aux limites imposées à la plaque sont telles que des déformations isométriques et régulières de la plaque existent, l'énergie d'extension peut rester rigoureusement nulle pendant que la plaque se déforme. Les seuils de flambage qu'une telle énergie élastique permet de prédire sont tous nuls [cf. les formules (7.33) et (7.39) quand  $D = 0$ ]. Il est vrai que les contraintes critiques de flambage pour une plaque sont petites devant le module de Young mais la prise en compte de l'énergie de flexion permettra de calculer ces seuils, qui sont différents de zéro. Dans le cas de conditions aux limites telles que des déformations isométriques existent mais ne sont pas

régulières, la plaque se déforme de façon isométrique presque partout, et, près des singularités, l'énergie de flexion permet de régulariser ces singularités [57]. Si bien que la seule application des équations de Föppl–von Kármán sans flexion concerne les plaques subissant un étirement tangentiel non négligeable. En pratique, cette situation est rarement rencontrée puisque, comme nous l'avons vu dans la première partie, la petite épaisseur favorise les déformations isométriques. Il faut donc incorporer la contribution de la flexion dans l'énergie élastique de la plaque, bien qu'elle soit formellement petite — voir l'équation (1).

### 7.1.2 Incorporation de la flexion

La flexion de la plaque résulte dans une compression et une extension de part et d'autre de la surface moyenne. C'est donc l'hypothèse d'invariance des grandeurs élastiques avec la variable  $z$  qu'il faut revoir. L'équation (7.3a), que nous n'avons pas encore exploitée, montre que :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

soit en intégrant

$$u_x(x, y, z) = u_x(x, y, 0) - \frac{\partial \zeta}{\partial x} z, \quad (7.11a)$$

et d'autre part :

$$u_y(x, y, z) = u_y(x, y, 0) - \frac{\partial \zeta}{\partial y} z. \quad (7.11b)$$

De même l'équation (7.3b) conduit à :

$$\zeta(x, y, z) = \zeta(x, y, 0) - \frac{\sigma}{1 - \sigma} (u_{xx} + u_{yy}) z. \quad (7.11c)$$

Les relations (7.11) permettent de reconstruire le champ de déplacement dans toute l'épaisseur de la plaque, connaissant les déformations de la surface moyenne uniquement (les membres de droite sont tous évalués sur la surface moyenne). Grâce à elles, on peut donc s'affranchir de l'hypothèse faite plus haut, qui consistait à négliger la dépendance en  $z$ .

Ainsi, du fait de la flexion, les déplacements se mettent à dépendre de  $z$  de façon linéaire. La contribution de la flexion à la densité d'énergie élastique,  $w$ , qui est quadratique en les déformations, varie donc comme  $z^2$ , avec  $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$ .

Cette contribution, qui est bien *non* nulle en moyenne, est précisément l'énergie de flexion. L'intégration du coefficient  $z^2$  dans l'épaisseur fait apparaître le fameux facteur  $h^3$  de l'équation (1). Des arguments simples permettent de cerner plus précisément la forme de la contribution de la flexion à l'énergie élastique. Comme  $\sigma_{iz} = 0$ , la densité d'énergie élastique  $w$  est quadratique en les seules composantes *tangentes* de la déformation,  $u_{\alpha\beta}$ . Dans les équations (7.11a–7.11b), on voit que les termes dus à la flexion sont des premières dérivées de  $\zeta$ . Il faut, pour arriver à l'énergie élastique, dériver (passage aux déformations) puis mettre au carré (produit déformations par contraintes) ces déplacements. On en déduit donc que l'énergie de flexion est quadratique en les dérivées secondes de  $\zeta$ . Il n'existe que deux expressions de ce type qui respectent la symétrie de rotation : ce sont la courbure de Gauss

$$K = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2,$$

et la courbure moyenne carrée

$$H^2 = \frac{1}{4} (\Delta \zeta)^2.$$

L'énergie de flexion est donc de la forme :

$$E_{\text{flx}} = \frac{h^3}{3} \iint (c K + c' H^2) dx dy. \quad (7.12)$$

Les deux constantes  $c$  et  $c'$  seraient données par une analyse plus soignée. Elles ne peuvent dépendre que des constantes élastiques du matériau.

Or l'intégrale de la courbure de Gauss est donnée par un des grands théorèmes de la géométrie différentielle : d'après le théorème de Gauss-Bonnet [67, vol. 3],  $\int K dx dy$  vaut un nombre topologique (le genre de la surface), plus l'intégrale curviligne de la courbure intrinsèque sur le bord de la surface. Si l'intégrale de  $K$  se ramène à une constante plus une intégrale de contour, le terme en  $c$  dans l'équation (7.12) doit disparaître lorsque l'on écrit la stationnarité de l'énergie  $E_{\text{flx}}$ . C'est effectivement ce qui se produit<sup>1</sup> [38]. On aboutit ainsi à la forme de l'énergie annoncée par Rayleigh (1). La variation de l'énergie de flexion s'écrit donc :

$$\delta E_{\text{flx}} = \frac{c' h^3}{6} \iint \Delta \zeta \Delta(\delta \zeta) dx dy,$$

d'où, par intégration par parties :

$$= \frac{c' h^3}{6} \iint \Delta^2 \zeta \delta \zeta dx dy, \quad (7.13)$$

<sup>1</sup>Notons cependant que le terme en  $K$  dans l'équation (7.12) contribue au moment et à la force exercés par la plaque sur son bord mais nous ne chercherons pas à les calculer.

plus un terme de bord que nous oublierons (voir la note de bas de page précédente). Le coefficient  $c'$  ne peut dépendre que des constantes du matériau (module de Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\sigma$ ). Une analyse dimensionnelle montre que  $c'$  vaut le module de Young multiplié par une fonction du coefficient de Poisson. Le calcul détaillé de l'énergie de flexion [38, §12], que nous n'avons pas jugé utile de reproduire ici, donne en effet :

$$\delta E_{\text{flex}} = D \iint \Delta^2 \zeta \delta \zeta \, dx \, dy, \quad D \text{ étant défini par } D = \frac{E h^3}{12(1 - \sigma^2)}. \quad (7.14)$$

Ce coefficient  $D$  est appelé module de flexion.

Le terme de flexion (7.14) doit être ajouté à la variation de l'énergie d'extension (7.7). L'effet de la flexion est d'ajouter la contribution  $D \Delta^2 \zeta$  à l'équation (7.10), qui devient donc :

$$D \Delta^2 \zeta - h \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (7.15a)$$

La seconde équation de F.–von K. (7.9) n'est, elle, pas modifiée :

$$\Delta^2 \chi + E \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} = 0. \quad (7.15b)$$

Les équations (7.15) constituent les équations de Föppl–von Kármán.

D'autre part, on remarquera que la plus grande puissance de  $h$  dans l'équation (7.15a),  $D \propto h^3$  dans le premier terme, s'applique à l'ordre de dérivation le plus élevé en  $\zeta$ . La limite d'épaisseur nulle  $h \rightarrow 0$  est donc singulière. C'est ce qui explique la formation des singularités (plis [45] ou pointes coniques [57]) obtenues lorsque l'on froisse une feuille de papier, ou, mieux, une feuille de papier transparent, ce dernier étant doté de meilleures propriétés mécaniques. L'énergie élastique se concentre dans des régions de taille donnée par une puissance positive de  $h$ , donc petites. Dans ces régions de concentration des contraintes, la limite d'élasticité du matériau est dépassée. Ce sont les marques permanentes que l'on peut observer quand la feuille est défroissée. La prise en compte du terme de flexion peut être justifiée *a posteriori* : ce terme est formellement d'un ordre élevé en  $h$  mais, accompagnant des dérivées élevées, il perturbe singulièrement les solutions des équations de Föppl–von Kármán.

Comme nous l'avons noté plus haut, l'équation bi-harmonique (7.15b) pour  $\chi$  comporte maintenant un terme de source, qui n'est autre que la courbure de Gauss  $K$ . Par le *theorema egregium*, les déformations isométriques de la surface moyenne ne font pas apparaître de courbure de Gauss. Il est donc normal que la courbure de

Gauss, qui mesure le défaut de développabilité de la surface moyenne, soit source de contraintes tangentielles.

Abordons, pour finir, la question de la validité des équations de F.–von K. Pour arriver à l'équation (7.6), nous avons fait l'hypothèse que les dérivées des déplacements tangentiels  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}$  étaient petites devant celles de la flèche  $\frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha}$ . Cette approximation simplifie considérablement le formalisme, mais supprime malheureusement l'invariance par rotation des équations : si l'on fait tourner en bloc la plaque d'un angle  $\theta$ , la déformation tangentielle donnée par (7.6) possède un terme en  $\theta^2$  au lieu de valoir indemment zéro. Ce terme en  $\theta^2$  est compensé par les non-linéarités en  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}$  que l'on néglige. Dans ces conditions, il faut donc se limiter aux faibles pentes :

$$\left| \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right| \ll 1. \quad (7.16a)$$

Au prix d'un formalisme plus lourd, il serait possible de s'affranchir de cette hypothèse.

Une seconde limitation, bien plus profonde, impose que la courbure de la plaque soit beaucoup plus faible que l'épaisseur :

$$\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right| \ll \frac{1}{h}. \quad (7.16b)$$

En effet, lorsque cette condition est satisfaite, les équations de F.–von K. apparaissent comme le début d'un développement systématique de l'énergie élastique en la petite épaisseur  $h$ .

## 7.2 Solutions analytiques

Nous nous attachons ici à déterminer le profil de la cloque, en supposant sa frontière connue. Le flambage élastique d'une plaque sous contraintes peut être étudié à partir des équations de F.–von K. Cela permet d'obtenir le profil du film dans la région délaminée. Nous nous limiterons ici aux deux types de cloques pour lesquelles on connaît les solutions des équations de F.–von K. : la cloque rectiligne (la région délaminée est une bande infinie à bords parallèles), et la cloque circulaire (la région délaminée est un disque). Ces deux exemples d'application montrent qu'en élasticité des plaques, la prise en compte des conditions aux limites est en pratique assez délicate. Plus loin, ces solutions explicites des équations de F.–von K. seront couplées au problème de la fracture interfaciale, sur le bord de la cloque — nous serons alors parvenus à une description complète de la délamination.

Les contraintes qui causent la délamination sont le plus souvent d'origine thermique (cf. p. 105). Nous considérerons donc que le film, dans son état initial avant flambage, est comprimé de façon *homogène* et *isotrope* dans les directions  $x$  et  $y$  :  $\sigma_{xx}^0 = -\sigma_0$ ,  $\sigma_{yy}^0 = -\sigma_0$ ,  $\sigma_{xy}^0 = 0$ . Les contraintes avant flambage dérivent donc du potentiel :  $\chi^0 = -\frac{\sigma_0}{2}(x^2 + y^2)$ . Le paramètre  $\sigma_0 > 0$  représente l'intensité des contraintes thermiques résiduelles. Comme le substrat est beaucoup plus épais que le film, on considérera qu'il ne se déforme pas. Le film est donc soumis à des conditions aux limites d'encastrement. Le déplacement est nul sur sa frontière, et le film décolle tangentiellement au substrat :

$$u_x = u_y = 0, \quad \zeta = 0, \quad \zeta_{,n} = 0 \quad \text{sur le bord du film.} \quad (7.17)$$

Dans cette équation, le « n » en indice représente la dérivée normale à la frontière.

Ce sont les équations de Föppl–von Kármán (7.15) qui permettent l'étude du flambage élastique. On décompose le potentiel d'Airy,  $\chi$ , et la déflexion,  $\zeta$ , en une partie due à la compression initiale  $\sigma_0$ , indexée par « 0 », et une variation par rapport à cet état initial, due au flambage. La deuxième contribution est repérée par les primes :

$$\chi = \chi^0 + \chi' \quad \chi^0 = -\sigma_0 \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad (7.18)$$

$$\zeta = \zeta' \quad \zeta^0 \equiv 0. \quad (7.19)$$

On oubliera dans la suite les primes. Les équations satisfaites par les quantités inconnues  $\chi$  et  $\zeta$  se déduisent des équations de F.–von K. :

$$D \Delta^2 \zeta + \sigma_0 h \Delta \zeta - h \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) = 0, \quad (7.20a)$$

$$\Delta^2 \chi + E \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} = 0. \quad (7.20b)$$

Le seul changement par rapport aux équations originales réside dans un terme supplémentaire,  $(\sigma_0 h \Delta \zeta)$ , qui rend compte de la compression initiale. Dans la suite, nous résolvons ces deux équations soumises aux conditions aux limites (7.17), pour les deux formes de cloques unidimensionnelles (cloque circulaire ou cylindrique).

### 7.2.1 La cloque rectiligne

Le flambage d'une bande élastique infinie est le plus facile. Dans un premier temps, nous étudierons les modes de flambages qui conservent la symétrie cylindrique. Dans ce cas de figure, la plaque reste invariante dans la direction  $y$ , et les

équations de F.–von K. se réduisent à l'*elastica* d'Euler. Pour cette raison, le profil cylindrique flambé est appelé « colonne d'Euler ». Nous étudierons plus loin la stabilité de ce profil cylindrique, et montrerons qu'aux grandes compressions, il devient instable au profit de configurations ondulantes dans la direction longitudinale : un flambage secondaire se produit.

Les profils unidimensionnels n'ont pas de courbure de Gauss : le rayon de courbure principal du cylindre est infini<sup>2</sup> dans la direction  $y$ . L'équation (7.20b) se réduit donc à  $\Delta^2 \chi = \chi_{,x^4} + \chi_{,y^4} + 2 \chi_{,x^2y^2} = 0$ . Or  $\chi_{,y^4} = (\sigma_{xx})_{,yy}$  s'annule, du fait de l'invariance selon  $y$ . Notons que cette invariance ne concerne que les observables, comme les composantes des contraintes, mais pas *a priori* la fonction d'Airy qui n'est pas mesurable. De même,  $\chi_{,x^2y^2} = (\sigma_{yy})_{,yy}$  doit aussi s'annuler. L'équation (7.20b) mène donc à  $\chi_{,x^4} = 0$ , qui s'intègre immédiatement en :

$$\chi(x, y) = \frac{\chi_3}{6} x^3 + \frac{\chi_2}{2} x^2 + \chi_1 x + \tilde{\chi}(y), \quad (7.21)$$

où  $\chi_{3,2,1}$  et  $\tilde{\chi}$  sont des fonctions inconnues de  $y$ . Par symétrie  $x \rightarrow (-x)$ , et par invariance selon  $y$ , on voit que  $\chi_3$  doit s'annuler identiquement ; l'invariance par translation montre que  $\chi_2$  est une constante, que nous appellerons  $\sigma_{yy}$  pour des raisons évidentes. De même,  $\tilde{\chi}(y) = \sigma_{xx} y^2/2$  ;  $\chi_1$  est une constante non physique, car seules les *deuxièmes* dérivées de  $\chi$  interviennent dans les contraintes. On aboutit donc à :

$$\chi(x, y) = \frac{\sigma_{yy}}{2} x^2 + \frac{\sigma_{xx}}{2} y^2, \quad (7.22)$$

où  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  sont des *constantes* qu'il reste à déterminer. De façon remarquable, les contraintes tangentielles dans la configuration flambée sont uniformes, car elles sont données par les dérivées secondes du potentiel (7.22).

Connaissant  $\chi$ , on peut réécrire l'équation (7.20a) :

$$D \zeta^{(4)}(x) - h(-\sigma_0 + \sigma_{xx}) \zeta^{(2)}(x) = 0 \quad \zeta(x = \pm b) = 0 \quad \zeta'(x = \pm b) = 0. \quad (7.23)$$

Si  $\sigma_0 - \sigma_{xx} > 0$ , l'équation différentielle possède une solution non triviale :

$$\zeta(x) = \zeta_m \frac{1 + \cos \left( [h(\sigma_0 - \sigma_{xx})/D]^{1/2} x \right)}{2}. \quad (7.24)$$

<sup>2</sup>Mais cela ne veut pas dire qu'il n'y ait pas de contraintes tangentielles. Seule la réciproque est vraie (en l'absence d'extension, la surface déformée est, par le *theorema egregium*, presque partout développable).



L'inégalité  $\sigma_0 - \sigma_{xx} > 0$  signifie que la composante transverse finale des contraintes,  $-\sigma_0 + \sigma_{xx}$ , doit rester compressive dans la région délaminée, ce qui est bien conforme à l'intuition.

Soit  $b$  la demi-largeur de la bande élastique. Le bord de la bande se situe en  $x = \pm b$ . La condition aux limites  $\zeta(x = \pm b) = 0$  impose, pour la solution (7.24) :

$$\left( \frac{h(\sigma_0 - \sigma_{xx})}{D} \right)^{1/2} b = \pi. \quad (7.25)$$

À strictement parler, le membre de droite de cette équation doit être de la forme  $(2n + 1)\pi$ , avec  $n = 0, 1, \dots$ . Quand  $n \geq 1$ , cependant, le film ondule plusieurs fois dans la direction  $x$ , et la configuration résultante est instable. On ne considérera donc pas l'éventualité  $n \neq 0$ . Notons que ce type d'ondulations survient quand la plaque est frustrée géométriquement [62]. L'équation (7.25) donne  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $b$ .

L'amplitude maximale de la déflexion,  $\zeta_m$ , et la composante longitudinale des contraintes,  $\sigma_{yy}$ , restent encore à déterminer. Pour ce faire, il faut utiliser les conditions aux limites que l'on n'a pas encore exploitées :  $u_x(\pm b, y) = 0$  et  $u_y(\pm b, y) = 0$ . Malheureusement,  $u_x$  et  $u_y$  ont été éliminés des équations de F.-von K., où seuls subsistent  $\chi$  et  $\zeta$ . Il nous faut donc revenir aux équations constitutives du matériau, les relations de Hooke (7.4), pour traduire ces dernières conditions aux limites. Des deux premières équations, on tire la déformation transverse :

$$u_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \sigma \sigma_{yy}). \quad (7.26)$$

On se souvient que, dans les définitions du tenseur de déformation, il faut conserver les non-linéarités en  $\zeta$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \sigma \sigma_{yy}). \quad (7.27)$$

Cette non-linéarité en  $\zeta$  est capitale : en remarquant que les profils cylindriques étaient développables, donc sans courbure de Gauss, nous nous sommes en effet débarrassé de toute non-linéarité dans les équations de F.-von K. C'est la non-linéarité apparue dans l'équation (7.27) ci-dessus qui permet que les seuils de flambage soient non nuls.

Réécrivons la condition aux limites  $u_x(x = \pm b) = 0$  sous la forme  $\int_{-b}^{+b} \frac{\partial u_x}{\partial x} dx = 0$ . L'équation (7.27) permet alors de l'exprimer au moyen de  $\chi$  et  $\zeta$  :

$$\frac{1}{b} \int_{-b}^{+b} dx \left[ \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \sigma \sigma_{yy}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (7.28)$$

Utilisant la forme explicite de  $\zeta$  déterminée plus haut, dans l'équation (7.24), nous obtenons :

$$\frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \sigma \sigma_{yy}) = \frac{1}{16}\zeta_m^2 \frac{\pi^2}{b^2}. \quad (7.29)$$

On peut établir une équation analogue à (7.27), pour la composante  $u_{yy}$  des déformations :

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \sigma \sigma_{xx}). \quad (7.30)$$

La dernière condition aux limites,  $u_y(x = \pm b) = 0$ , peut s'écrire  $\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ . L'équation (7.30) donne alors, avec l'invariance par translation selon  $y$  :

$$\sigma_{yy} = \sigma \sigma_{xx}. \quad (7.31)$$

Cette équation s'applique *a priori* seulement au bord de la cloque (elle provient de conditions aux limites). Cependant, comme  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  sont uniformes dans la cloque, elle est en fait vérifiée partout.

On peut maintenant extraire les trois grandeurs :  $\zeta_m$ ,  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  des équations (7.25), (7.29) et (7.31). Cela donne :

$$\zeta_m = h \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_c} - 1 \right) \right]^{1/2}, \quad (7.32)$$

où la compression critique  $\sigma_c$  est définie par :

$$\sigma_c = \frac{D\pi^2}{hb^2} = E \left( \frac{h}{b} \right)^2 \frac{\pi^2}{12(1 - \sigma^2)}. \quad (7.33)$$

La configuration flambée dans l'équation (7.25) n'est solution des équations de F.–von K. que si la compression initiale est assez forte :  $\sigma_0 > \sigma_c$ . La dépendance de  $\zeta_m$  en racine carrée de  $(\sigma_0 - \sigma_c)$  est la signature d'une bifurcation super-critique.

L'étude du flambage de la bande rectangulaire infinie s'achève ici. On donnera encore les contraintes résiduelles dans la colonne, après flambage :

$$\sigma_{xx}^{\text{f(lambé)}} = -\sigma_0 + \sigma_{xx} = -\sigma_0 + (\sigma_0 - \sigma_c) = -\sigma_c, \quad (7.34a)$$

$$\sigma_{yy}^{\text{f}} = -\sigma_0 + \sigma_{yy} = -(1 - \sigma)\sigma_0 - \sigma\sigma_c. \quad (7.34b)$$

La composante de cisaillement,  $\sigma_{xy}^{\text{f}}$ , s'annule pour des raisons de symétrie.

Notons que, dans ce problème, les non-linéarités d'origine géométrique dues aux conditions aux limites se sont avérées tout aussi importantes que les non-linéarités explicitement présentes dans les équations de F.–von K. D'autre part,

il est important de remarquer que la solution obtenue ne constitue pas le premier terme d'un développement faiblement non linéaire. Il s'agit bien d'une solution bifurquée *exacte*<sup>3</sup> des équations de F.-von K. Enfin, notons que l'approximation membranaire ( $D \rightarrow 0$ ) donnerait un seuil de flambage nul : le terme  $D/h$  qui apparaît dans l'expression du seuil (7.33) montre bien que la bifurcation résulte d'un compromis entre flexion et extension.

### 7.2.2 La cloque circulaire

Pour étudier le flambage d'une plaque circulaire soumise à une compression dans son plan, nous repartons des équations (7.20). Soit  $b$  le rayon de la cloque. Introduisons les variables adimensionnées :

$$x = \frac{r}{b}, \quad N = \frac{b^2 h}{D} \sigma_{rr} = \frac{b^2 h}{D r} \frac{d\chi}{dr}, \quad \Phi = \frac{b}{h} \sqrt{\frac{E h^3}{D}} \frac{d\zeta}{dr}, \quad (7.35)$$

où  $r$  désigne la coordonnée radiale dans le plan de la plaque, avec le centre de la cloque pour origine, et  $\sigma_{rr}$  désigne la composante normale des contraintes. L'hypothèse de symétrie cylindrique implique que les fonctions inconnues  $N$  et  $\Phi$  ne dépendent que de la variable  $x$ , la coordonnée radiale adimensionnée.

Nous ne détaillons pas le passage en coordonnées cylindriques, qui permet de réécrire les équations de F.-von K. (7.20) sous la forme :

$$\Phi''(x) = -\frac{1}{x} \Phi'(x) + \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\sigma_0}{h b^2} \right) \Phi(x) + N(x) \Phi(x), \quad (7.36a)$$

$$N''(x) = -\frac{3}{x} N'(x) - \frac{1}{x^2} \Phi^2(x). \quad (7.36b)$$

Les équations originales ont pu être intégrées directement une fois, ce qui explique que l'on aboutisse à des équations d'ordre deux en  $\Phi \propto \zeta'$ , et en  $N \propto \chi'$ . Ces deux équations ordinaires sont couplées et non linéaires : contrairement au cas de la cloque rectiligne où le profil restait développable, deux non-linéarités subsistent dans les équations de F.-von K.

Étudions les conditions aux limites pour (7.36). Le centre de la cloque  $x = 0$  est, par symétrie, un point où le plan tangent au film est horizontal :  $\Phi(x = 0) = 0$ . L'encastrement impose aussi  $\Phi(x = 1) = 0$  sur le bord de la cloque. D'autre part, le point  $x = 0$  est singulier pour les équations différentielles (certains coefficients

<sup>3</sup>Cette solution non-linéaire exacte est bien compatible avec le domaine de validité des équations de F.-von K., y compris bien au-delà du seuil. En effet, la condition de validité la plus difficile à satisfaire est (7.16a) qui pour  $\sigma_0 \gg \sigma_c$  donne  $\frac{h}{b} \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_c}} \ll 1$ . Comme  $h \ll b$ , la colonne d'Euler est donc une solution exacte des équations de F.-von K. valable bien au-delà du seuil.

divergent en  $x = 0$ ). La divergence de  $N$  ou  $\Phi$ , qui signifierait l'application d'une force ponctuelle normale au centre de la cloque, peut être écartée en imposant  $N(x = 0) = 0$ . Enfin, une dernière condition aux limites doit traduire l'absence de déplacement radial au bord de la cloque :  $u_r(r = b) = 0$ . Comme pour la cloque rectiligne, nous nous trouvons confronté à une difficulté, car la fonction  $u_r$  a été éliminée des équations (7.36). La même technique peut cependant être mise en œuvre : il faut utiliser les relations de Hooke pour traduire la condition aux limites d'encastrement par une relation sur les composantes du tenseur de contraintes. Il se trouve que l'absence de déformation orthoradiale,  $u_{\theta\theta}(r = b) = 0$ , peut s'exprimer<sup>4</sup> par la combinaison :  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 0$ , combinaison qui se réécrit en fonction de  $N$  :  $(xN)' - \sigma N = 0$  en  $x = 1$ . Pour résumer, les conditions aux limites sont donc :

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(1) = 0, \quad (7.37a)$$

$$N(0) = 0, \quad N'(1) + (1 - \sigma)N(1) = 0. \quad (7.37b)$$

Dans les équations non linéaires (7.36) figure le paramètre  $\sigma_0$ , ou, dans sa forme adimensionnée,  $\frac{\sigma_0 h b^2}{D}$ . Par analogie avec la cloque droite, on s'attend à ce qu'à une valeur critique de ce paramètre,  $\sigma_c$ , une bifurcation se produise. Cette bifurcation, qui correspond au flambage de la cloque, se matérialise dans les équations par l'existence d'une solution  $(\Phi, N)$  non triviale. Supposons la bifurcation super-critique, une hypothèse que nous établirons rigoureusement dans la suite (§1.2.2, p. 152). Le seuil  $\sigma_c$  est caractérisé par l'existence d'un mode marginal  $(\Phi^{[0]}, N^{[0]})$ , solution (non triviale) des équations (7.36) *linéarisées*, et vérifiant bien entendu les conditions aux limites (7.37). On remarque qu'à l'ordre linéaire,  $N^{[0]}$  vérifie une équation découplée de  $\Phi$ , et indépendante de  $\sigma_0$ . Par suite,  $N^{[0]} \equiv 0$ . Nous expliquerons ce résultat plus loin en invoquant les symétries du problème : près du seuil,  $\Phi$  possède un développement faiblement non linéaire en la *racine carrée* de la distance au seuil, alors que  $N$  est *linéaire* en la distance au seuil, donc d'un ordre plus élevé. L'annulation de  $N^{[0]}$  permet de caractériser le mode neutre au moyen d'une unique équation :

$$\Phi^{[0]''}(x) = -\frac{1}{x} \Phi^{[0]'}(x) + \left( \frac{1}{x^2} - \sigma_c^* \right) \Phi^{[0]}(x), \quad \text{où } \sigma_c^* = \frac{\sigma_c}{h b^2},$$

$$\text{avec les conditions aux lim. } \Phi^{[0]}(0) = 0 \text{ et } \Phi^{[0]}(1) = 0. \quad (7.38)$$

On peut, par une méthode de tir, ajuster la compression  $\sigma_0$  de manière à vérifier les deux conditions aux limites simultanément. On obtient ainsi la valeur critique de

<sup>4</sup>Nous remercions Jim Rice pour son explication concernant l'origine de cette condition aux limites.

la compression. Par exemple, pour  $\sigma = 0,3$  :

$$\sigma_c(\sigma = 0,3) = 14,68 \frac{D}{h b^2} = 1,24 \frac{E}{1 - \sigma^2} \left( \frac{h}{b} \right)^2. \quad (7.39)$$

Comme alternative à la méthode de tir, on peut aussi résoudre l'équation (7.38) pour  $\Phi^{[0]}$  au moyen de séries. La compression critique  $\sigma_c$  est alors donnée comme la racine d'un développement en série.

Nous pouvons esquisser le développement faiblement non linéaire au voisinage du seuil de flambage. Il s'obtient en poussant le développement de  $(\Phi, N)$  aux ordres suivants en fonction de la distance au seuil. Introduisons un paramètre  $\varepsilon$  qui mesure la distance au seuil, et développons :

$$\Phi_{\sigma_0}(x) = \varepsilon \Phi^{[0]}(x) + \varepsilon^2 \Phi^{[1]}(x) + \dots \quad (7.40)$$

$$N_{\sigma_0}(x) = \varepsilon N^{[0]}(x) + \varepsilon^2 N^{[1]}(x) + \dots \quad (7.41)$$

$\varepsilon$  est relié à  $\sigma_0 - \sigma_c$  d'une manière que nous allons préciser. On rappelle que  $N^{[0]}(x) \equiv 0$ . Si l'on réinjecte ces développements dans l'équation (7.36a), on obtient, en se limitant à l'ordre suivant immédiatement le premier ordre en  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left[ x^2 \Phi^{[1]''}(x) + x \Phi^{[1]'}(x) + (x^2 \sigma_c^* - 1) \Phi^{[1]}(x) \right] \\ + \varepsilon (\sigma_0^* - \sigma_c^*) x^2 \Phi^{[0]}(x) = 0, \quad (7.42) \end{aligned}$$

avec encore la notation  $\sigma_0^* = \sigma_0 / \frac{D}{h b^2}$ . Or dans cette égalité, le terme entre crochets peut être annulé en incorporant  $\Phi^{[1]}$  dans  $\Phi^{[0]}$  — ce qui revient à re-paramétriser en fonction de  $\varepsilon$ . Le second terme doit alors s'annuler, ce qui signifie qu'il est d'un ordre plus petit que  $\varepsilon^2$ . Il faut donc supposer que le paramètre du développement  $\varepsilon$  est proportionnel à la *racine carrée* de la distance au seuil ( $\sigma_0^* - \sigma_c^*$ ). Sous cette hypothèse, le premier terme de l'équation précédente est nul, et le second est négligeable.

Le développement à l'ordre deux dans la deuxième équation (7.36b) conduit à :

$$\frac{d}{dx} \left( x^3 N^{[1]'}(x) \right) = -x \Phi^{[0]2}(x),$$

$$\text{avec les c. l. } N^{[1]}(0) = 0 \text{ et } N^{[1]'}(1) + (1 - \sigma) N^{[1]}(1) = 0. \quad (7.43)$$

Connaissant le mode marginal  $\Phi^{[0]}$ , cette équation s'intègre directement, ce qui conduit à  $N^{[1]}$ .

Poussant jusqu'à l'ordre trois en  $\varepsilon$  le développement de (7.36a), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \left[ x^2 \Phi^{[2]''}(x) + x \Phi^{[2]'}(x) + (x^2 \sigma_c^* - 1) \Phi^{[2]}(x) \right] \\ + \varepsilon^3 \frac{\sigma_0^* - \sigma_c^*}{\varepsilon^2} x^2 \Phi^{[0]}(x) - \varepsilon^3 N^{[1]}(x) \Phi^{[0]}(x) = 0. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Sous l'hypothèse que  $\varepsilon$  est proportionnel à  $\sqrt{\sigma_0^* - \sigma_c^*}$ , la fraction est un nombre indépendant de  $\varepsilon$ , et cette équation est uniformément d'ordre trois en  $\varepsilon$ .

L'amplitude faiblement non linéaire de la déformation peut être déterminée en trouvant la constante  $e$  telle que la fonction apparaissant dans (7.44) :

$$e x^2 \Phi^{[0]}(x) - N^{[1]}(x) \Phi^{[0]}(x) \quad (7.45)$$

soit dans le noyau de l'opérateur de dérivation adjoint à celui définissant le mode neutre  $\Phi^{[0]}$ . La condition de compatibilité sur l'équation (7.44) s'écrit alors :

$$\varepsilon = e \sqrt{\frac{\sigma_0 - \sigma_c}{\frac{D}{h b^2}}}. \quad (7.46)$$

Cette équation relie l'amplitude de la déformation  $\varepsilon$  à la distance au seuil  $\sigma_0 - \sigma_c$ . Elle est valable près du seuil puisqu'il s'agit d'un développement faiblement non linéaire.

## Chapitre 8

# La délamination des films minces

Un film mince se délamine parce que le film, en flambant, se met à tirer sur l'interface. Une description complète de la délamination nécessite donc de *coupler* l'élasticité du film (équations de F.-von K.) avec la fracture de l'interface. Dans la deuxième partie de ce travail, nous avons vu que la réponse de l'interface aux contraintes mécaniques peut être caractérisée par une fonction de ténacité dépendante de mode,  $\Gamma(\psi)$ . La délamination progresse si le taux de restitution de l'énergie calculé à la frontière de la région délaminée,  $G$ , dépasse la valeur critique  $\Gamma(\psi)$ . Or il est possible de calculer  $G$  connaissant l'état mécanique du film, donné par les équations de F.-von K. C'est ce que nous montrons dans le §8.1. La mise en équation du problème de la délamination sera alors terminée. Il apparaîtra que la dépendance de mode de l'interface est un concept essentiel en délamination (§8.2). Nous montrerons enfin comment la forme ondulante des motifs en fil de téléphone peut être comprise (§8.3).

### 8.1 Couplage avec la fracture interfaciale

Voyons comment on peut assembler les ingrédients des chapitres précédents : la mécanique de la fracture et l'élasticité des films minces. Les arguments qui suivent sont empruntés à Hutchinson et Suo [70]. Le problème mécanique qu'il faut résoudre pour trouver le chargement sur la pointe de la fissure est représenté en haut de la figure 8.1. Il prend pour paramètres les grandeurs  $\sigma_{nn}^f$  et  $M$ , qui sont données par la résolution des équations de F.-von K. Dans sa partie non délaminée, le film est encore soumis à la compression initiale  $\sigma_0$ . Au bord *intérieur* de la cloque, le film est soumis à la compression  $\sigma_{nn}^f$ , différente de  $\sigma_0$  puisque le film a flambé.

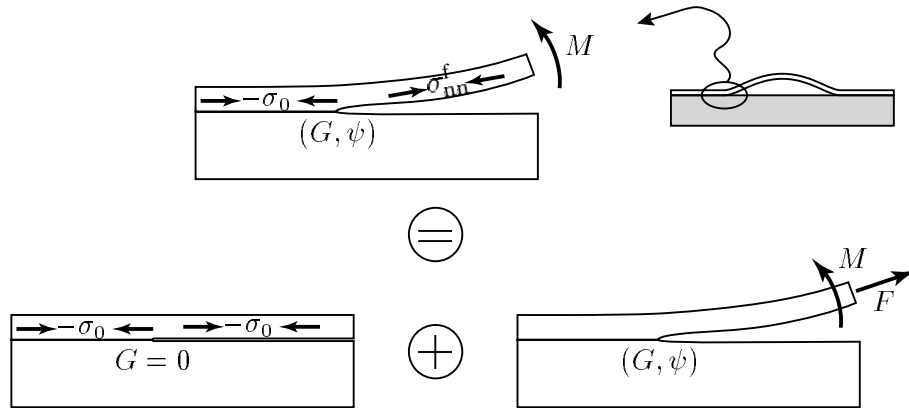


FIG. 8.1 – Problème mécanique au bord de la cloque permettant de calculer le chargement sur la pointe de la fissure interfaciale. La compression  $\sigma_{nn}^f$  et le moment  $M$  sont donnés par les solutions flambées de F.-von K., et servent ici de conditions aux limites. La compression initiale  $-\sigma_0$  dans le film peut être éliminée par superposition linéaire de la configuration en bas à gauche. Il faut alors résoudre le problème en bas à droite, qui consiste à déterminer le chargement de la pointe  $(G, \psi)$  en fonction des paramètres  $M$  et  $F$ . Ces deux paramètres sont reliés à la solution de F.-von K. pour le film par les équations (8.1).



L'indice « n » se rapporte à la composante normale des contraintes au bord de la cloque, comme sur la figure 8.1 ; l'exposant « f » rappelle que la valeur de  $\sigma_{nn}^f$  est affectée par le flambage élastique. Pour la cloque rectiligne par exemple, nous avons établi l'équation (7.34a), qui montre que  $\sigma_{nn}^f = -\sigma_c$ .

Les équations à résoudre dans ce problème mécanique sont celles de l'élasticité *linéaire* : les non-linéarités dans les équations F.-von K. interviennent seulement *via* les variables bifurquées  $\sigma_{nn}^f$  et  $M$ . La décomposition linéaire suivante permet de simplifier le problème : on a d'une part une compression uniforme du film,  $-\sigma_0$  (à gauche sur la figure), et d'autre part un film collé *sans compression* au substrat, subissant une force  $F$  et un moment  $M$  (à droite sur la figure). Dans la configuration représentée à gauche, les contraintes sont homogènes, et la pointe de l'interface est sans contrainte ( $K_I = K_{II} = 0$ ). Dans la configuration de droite, il faut prendre pour  $M$  la valeur du moment exercé par la cloque flambée sur son bord. Ce moment est relié [38] à la courbure de la cloque en son bord intérieur :

$$M = D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2}. \quad (8.1a)$$

$M$  est un moment par unité de longueur transverse à la figure.

La force  $F$  est donnée par la contrainte  $\sigma_{nn}^f$  sur le bord intérieur de la cloque, plus un terme dû à la décomposition linéaire qui a permis d'éliminer  $\sigma_0$  :

$$F = h [\sigma_{nn}^f - (-\sigma_0)]. \quad (8.1b)$$

$F$  est donc la *variation* de la compression normale  $\sigma_{nn}^f$ , causée par le flambage. C'est aussi une force par unité de longueur normale à la figure.

Le problème réduit de la figure 8.1, en bas à droite, est résolu comme suit. Nous ne considérons plus d'effets frictionnels à l'interface : nous avons montré dans la deuxième partie qu'ils pouvaient être incorporés à la ténacité dépendante de mode,  $\Gamma(\psi)$ . L'intégrale de Rice,  $J$ , est donc invariante de chemin, et le taux de restitution de l'énergie  $G$  se calcule par une intégrale  $J$  prise sur le bord de l'échantillon. On obtient une forme quadratique en les contraintes  $F$  et  $M$ . Dans la limite d'un substrat très épais [70] :

$$G = \frac{6}{E^* h^3} \left( M^2 + \frac{h^2}{12} F^2 \right), \quad (8.2a)$$

où  $E^*$  est un module effectif du film, qui coïncide avec le module de Young  $E$  du film dans le cas de contraintes planes mais vaut  $E \left( \frac{3}{4} - \sigma \right) (1 + \sigma)$  dans le cas de déformations planes. En délaminatation, les *déformations* sont planes, à cause du substrat infini.

La valeur du paramètre de mixité modale,  $\psi$ , est donnée pour ce problème par [70] :

$$\psi = -\frac{\pi}{2} + \omega \left( \frac{E}{E_s}, \sigma, \sigma^s \right) - \tan^{-1} \left( \frac{F h}{M \sqrt{12}} \right). \quad (8.2b)$$

On rappelle que  $\psi$ , défini sur la figure 5.1, est l'angle qui mesure l'importance relative des modes  $I$  et  $II$ . Comme le problème considéré est linéaire,  $K_I$  et  $K_{II}$  sont proportionnels aux contraintes  $F$  et  $M$ . Ceci explique la forme de l'équation ci-dessus :  $\psi$  est l'argument d'un nombre complexe linéaire en  $F$  et en  $M$ . L'angle  $\omega$  dépend des propriétés élastiques du film ( $E, \sigma$ ) et du substrat ( $E_s, \sigma^s$ ), et ne peut pas se calculer analytiquement. Il a été tabulé numériquement [70], et prend des valeurs proches de  $\frac{\pi}{4}$ . Il est important pour la suite de noter que  $\psi$  ne dépend des contraintes  $F$  et  $M$  que *via* le paramètre adimensionné  $\frac{Fh}{M}$ . Quand la contrainte  $F$  domine ( $F \gg \frac{M}{h}$ ),  $\psi$  devient de plus en plus négatif, *i.e.* le mode  $II$  est de plus en plus important. Quand  $M$  domine ( $M \gg Fh$ ),  $\psi$  est moins négatif, et le mode  $I$  reprend le dessus. Tout ceci est bien conforme à l'intuition :  $F$  induit essentiellement du cisaillement (mode  $II$ ), alors que la contrainte due à  $M$  est surtout en mode  $I$ . Ces observations seront très importantes pour la suite.

Connaissant la nature des contraintes à la pointe (grâce à  $G$  et  $\psi$ ), on peut écrire le critère de propagation de la cloque :  $G \geq \Gamma(\psi)$ . Ce critère doit être appliqué en tout point du bord de la cloque. La fonction  $\Gamma(\psi)$  représente la ténacité effective de l'interface, telle que mesurée expérimentalement. La mise en équation du problème de la délamination est maintenant achevée : pour une forme de cloque donnée, il faut résoudre les équations de F.-von K., puis, en chaque point du bord, injecter les valeurs de  $F$  et  $M$  dans le problème de la figure 8.1. La résolution de ce problème donne  $G$  et  $\psi$ . La cloque atteint une configuration d'équilibre quand  $G \leq \Gamma(\psi)$  est vérifiée sur tout le bord de la cloque.

## 8.2 Stabilité de la délamination

La mise en équations de la délamination s'avère donc complexe. Les équations de F.-von K. n'ayant pas de solution analytique en général, l'approche proposée ci-dessus se révèle même le plus souvent impraticable. Il existe cependant quelques rares formes de cloques pour lesquelles on peut en effet résoudre les équations de F.-von K. — il s'agit essentiellement des deux profils unidimensionnels étudiés plus haut : les cloques circulaire ou rectiligne. Pour ces profils particuliers, nous mettons en œuvre le schéma d'approche décrit au §8.2.1. Nous verrons que la dépendance de mode de l'interface est *nécessaire* pour comprendre la stabilité de ces motifs de délamination : sans dépendance de mode, la croissance d'une cloque

conduirait à la délamination complète du film. Au §8.2.2, nous nous intéresserons aux autres profils, pour lesquels les équations de F.-von K. n'ont pas de solutions analytiques connues — notons que même l'étude numérique de ces solutions soulève de redoutables problèmes [53]. Une analyse de la *forme* des équations de F.-von K. nous permettra d'établir que, tout comme pour les profils unidimensionnels, la dépendance de mode de l'interface explique l'existence de cloques de taille finie.

### 8.2.1 Stabilité des profils unidimensionnels

Nous pouvons maintenant calculer la charge supportée par la fissure interfaciale, au bord d'une cloque *rectiligne* de demi-largeur  $b$ . On a, pour le moment  $M$  défini sur la figure 8.1 :

$$\begin{aligned}
 M &= D \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right|_{x=\pm b} && \text{par (8.1)} \\
 &= \zeta_m \frac{h (\sigma_0 - \sigma_{xx})}{2} && \text{par (7.24)} \\
 &= \zeta_m \frac{\pi^2 D}{2 b^2} && \text{par (7.25)} \\
 &= \frac{h D \pi^2}{b^2} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_c} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} && \text{par (7.32).} \\
 &= \sigma_c h^2 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_c} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} && \text{par (7.33).} \quad (8.3a)
 \end{aligned}$$

Quant à  $F$  :

$$\begin{aligned}
 F &= h (\sigma_{xx} + \sigma_0) && \text{par (8.1)} \\
 &= h (\sigma_0 - \sigma_c) && \text{par (7.34a)} \\
 &= \sigma_c h \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_c} - 1 \right). && (8.3b)
 \end{aligned}$$

En ce qui concerne la cloque *circulaire*, on trouve de même ( $b$  désigne mainte-

nant le rayon de la cloque) :

$$\begin{aligned}
 M &= D \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right|_{r=b} && \text{par (8.1)} \\
 &= \frac{h D}{b^2} \sqrt{\frac{D}{E h^3}} \Phi' \left( x = 1, \sigma, \frac{\sigma_0}{\sigma_c} - 1 \right) && \text{par (7.35)} \\
 &= \frac{h D}{b^2} \frac{\Phi' \left( x = 1, \sigma, \frac{\sigma_0}{\sigma_c} - 1 \right)}{\sqrt{12(1 - \sigma^2)}} && \text{par la définition (7.14) de } D. \\
 &= \sigma_c h^2 \frac{\Phi' \left( x = 1, \sigma, \frac{\sigma_0}{\sigma_c} - 1 \right)}{k(\sigma) \sqrt{12(1 - \sigma^2)}} && \text{par (7.39)} \tag{8.4a}
 \end{aligned}$$

Enfin, pour  $F$  :

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{D}{b^2} N \left( x = 1, \sigma, \frac{\sigma_0}{\sigma_c} - 1 \right) && \text{par (8.1)} \\
 &= \sigma_c h \frac{N \left( x = 1, \sigma, \frac{\sigma_0}{\sigma_c} - 1 \right)}{k(\sigma)} && \text{par (7.39),} \tag{8.4b}
 \end{aligned}$$

où  $k(\sigma)$  est la fonction numérique intervenant dans (7.39), et qui vaut 14,68 pour  $\sigma = 0,3$ .

Il faut remarquer que les expressions des chargements  $F$  et  $M$  sont quasiment identiques pour les deux types de cloques. Dans les deux cas,  $M$  vaut  $(\sigma_c h^2)$  multiplié par un nombre qui dépend du coefficient de Poisson et du paramètre de flambage adimensionné  $\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_c}\right)$ . La traction  $F$  s'écrit  $(\sigma_c h)$  multiplié par un autre nombre qui dépend du coefficient de Poisson et de la distance au seuil. Mais la similitude va plus loin. En effet, une remarque faite précédemment nous a permis d'établir que  $\Phi'$  varie comme la racine carrée de la distance au seuil dans l'équation (8.4a); cette loi est donc la même que pour la cloque rectiligne (8.3a). De même,  $N$  varie linéairement avec la distance au seuil dans (8.4b), tout comme le dernier facteur de (8.3b). Ces arguments expliquent que les courbes de  $F$  et de  $M$  en fonction du paramètre de flambage adimensionné se recouvrent presque pour une cloque rectiligne et circulaire (cf. figure 8.2).

Au moyen des équations (8.2), on peut maintenant calculer le chargement  $(G, \psi)$  à la pointe de la fissure interfaciale. C'est l'ultime étape, qui donne les grandeurs apparaissant dans le critère de délamination. Les résultats sont représentés sur la figure 8.3. On remarque que le chargement sur le bord de la fissure est très similaire pour les deux types de cloques unidimensionnelles que nous considérons.

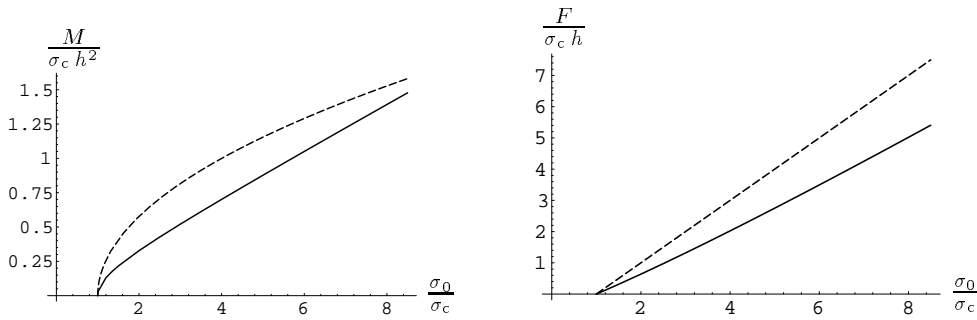


FIG. 8.2 – Chargements  $F$  et  $M$  permettant de calculer les contraintes sur la fissure au bord de la cloque, dans le problème de la figure 8.1. Les courbes pleines correspondent à la cloque circulaire, celles en pointillés à la cloque rectiligne. Le coefficient de Poisson vaut  $\sigma = 0,3$ . Les chargements sont adimensionnés par  $\sigma_0$  et  $h$ , et on représente leur variation en fonction du paramètre de flambage adimensionné.

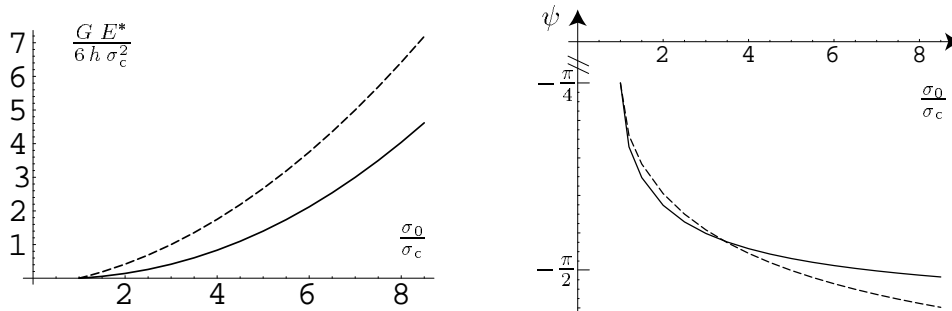


FIG. 8.3 – Chargement sur la fissure située au bord de la cloque de délamination, en fonction du paramètre adimensionné de flambage, et pour une cloque circulaire (courbes pleines) et rectiligne (en pointillés). Le coefficient de Poisson vaut  $\sigma = 0,3$ , et on a pris la valeur typique  $\omega = \frac{\pi}{4}$  — pour des valeurs autres de  $\omega$ , l'axe vertical des  $\psi$  serait légèrement translaté, cf. (8.2). La croissance de  $G$  avec le paramètre ( $\sigma_0/\sigma_c$ ), donc avec la taille  $b$  de la cloque à  $\sigma_0$  fixé, devrait rendre les cloques instables. C'est parce que  $|\psi|$  est aussi une fonction croissante de ( $\sigma_0/\sigma_c$ ) que la dépendance de mode de l'interface stabilise la délamination.

Plus important, le taux de restitution de l'énergie est une fonction croissante du paramètre de flambage adimensionné  $\frac{\sigma_0}{\sigma_c}$ . Considérons une cloque qui croît, à  $\sigma_0$  fixé. Les formules (7.33) ou (7.39) montrent que  $\sigma_c \propto b^{-2}$  décroît alors. On se déplace donc vers la droite sur les graphiques de la figure 8.3. D'après la partie gauche de la figure, le taux de restitution de l'énergie est une fonction *croissante* de la taille de la cloque. Si la ténacité n'était pas dépendante de mode, les cloques devraient donc être instables : la cloque tire de plus en plus fort sur l'interface au fur et à mesure qu'elle s'agrandit. Toute fluctuation dans la taille de la cloque autour de sa taille d'équilibre aboutirait dans ces conditions à la délaminaton totale du film.

Or le graphe de la figure de droite montre que  $\psi$  devient en même temps de plus en plus négatif. À environ huit fois le seuil critique, on atteint même la valeur  $\psi = -\frac{\pi}{2}$ , et à ce moment la pointe de la fissure se referme (le modèle de fissure refermée étudié dans la deuxième partie s'applique alors). La croissance de  $|\psi|$  implique que la ténacité  $\Gamma(\psi)$  augmente fortement (cf. les courbes expérimentales de  $\Gamma(\psi)$  sur la figure 5.2). C'est donc la ténacité dépendante de mode qui stabilise les cloques de délaminaton : si la cloque tire de plus en plus fort sur l'interface, elle tire aussi de moins en moins efficacement. Le concept de ténacité dépendante de mode a d'ailleurs été prédit initialement, car il permettait d'expliquer la stabilité des cloques de délaminaton.

Pour résumer, l'étude complète des cloques unidimensionnelles a montré que :

- le chargement sur la fissure au bord semble assez indépendant de la forme de la cloque : à condition de faire une comparaison à paramètre de flambage adimensionné constant, les fissures interfaciales au bord d'une cloque circulaire ou d'une cloque rectiligne supportent quasiment le même chargement ;
- sur la base des seules équations de F.-von K., il faut s'attendre à ce que la croissance des cloques soit toujours instable, et conduise à un décollement complet du film. En effet, l'énergie  $G$  disponible pour l'arrachement de l'interface croît indéfiniment avec la taille de la cloque ;
- la dépendance de mode de l'interface film/substrat peut cependant stabiliser les profils, en stoppant la croissance de la cloque à une taille finie.

C'est donc l'allure de la ténacité  $\Gamma(\psi)$  qui fixe la taille de la cloque. À ce titre, la dépendance de mode apparaît comme une propriété-clé dans la délaminaton, au moins en ce qui concerne les cloques unidimensionnelles.

### 8.2.2 Stabilité des profils quelconques

Les arguments précédents sont de portée limitée : ils ne s'appliquent qu'aux profils très particuliers pour lesquels il existe une solution explicite des équations de F.-von K. (cloque rectiligne ou circulaire). Ce type de motif est d'ailleurs rarement observé dans les expériences : les contraintes y sont telles que la cloque

circulaire devient instable [34], tout comme la cloque rectiligne (cf. §8.3). Comment interpréter alors la stabilité des profils de délamination observés dans les expériences ?

La question qui se pose naturellement est de savoir si le mécanisme proposé plus haut au §8.2.1 pour expliquer la stabilité des cloques unidimensionnelles ne s'appliquerait pas aussi à des profils plus généraux. La difficulté vient de ce que les solutions analytiques des équations de F.-von K., sur lesquelles nous nous étions appuyé, n'existent maintenant plus. Dans la première partie de l'article « Mode dependence and the delamination of thin films », reproduit p. 145 *et sq.*, nous avons pu répondre par l'affirmative : nous avons établi que le mécanisme de stabilisation des cloques par la dépendance de mode est en fait très général. Plus précisément, nous prouvons que la *forme* même des équations de F.-von K. (propriétés de symétrie, ordre de non-linéarité) suffit à retrouver tous les résultats du paragraphe précédent, à des constantes près. Cette approche, qui met l'accent sur la *structure* des équations de F.-von K., permet d'esquiver la résolution des équations de F.-von K. Nous renvoyons à cet article.

### 8.2.3 Conclusion

Le scénario auquel nous sommes conduit est le suivant : la cloque apparaît sur des petits défauts de l'interface <sup>1</sup>. Elle croît ensuite, éventuellement de façon dynamique (car  $G$  est croissant), jusqu'à ce que la ténacité effective de l'interface devienne si forte que la propagation est stoppée. Ce scénario, proposé pour des cloques unidimensionnelles [12, 29], semble en fait universel comme le montre l'article « Mode dependence. . . ». La dépendance de mode apparaît comme une propriété essentielle pour comprendre la stabilité des cloques de délamination.

En rassemblant les résultats de cette partie et de la partie précédente, nous aboutissons à cette image : pendant que la cloque croît, la fissure interfaciale se referme progressivement (croissance de  $|\psi|$ ). À une certaine taille, les lèvres de la fissure se touchent ( $\psi = -\frac{\pi}{2}$ ), et les frottements inter-labiaux finissent par arrêter la propagation. Cette vision est bien sûr simplifiée, car la dépendance de mode ne se réduit pas à des effets frictionnels. Elle n'est vraiment rigoureuse que dans la limite d'une fissure parfaitement cassante (la plasticité ne contribue alors plus à la dépendance de mode). Même légèrement simpliste, cette description de la délamination présente l'avantage d'être conforme aux expériences, relativement simple, et auto-suffisante : elle ne fait appel qu'à l'élasticité linéaire et au frottement de

---

<sup>1</sup>La présence de défauts de taille finie est une hypothèse indispensable pour expliquer la formation des cloques. En effet, la forme (7.33) ou (7.39) de  $\sigma_c$  montre que le film ne pourrait pas flamber s'il n'existait pas de défaut sur l'interface de taille au moins  $h \sqrt{E/\sigma_0}$ . Or en l'absence de flambage, la cloque ne peut pas progresser car  $G \equiv 0$ .

Coulomb.

### 8.3 Interprétation des profils

Revenons pour finir aux équations de F.-von K. Dans l'article reproduit en p. 138, nous nous sommes attaché à interpréter les motifs de délamination en fil de téléphone. Les ondulations y sont comprises comme le résultat d'une instabilité purement élastique affectant la cloque rectiligne. En effet, quand la compression initiale  $\sigma_0$  dépasse largement la compression critique  $\sigma_c$ , les équations (7.34) montrent que la composante transverse de la compression relaxe bien grâce au flambage mais pas la composante longitudinale. Ceci est parfaitement conforme à l'intuition : la colonne d'Euler flambée reste fortement comprimée longitudinalement. On peut donc s'attendre à ce que la colonne d'Euler subisse un flambage secondaire lui permettant de se débarrasser de cette compression longitudinale. L'étude analytique de cette bifurcation secondaire est possible car la colonne d'Euler est une solution analytique exacte des équations de F.-von K., même bien au-delà du seuil. Une instabilité comparable peut affecter cloque circulaire [34].

Il se trouve que le seuil de flambage secondaire (déstabilisation de la colonne d'Euler) est du même ordre de grandeur que le seuil initial (apparition de la colonne). Ceci n'est pas évident *a priori* : du fait du petit paramètre  $h/b$ , le seuil secondaire aurait pu être bien supérieur au seuil initial. Par conséquent, la plage de stabilité élastique de la cloque droite est relativement réduite, ce qui pourrait expliquer que l'on n'observe qu'exceptionnellement des motifs de délamination rectilignes. Pour les valeurs courantes du coefficient de Poisson du film, la colonne d'Euler devient instable au profit de motifs antisymétriques par rapport à l'axe longitudinal. Ceci est bien compatible avec l'observation de motifs oscillants. Pour des films ayant de faibles coefficients de Poisson ( $\sigma < 0,255$ ), cette étude prédit au contraire des motifs en gouttelettes. Ces derniers n'ont encore jamais été observés.

Une observation expérimentale due à Thoughless vient confirmer les conclusions de cette analyse. Cette observation, qui correspond précisément à la situation discutée dans l'article, n'a malheureusement pas été publiée mais elle est rapportée dans [30], et nous a été confirmée directement par son auteur. Si l'on refroidit un échantillon contenant une cloque de délamination rectiligne, on observe parfois que celle-ci se déstabilise au profit d'une cloque ondulante. L'effet du refroidissement est d'augmenter  $\sigma_0$ . Sur la figure 2 de la page 140, on voit en effet qu'un déplacement vers le haut peut avoir pour effet de déstabiliser la colonne d'Euler.

A. Pocheau et B. Roman à l'IRPHE ont démarré une expérience de thermoflambage qui prolonge l'analyse ci-dessus. Ils reproduisent à l'échelle macroscopique les conditions mécaniques auxquelles une cloque de délamination est soumise (voir





FIG. 8.4 – Compression bi-axiale d'une bande de film élastique obtenue par la dilation d'un cadre-mâchoire métallique, © IRPHE.

figure 8.4). Un échantillon de plaque élastique est encastré sur un cadre rigide au moyen d'une mâchoire. Les matériaux sont choisis de telle sorte que la plaque ait un coefficient de dilatation thermique plus grand que le cadre — la plaque est en matière plastique, alors que le cadre est métallique. Si l'on élève la température, la plaque se retrouve ainsi comprimée de façon bi-axiale et isotrope dans son plan, comme le film dans la région délaminée. Ce dispositif expérimental permet de s'affranchir d'une complication : le bord de la cloque de délamination était mouvant, il est ici fixe et connu à l'avance. Les résultats préliminaires semblent confirmer que la colonne d'Euler se déstabilise en oscillant de façon antisymétrique (cf. figure 8.4). S'ils étaient vérifiés, ces résultats constitueraient une preuve expérimentale que l'élasticité du film explique, à elle seule, les motifs de délamination en fil de téléphone, sans qu'il soit nécessaire d'invoquer des mécanismes liés à la fracture de l'interface.



## **Chapitre 9**

**Article paru dans  
*Phys. Rev. Letters***

### Stability of Straight Delamination Blisters

Basile Audoly

*Laboratoire de Physique Statistique de l'École Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75230 Paris Cedex 05, France*  
(Received 2 July 1999)

We consider the buckle-driven delamination of biaxially compressed thin films. Telephone-cord-like patterns observed in experiments are explained as a result of the buckling behavior of the film. We perform a stability analysis of a straight blister. A mechanism of instability causing undulations in an advancing finger of delamination is pointed out, which we claim to be the basic phenomenon explaining the zigzag pattern. We predict a transition to a varicose (unobserved as yet) pattern at low Poisson ratios.

PACS numbers: 68.55.-a, 46.32.+x

The elasticity of thin plates has been investigated by Föppl and von Kármán (FvK) early in this century. Because of the intricate nature of the equations, however, there remain many unsolved theoretical questions in this area. For example, thin films delamination is still poorly understood, although such films are widely used in the industry (e.g., insulating layers in microelectronics). A thin coated film is often obtained by vapor deposition on a substrate; if its thermal expansion coefficient is smaller than that of the substrate, the film acquires a residual biaxial compression upon cooling. In this case, a competition between this compression and the film-substrate cohesion can result in the partial delamination of the coating: in some region, the film lifts off the substrate, and forms a blister. Delamination patterns looking like telephone cords have been observed in a vast variety of films [1], and have recently been reproduced in computer simulations [2]. The configuration of the film in the delaminated region is an elongated tunnel with undulating edges, behind a propagating tip.

Although the first observations of telephone-cord-like patterns go back to the early 1960's [3], a satisfactory explanation for the origin of the undulations is still lacking. Recently, Gioia and Ortiz [4] have proposed a model capable of replicating the telephone-cord morphology; however, their approach neglects important, if not essential, aspects of thin film mechanics (in-plane displacements of the film are discarded), and does not explain the origin of the wrinkles. Yu *et al.* [5] have studied the telephone-cord-like patterns, overlooking the boundary conditions at the edge of the film, while these are known to be essential for the selection of the buckling patterns [6].

We explain these wrinkles from the mechanical properties of the film, and show that all aspects of thin film mechanics (in-plane displacements, lateral boundary conditions) are important for the understanding of these patterns. We start from the only elongated pattern that could receive an exact analytical treatment, the straight-sided blister [7], also called the "Euler column." When the Euler column is formed, the buckling of the film mostly releases the transversal stress. Prior to delamination, the initial compression of the film was biaxial and isotropic; a

large longitudinal compression therefore remains present in the Euler column. We perform a linear stability analysis of the Euler column, taking into account this longitudinal compression. To do this, we use the FvK equations for the film. We find that, for relatively small values of the compression, the column becomes unstable, as it undergoes a secondary buckling in the longitudinal direction.

In the delaminated region, the shape of the thin film is found by solving the FvK equations for plates. Let  $\zeta(x, y)$  be the vertical displacement of the film—for a simple description, we shall assume that the original plane  $(x, y)$  of the film is horizontal, gravity having no effect. The equations of mechanical equilibrium in the plane tangent to the film allow one to define the Airy potential,  $\chi(x, y)$ . The tangential components of the stress derive from it:  $\sigma_{xx} = \partial_{yy}\chi$ ,  $\sigma_{yy} = \partial_{xx}\chi$ ,  $\sigma_{xy} = -\partial_{xy}\chi$ . The FvK equations are two coupled nonlinear partial differential equations in  $\zeta$  and  $\chi$  [8]:

$$\Delta^2 \chi + E \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0, \quad (1a)$$

$$D \Delta^2 \zeta + h \sigma_0 \Delta \zeta - h \{\chi, \zeta\} = 0, \quad (1b)$$

where  $\sigma_0 > 0$  is the initial biaxial compression of the film,  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$  its bending rigidity,  $E$  is the Young's modulus,  $\nu$  is the Poisson ratio,  $h$  is the thickness of the film, and  $\{\chi, \zeta\} = (\partial^2 \chi / \partial y^2) (\partial^2 \zeta / \partial x^2) + (\partial^2 \chi / \partial x^2) (\partial^2 \zeta / \partial y^2) - 2(\partial^2 \chi / \partial x \partial y) (\partial^2 \zeta / \partial x \partial y)$ . The horizontal components of the displacement have been eliminated from these equations, but we shall need them to express boundary conditions later; they can be recovered from the following relations [8], which are compatible by (1a):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{-2(1 + \nu)}{E} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (2c)$$

A solution of the FvK equations representing a straight-sided blister of width  $2b$  is known; it is sketched in Fig. 1. It is found by solving the Eqs. (1), assuming cylindrical symmetry:  $\partial_y \zeta = \partial_y \sigma_{\alpha\beta} = 0$ . As the substrate is much thicker than the film, clamped boundary conditions must be imposed at the edge of the blister:

$$u_x = u_y = 0, \quad \zeta = \zeta_x = 0 \quad \text{at } x = \pm b. \quad (3)$$

The conditions  $u_x(\pm b, y) = u_y(\pm b, y) = 0$  are to be expressed using (2). If the initial compression is larger than the critical value  $\sigma_c^E = (\pi^2 D)/(b^2 h)$ , then there exists a buckled solution, the Euler column. It is defined by [7]:

$$\zeta^E(x, y) = \zeta_m^E \frac{1 + \cos \frac{\pi x}{b}}{2}, \quad \zeta_m^E = \frac{2h}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_c^E} - 1 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

This solution has no Gaussian curvature, which makes the FvK equations linear [the second term in Eq. (1a) vanishes]. Nonlinearities arise due to the boundary conditions only. This explains that an analytical solution can be found.

The compression in the column is uniform, and has the value  $\sigma_{xx} = -\sigma_c^E$ ,  $\sigma_{yy} = -[(1 - \nu)\sigma_0 + \nu\sigma_c^E]$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ . In comparison with the unbuckled state, all the components of the stress have decreased in magnitude. However, this buckling releases the initial biaxial compression in the transversal direction only: typical initial strains in the film can be as high as a few percent [9], so that compressions in the film may be far beyond the buckling threshold ( $\sigma_0 \gg \sigma_c^E$ ). As a result, an appreciable longitudinal compression  $\sigma_{yy} \approx -(1 - \nu)\sigma_0$  remains present in the film after the Euler buckling. This residual stress may induce a secondary buckling of the Euler column, addressed by studying the linear stability of the straight-sided blister.

Let  $(\hat{\zeta}, \hat{\chi})$  be a small perturbation in the configuration of the film near the Euler solution (4). We use dimensionless variables:  $\hat{\sigma}_0 = \sigma_0/\sigma_c^E$ ,  $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y)/b$ ,  $\hat{\zeta} = (\zeta - \zeta^E)/[b(\sigma_c^E/E)^{1/2}]$ ,  $\hat{\chi} = (\chi - \chi^E)/[2\pi(1 - \nu^2)^{1/2}(\hat{\sigma}_0 - 1)^{1/2}\sigma_c^E/b^2]$ . The Euler column being invariant by translation, one considers perturbations  $(\hat{\zeta}, \hat{\chi})$  that are harmonic in the  $y$  direction. Let  $l$  be the longitudi-

nal wavelength,  $\hat{l} = l/b$ , and  $\hat{q} = 2\pi/\hat{l}$  the wave vector:  $\hat{\chi}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\chi}_{\hat{q}}(\hat{x}) \cos(\hat{q}\hat{y})$ ,  $\hat{\zeta}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\zeta}_{\hat{q}}(\hat{x}) \cos(\hat{q}\hat{y})$ . For a mode of given wave vector,  $\hat{q}$ , the linearized Eqs. (1) yield two coupled ordinary linear differential equations of order 4 for  $\zeta_{\hat{q}}(\hat{x})$  and  $\chi_{\hat{q}}(\hat{x})$ :

$$\chi_{\hat{q}}^{(4)}(\hat{x}) - 2\hat{q}^2 \chi_{\hat{q}}''(\hat{x}) + \hat{q}^4 \chi_{\hat{q}}(\hat{x}) + \hat{q}^2 [4\pi^2(1 - \nu^2)(\hat{\sigma}_0 - 1)] \cos(\pi\hat{x}) \zeta_{\hat{q}}(\hat{x}) = 0, \quad (5a)$$

$$-\hat{q}^2 \cos(\pi\hat{x}) \hat{\chi}_{\hat{q}}(\hat{x}) + 1/\pi^2 \zeta_{\hat{q}}^{(4)}(\hat{x}) + \frac{\pi^2 - 2\hat{q}^2}{\pi^2} \zeta_{\hat{q}}(\hat{x}) + \{\hat{q}^4/\pi^2 - \hat{q}^2[\nu + (1 - \nu)\hat{\sigma}_0]\} \zeta_{\hat{q}}(\hat{x}) = 0, \quad (5b)$$

where  $f^{(n)} = d^n f/dx^n$ . When linearized, Eqs. (3) expressed using Eqs. (2) yield eight boundary conditions:

$$\begin{aligned} \text{at } \hat{x} = \pm 1, \quad \hat{\zeta}_{\hat{q}} = \hat{\zeta}_{\hat{q}}' = 0, \\ \hat{\chi}_{\hat{q}}'' + \hat{q}^2 \nu \hat{\chi}_{\hat{q}} + \hat{\chi}_{\hat{q}}^{(3)} - (2 + \nu)\hat{q}^2 \hat{\chi}_{\hat{q}}' = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Remarkably, any small parameter has been eliminated in Eqs. (5) and (6). Only  $\nu$  and  $\hat{\sigma}_0$  remain, which are both of order unity. This may look surprising at first: the mechanics of thin films and other elastic plates is ruled to a large extent by a small parameter,  $h/b$  in the present case. This small parameter makes the film much easier to bend than to stretch. The easy formation of local singularities in elastic films, such as  $d$ -cones [10] or ridges [11], follows from the smallness of this parameter. So, how could we get rid of this small number if it is so essential to the mechanics of thin films? The answer is that, in contrast to recent works on elastic plates, we are considering a thin film submitted to tangential stretching (along the edge of the blister, the longitudinal compression  $\sigma_0 \neq 0$  is transmitted to the film). As a result, the extensional contribution to the elastic energy is always present (the instability investigated below results from a competition between bending and stretching).

A shooting method can be used to isolate numerically the solutions of Eqs. (5) satisfying the boundary conditions (6). They correspond to the marginally stable configurations of the Euler column. For each value of  $\nu$ , this yields the diagram of linear stability of the Euler column in the  $(\hat{l}, \hat{\sigma}_0)$  plane, as in Fig. 2. The superscript "S" stands for "secondary" buckling. Because the Euler column is symmetric under  $x \leftrightarrow (-x)$ , the marginal modes that are symmetric, or antisymmetric in the  $x$  direction, have been sought independently; hence, the two branches,  $S+$  (symmetric) and  $S-$  (antisymmetric), on the diagram.

For every value of  $\nu$ , the most unstable symmetric and antisymmetric mode can be located on the diagram: let  $\sigma_c^{S\pm}(\nu)$  and  $l^{S\pm}(\nu)$  be the corresponding critical initial compression, and wavelength. In Fig. 3, these quantities have been plotted versus  $\nu$ . For  $\sigma_0 > \sigma_c^{S\pm}(\nu)$ ,

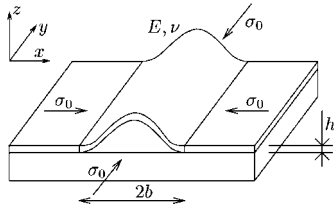


FIG. 1. The Euler column, solution of the FvK equations  $\sigma_0 > \sigma_c^E$

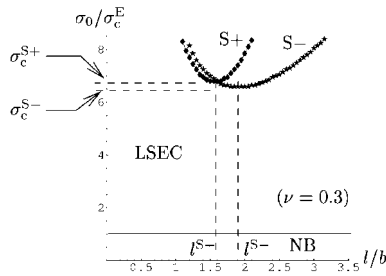


FIG. 2. Diagram of linear stability of the Euler column: no buckling (NB), linearly stable Euler column (LSEC), unstable Euler column by secondary antisymmetric buckling ( $S^-$ ), or secondary symmetric buckling ( $S^+$ ).

compression. Typically, the dimensionless buckling parameter ( $\sigma_0/\sigma_c^E$ ) lies in the range 25–75 in experiments. This estimate has been obtained from Eq. (4), using values of  $h \sim 200$  nm and  $\xi_m^E \sim 1.5$   $\mu$ m provided in Ref. [9]. Comparison with  $\sigma_c^S/\sigma_c^E \approx 6.5$  in Fig. 3 shows that the Euler column is unstable under typical experimental conditions; this explains why straight tunnels are very seldom observed.

For  $\nu < \nu_c$ , the most unstable mode is symmetric, while for  $\nu > \nu_c$  it is antisymmetric. The number  $\nu_c$  can be determined numerically as the value at which the curves  $\sigma_c^{S+}(\nu)$  and  $\sigma_c^{S-}(\nu)$  intersect in Fig. 3. As these curves do not depend on any parameter other than  $\nu$ , its value is universal:  $\nu_c = 0.255 \pm 0.001$ . The configuration of the film after longitudinal buckling is represented in Fig. 4. The symmetric buckling ( $S^+$ ) involves vertical undulations of the Euler column, while the antisymmetric one ( $S^-$ ) looks more like a transverse periodic deformation of the column. The selection of the

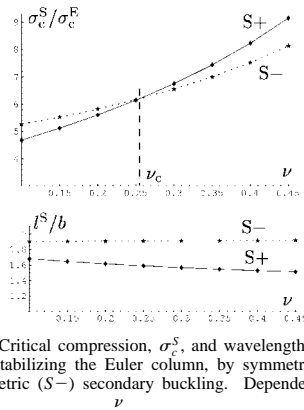


FIG. 3. Critical compression,  $\sigma_c^S$ , and wavelength,  $l^S$ , of the mode destabilizing the Euler column, by symmetric ( $S^+$ ) or antisymmetric ( $S^-$ ) secondary buckling. Dependence on the  $\nu$

symmetric versus antisymmetric pattern is understood as follows. The density of stretching elastic energy in a plate [8],

$$\mathcal{E}_s = \frac{E}{1-\nu^2} [u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2\nu u_{xx}u_{yy} + 2(1-\nu)u_{xy}^2],$$

shows that the relative energetic cost of shear ( $u_{xy}$  term) versus compression ( $u_{xx}$  and  $u_{yy}$  terms) increases as  $\nu$  decreases. This explains that the symmetric secondary buckling, which involves less shear than the antisymmetric one, is obtained at lower values of  $\nu$ .

So far, the blister had imposed fixed, straight edges, and advance of the crack between film and substrate has not been discussed. In this paragraph, we consider the lateral growth of the preexisting, infinitely long, Euler column. As long as the edges of the blister remain straight and parallel, the spread of this column can be easily incorporated in the preceding analysis. The prediction of the width of the column,  $b$ , as a function of the initial compression,  $\sigma_0$ , relies on a propagation criterion for the interface crack, and is not discussed in this Letter; we shall merely mention that cracking a unit area of the interface in mode II (shearing) requires more energy than in mode I (opening), a fact which seems essential to explain the stability of the column [12,13]. The only effect of the increase of  $b$  is to lower progressively  $\sigma_c^E \propto b^{-2}$ . As shown above, the ratio  $\sigma_c^S/\sigma_c^E$  depends only on  $\nu$  and not on  $b$ , so that

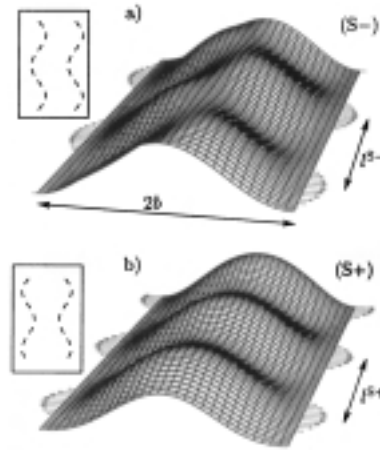


FIG. 4. Secondary buckling of the Euler column under the effect of the residual longitudinal compression (amplitude of the deflection is arbitrary). When (a)  $\nu = 0.3$  the most unstable mode is antisymmetric ( $S^-$ ), while (b) for  $\nu = 0.2$ , it is symmetric ( $S^+$ ). Instability of the delamination front caused by this secondary buckling has been represented by the lateral

$\sigma_c^S \propto b^{-2}$  also decreases. For a given initial compression  $\sigma_0$ , there exists a critical width of the column where  $\sigma_c^S$  becomes smaller than  $\sigma_0$ , and the column buckles longitudinally. The loading on the delamination front is then no longer uniform. As shown in Fig. 4, portions of the delamination front become unstable: lateral arrows have been drawn, with a length proportional to the increase of  $G$  caused by the secondary buckling, where  $G$  is the energy release rate [14] along the film-substrate crack. Above this critical width, the sides of the blister cannot remain straight, and a tunnel with wavy edges is formed. The symmetry of the marginal modes suggests that these edges remain parallel if  $\nu > \nu_c$ , and are mirror symmetric if  $\nu < \nu_c$ , as shown in the insets. The increase of  $\sigma_0$  has exactly the same effects as that of  $b$ , as the dimensionless buckling parameter has the form  $\sigma_0/\sigma_c^S \propto \sigma_0 b^2$ . Destabilization of the Euler column can result from the lateral growth of the column (increase of  $b$ ), from the increase of  $\sigma_0$ , or both. This picture is strongly supported by an experimental observation: when a sample with a preexisting, infinite, *straight-sided* blister is cooled down, the straight edges become unstable, leading to a telephone-cord-like morphology [15] (the cooling increases  $\sigma_0$ ).

In most experiments, telephone-cord blisters do not result from the destabilization of a preexisting, infinite, straight blister: they wave as they spread forward. The advance of a finger of delamination is a very difficult problem, because solutions to the FvK equations are not available, except for very simple geometries of the boundary, and the edge of the blister is not even known in advance. However, the results derived above suggest a simple mechanism of instability affecting the propagation of a semi-infinite finger of delamination, leading to undulations; by finger, we mean an elongated, straight blister. Consider a film with a Poisson ratio  $\nu > \nu_c$  (for most films used in experiments,  $\nu$  is very close to 0.3, which is indeed larger than  $\nu_c$ ). For typical experimental widths of blisters and initial compressions,  $\sigma_0 \gg \sigma_c^E$ , as noted above. Therefore, the portion of the blister well behind the tip is a Euler column which shall undergo an antisymmetric longitudinal buckling. The undulations are transmitted to the tip via the elasticity of the film. The  $x \leftrightarrow (-x)$  symmetry at the tip is broken, which prevents straight propagation (see Fig. 5). This generically leads to undulations in the path of the blister [16]. This approach suggests that the wavelength of the pattern shall be close to the natural longitudinal length scale,  $l^S \approx 1.9b$ . In experiments, the width,  $2b$ , and the wavelength of the telephone cords are indeed comparable [1].

In conclusion, the present approach demonstrates that the undulations in the patterns of delamination permit an optimal release of the elastic energy stored in the film. This interpretation simply relies on the elastic properties of the film, which is consistent with the fact that these patterns have been observed in a variety of experimental



FIG. 5. A mechanism of instability leading to undulations in a finger of delamination: longitudinal buckling in the tail of the blister breaks the symmetry at the tip, and favors oblique propagation.

conditions. Analytical investigations are limited to a weakly nonlinear regime ( $\sigma_0 \sim \sigma_c^S$ ), while experimental blisters are in fact in a fully nonlinear regime ( $\sigma_0 \gg \sigma_c^S$ ). The value of  $\nu_c$ , which selects the antisymmetric, versus symmetric, pattern shall be affected. Experiments using macroscopic plates are being conducted to explore this fully nonlinear regime.

The Laboratoire de Physique Statistique is associé with the CNRS, the École Normale Supérieure, and the Universités Paris VI and Paris VII.

- [1] For a review and many micrographs, see Ref. [4].
- [2] K.M. Crosby and R.M. Bradley, Phys. Rev. E **59**, R2542 (1999).
- [3] See, e.g., J.R. Priest *et al.*, *Transactions of the Ninth National Symposium of the American Vacuum Society*, edited by G.H. Bancroft (Macmillan, New York, 1962), pp. 121–124.
- [4] G. Gioia and M. Ortiz, Adv. Appl. Mech. **33**, 119 (1997).
- [5] H.Y. Yu, C. Kim, and S.C. Sanday, Thin Solid Films **196**, 229 (1991).
- [6] M. Boucif, J.E. Wesfreid, and E. Guyon, Eur. J. Mech. A, Solids **10**, 641 (1991).
- [7] J.W. Hutchinson and Z. Suo, Adv. Appl. Mech. **29**, 63 (1991).
- [8] L.D. Landau and E.M. Lifschitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon, New York, 1959).
- [9] G. Gille and B. Rau, Thins Solid Films **120**, 109 (1984).
- [10] M. Ben Amar and Y. Pomeau, Proc. R. Soc. London A **453**, 729 (1997).
- [11] A.E. Lobkovsky, Phys. Rev. E **53**, 3750 (1996); E.M. Kramer and T.A. Witten, Phys. Rev. Lett. **78**, 1303 (1997).
- [12] J.W. Hutchinson, M.D. Thouless, and E.G. Liniger, Acta Metall. Mater. **40**, 295 (1992).
- [13] B. Audoly (to be published).
- [14] J.R. Rice, J. Appl. Mech. **35**, 379 (1968).
- [15] M.D. Thouless (private communication).
- [16] M. Adda-Bedia and Y. Pomeau, Phys. Rev. E **52**, 4105 (1995).





## **Chapitre 10**

**Article à paraître dans  
*J. Mech. Phys. Sol.***



# Mode Dependent Toughness and the Delamination of Compressed Thin Films

B. Audoly

*Laboratoire de Physique Statistique de l'École Normale Supérieure,  
associé au CNRS, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France*

---

## Abstract

We consider the buckle-driven delamination of compressed thin films. For a wide class of patterns of delamination, it is shown that the loading on the delamination front progressively goes from mode *I* to mode *II* during growth of the blister. As a result, the mode dependence of the film/substrate interface excludes widespread delamination. This explains the observations of blisters of finite extent, which are otherwise difficult to interpret. We also study a model of interfacial fracture with friction. It reveals that a severe mode dependence can be induced by interfacial friction. This permits to account for the mode dependence, using only simple ingredients: friction and linear elasticity.

*Key words:* A. delamination; B. plates; C. stability and bifurcations; B. friction.

---

Coated materials have many applications in the industry: coatings permit to obtain wear-resistant metal-cutting tools, thermal barriers in the aircraft and automobile industry, insulating layers in microelectronics, etc. The reliability of coated materials has become a growing field of interest in the recent past. In this paper, we are concerned with a particular mode of failure of these materials, the buckle-driven delamination. Coated materials are often obtained by vapor deposition of a thin film on a substrate at high temperature. The film and the substrate are made of different materials, and because of the mismatch of thermal expansion coefficients between them, the film acquires a biaxial residual stress  $\sigma_0$  upon cooling. When this residual stress is compressive ( $\sigma_0 < 0$ ), and large enough, an elastic instability may take place: to release its compression, the film tends to lift off the substrate, fracturing the interface [1,2]. This instability results from a competition between the elasticity of the film, and the cohesion of the interface. Complex patterns of delamination have been observed, as telephone cord blisters [3]. The mechanical conditions

---

<sup>1</sup> Basile.Audoly@lps.ens.fr

that lead to the rupture of the interface are not well understood yet, and the interpretation of the patterns remains a challenge so far.

The ability of the interface to sustain a certain loading without fracturing is called its toughness. This quantity has been measured in experiments for a variety of interfaces. The interface toughness is systematically enhanced [4,5] when the loading on the crack tip goes from mode *I* to mode *II*: interfaces are more easily fractured when the faces are pulled apart than when sheared. This property is called the mode dependence of the toughness (we shall sometimes refer to it simply as the “mode dependence”). Previous theoretical studies [6–8] suggest that the mode dependence of the film/substrate interface is essential to account for the patterns of delamination. In the first section of the present paper, we explore this idea further: we study the patterns of delamination that are obtained when the toughness of the interface is assumed mode dependent. In particular, we show that the existence of blisters of finite size can be accounted for. Indeed, as a blister gets bigger, the fracture becomes more and more a mode *II* crack. In section 2, we show that the mode dependence in an interface crack can be explained using only simple ingredients: friction and linear elasticity. We derive an effective interface toughness when friction between the crack faces is modelled using a Coulomb law (constant proportionality factor between shear and normal contact stresses). A strong mode dependence is obtained, due to interfacial friction.

For sake of simplicity, we consider only *quasi-static* propagation of cracks. Moreover, we neglect the effect of transverse (mode *III*) loading on the cracks, and use 2D elasticity. A justification for this approximation is given at the end of section 1. The toughness of the interface,  $\Gamma$ , is defined as the energy that must be brought to the crack tip to fracture a unit area, and has the dimension of a surface tension. The mode mixity parameter,  $\psi$ , measures the relative importance of mode *I* (opening) to mode *II* (shearing) at the crack tip:  $\psi = \tan^{-1}(K_{II}/K_I)$ , where  $K_I$ ,  $K_{II}$  are the stress intensity factors [9]. The mode dependence implies that  $\Gamma$  does not only depend on the nature of the interface, but is also a function of the applied loading, through  $\psi$ . Note that this parameter is taken in the range  $-180^\circ < \psi < 180^\circ$ , as it is the phase in the  $(K_I, K_{II})$  plane. When  $|\psi| \geq 90^\circ$ , the opening stress intensity factor,  $K_I$ , is negative and the crack tends to close. This situation, that we shall consider in section 2, arises when the loading presses the crack faces against each other. The definitions of  $K_I$ ,  $K_{II}$ , and  $\psi$  are then somewhat arbitrary, because the standard crack analysis yields overlap of the crack faces.

## 1 Stability of delamination blisters

In this section, the mode dependent toughness of the interface crack is assumed; we investigate what patterns of delamination can be stable in the presence of mode dependence. If the interface has been cracked over some region but the film has not buckled, then the film remains uniformly compressed and the crack front is unloaded: the loading on the interfacial crack tip arises from the buckling of the film. Moreover, the buckled configuration of the film depends on the geometry of the delamination front. This shows that buckle driven delamination couples two problems: the elastic deformation of the film, and the propagation of the interface crack. The buckling of the debound portion of the film is governed by the Föppl–von Kármán equations for elastic plates. The propagation of the interface crack is approached using the concept of energy release rate. This quantity,  $G$ , is defined along the crack front using the Rice integral [10,11] along an vanishingly small transverse contour. Like the toughness of the interface,  $\Gamma$ , the energy release rate,  $G$ , has the dimension of a surface tension. It measures the intensity of loading, as it is the energy available at the crack tip to break interfacial bonds, per unit area of advance of the crack. A standard propagation criterion for the crack is  $G \geq \Gamma(\psi)$  (becoming an equality for quasi-static propagation). The quantities  $G$  and  $\psi$  shall be determined by solving the equations of elasticity for the film and substrate. The dependence of  $\Gamma$  on  $\psi$  expresses the mode dependence of the interface toughness:  $\Gamma$  increases for large  $|\psi|$ . The geometry of a blister is presented in figure 1. We call  $E$ ,  $h$ , and  $\nu$  the Young’s modulus, thickness and Poisson ratio of the film, respectively;  $b$  is the characteristic size of the blister.

### 1.1 Known results for 1D blisters

One dimensional (1D) patterns of delamination, *i.e.* circular or straight-sided blisters, have been previously studied. To prepare the study of more general patterns in §1.2, we first recall how 1D blisters are approached, and how their stability is explained (see Ref.s [12,7] for the circular blister, and [13,3] for the straight-sided one). The Föppl–von Kármán equations for the straight-sided blister (also called the Euler column) can be solved exactly. Those for the circular blister can be reduced to ordinary differential equations, and a weakly nonlinear analysis can be carried out analytically. In both cases, the critical stress with clamped boundary conditions,  $\sigma_c$ , predicted by the classical buckling theory reads:

$$\sigma_c = \frac{k^g E}{1 - \nu^2} \left( \frac{h}{b} \right)^2, \quad (1)$$

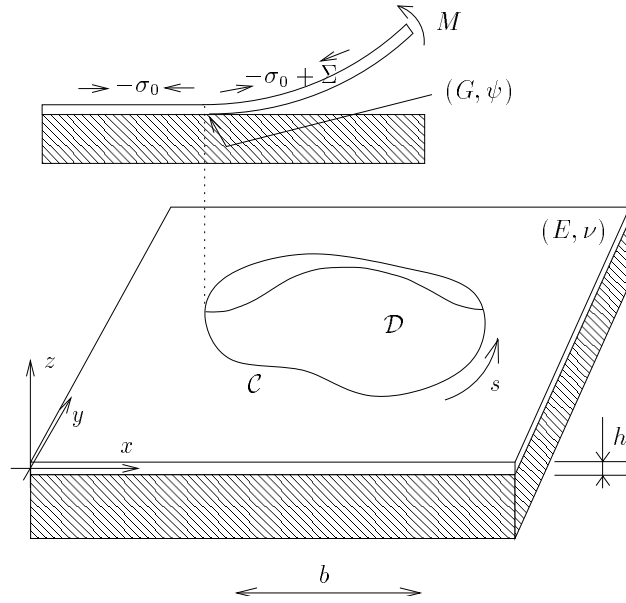


Fig. 1. Geometry of a generic 2D blister. The insert above shows a vertical section around the crack front. A discontinuity of normal stress,  $\Sigma$ , is induced by the buckling.

where  $b$  is half the width, and  $k^g = \pi^2/12$  for the straight-sided blister; or  $b$  is the radius and  $k^g = 1.223$  for the circular blister [14]. All quantities that depend on the geometry of the blister are labelled by a superscript “g”. Using  $\sigma_c$ , it is convenient to define a dimensionless buckling parameter,  $\eta$ , as:

$$\eta = \frac{-\sigma_0}{\sigma_c} - 1 = \frac{1 - \nu^2}{k^g} \left( \frac{-\sigma_0}{E} \right) \left( \frac{b}{h} \right)^2 - 1. \quad (2)$$

The buckling instability takes place when the residual stress in the film is compressive enough:  $\eta > 0$ , *i.e.*  $\sigma_0 < -\sigma_c$ .

Knowing the buckled configuration of the film, one can calculate two quantities of particular interest,  $M$  and  $\Sigma$ ; these two quantities determine the loading on the crack tip, and therefore govern the growth of the blister.  $M$  is the moment per unit length transmitted across the edge of the blister, and  $\Sigma$  is the normal stress *change* across this edge ( $\Sigma = \sigma_{nn} - \sigma_0$ , where  $\sigma_{nn}$  is the in-plane stress on the inner boundary of the blister, perpendicular to the boundary)—see figure 1. In 1D blisters, these quantities take the form:

$$\Sigma = c_1^g(\nu) \frac{Eh^2}{b^2} \eta^{\frac{1}{2}} \quad M = c_2^g(\nu) \frac{Eh^4}{b^2} \eta, \quad (3)$$

where  $c_{1,2}$  are positive *pure numbers* of order 1, which depend on the Poisson coefficient of the film,  $\nu$ , and on the geometry of blister, as indicated by the superscript “g”.

The profile of the blister determines how the film is pulling on the interface crack. Reference [15] indeed gives the crack tip loading (the energy release rate,  $G$ , and the mode mixity parameter,  $\psi$ ), in terms of the so called edge loads,  $\Sigma$  and  $M$ :

$$\begin{aligned} G &= \frac{6(1-\nu^2)}{Eh^3} \left( M^2 + \frac{1}{12} (h^2 \Sigma)^2 \right) \\ &= \frac{6(1-\nu^2) Eh^5}{b^4} \left( [c_1^g(\nu)]^2 \eta + \frac{1}{12} [c_2^g(\nu)]^2 \eta^2 \right) \end{aligned} \quad (4-a)$$

$$\begin{aligned} \psi &= -90^\circ + \omega(E/E_s, \nu, \nu_s) - \tan^{-1} \left( \frac{\Sigma h^2}{M \sqrt{12}} \right) \\ &= -90^\circ + \omega(E/E_s, \nu, \nu_s) - \tan^{-1} \left( c_3^g(\nu) \eta^{-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (4-b)$$

where  $\omega$  is an angle in the range  $50^\circ < \omega < 65^\circ$  depending on the elastic constants of the film and substrate,  $E_s$  is the Young's modulus and  $\nu_s$  the Poisson ratio of the substrate, and  $c_3^g = c_1^g/(c_2^g \sqrt{12})$ . The angle  $\omega$  is a constant of the interface, and does not depend on the shape or size of the blister.

The mode dependence is essential in interfacial fracture, as was seemingly first appreciated by Whitcomb [6] in his study of compressive failure modes in composites. Indeed, let us consider the growth of a 1D blister of delamination at constant residual stress  $\sigma_0$ . We shall not discuss the initiation of the growth, which involves defects on the interface. As the blister grows, its size  $b$  increases, and so does  $\eta$  by Eq. (2). Equation (4-a) then shows that  $G(b)$  increases with  $b$  (note that by symmetry,  $G$  is uniform along the crack front in 1D). Assume that the blister reaches an equilibrium size,  $b_{eq}$ ; this size is such that the crack front is in equilibrium:  $G(b) = \Gamma(\psi(b))$ . In the absence of a mode dependent interface toughness ( $d\Gamma/d\psi \equiv 0$ ), any fluctuation of  $b$  *above*  $b_{eq}$  would make  $G$  larger than  $\Gamma$ , so that the crack is unstable and  $b$  becomes even larger. This would indicate an instability of 1D blisters leading to full delamination of the film, contrary to experimental observations.

By the paragraph above, the mode dependence is necessary to explain the stability of 1D blisters. A simple argument shows that it is also sufficient. Indeed, the mode mixity parameter,  $\psi$ , becomes more and more negative as the blister grows. This is because in Eq. (4-b),  $\psi$  depends on the size of the blister only through the term:  $-\tan^{-1}(c_3^g(\nu) \eta^{-\frac{1}{2}})$ , and  $c_1$ ,  $c_2$ , and so  $c_3$ , are positive. Typically,  $\psi \approx -40^\circ$  at the buckling threshold ( $\eta \ll 1$ ) reaches values of order  $\psi \approx -90^\circ$  well above the buckling threshold ( $\eta \sim 1$ ) [7]. As mentioned above, the interface toughness,  $\Gamma(\psi)$ , is the minimum value of

$G$  that permits steady propagation of the crack; it is mode dependent, and strongly increases for large absolute values of the mode mixity parameter,  $|\psi|$ . This can explain the arrest of delamination of 1D blisters at a finite size: the blister pulls more and more strongly on the interface crack as it spreads ( $G$  increases), but, above all, less and less efficiently ( $\Gamma$  increases due to the mode dependence of the interface).

### 1.2 Extension to 2D blisters

Subsection 1.1 above suggests that the mode dependence is essential to explain the stability of blisters observed in experiments. However, a strong limitation of this argument is that only circular or straight-sided blisters have been considered. The question arises whether the proposed mechanism is specific to 1D geometries, or if it can stabilize blisters of any shape. Below, we show that a much broader class of patterns of delamination is in fact stabilized by the *same* mechanism. Indeed, we consider all blisters that have a single typical length scale. More accurately, if  $b$  is the typical extent of the blister, we assume that the curvature of its boundary is nowhere much larger than  $1/b$ . This class contains in particular circular and straight-sided blisters, but also, more interestingly, a wide number of 2D, eventually non-convex, patterns. Telephone-cord blisters are however excluded, because their length is much larger than their width.

The study of 2D blisters (*i.e.* blisters that are neither circular nor straight-sided) is made difficult by the absence of analytical solutions to the nonlinear Föppl–von Kármán equations, when the boundary conditions are on an arbitrary curve  $\mathcal{C}$ . Even a numerical approach leads to overwhelming difficulties, due to the presence of strong nonlinearities in these equations [16]. These difficulties are overcome, because we adopt a scaling law approach. To prove that the mode dependence excludes widespread delamination of 2D blisters, we proceed in several steps. First, we use energy arguments to show that a 2D blister always buckles by a supercritical bifurcation (*i.e.* the vertical deflection in the buckled configuration is vanishingly small just above threshold, for  $\eta \ll 1$ ). This allows to perform, in a second step, a weakly nonlinear analysis of the buckling of a blister; the dependence of  $\psi$  on the blister size in Eq. (4-b) is extended later to generic blisters. This permits to establish that, for 2D as well as for 1D blisters,  $|\psi|$  increases during growth of the blister; in consequence, the mode dependence induces a progressive toughening of the interface, which can prevent full delamination of the film.



### 1.2.1 The Föppl–von Kármán equations

Let  $\mathcal{D}$  be the region where the film has debonded from the substrate, and  $\mathcal{C}$  the boundary of  $\mathcal{D}$ , *i.e.* the edge of the blister. We consider the buckling of the film in  $\mathcal{D}$ . For a simple description, we take the unperturbed plane of the film horizontal (gravity has no effect). The profile of the blister is parametrized by the vertical displacement  $\zeta(x, y)$ , as a function of the horizontal coordinates  $(x, y)$ . The tangential components of the stress derive from the Airy potential,  $\chi(x, y)$ :  $\sigma_{xx} = \sigma_0 + \chi_{,yy}$ ,  $\sigma_{yy} = \sigma_0 + \chi_{,xx}$ ,  $\sigma_{xy} = -\chi_{,xy}$ , where the subscript comma indicates derivation. We remind that  $\sigma_0$  is the initial compression of the film. The elastic energy functional for the thin film reads [17]:

$$E_{\text{FvK}}\{\zeta, \chi\} = \iint_{\mathcal{D}} dx dy \left\{ \frac{D}{2} \{(\Delta\zeta)^2 - 2(1-\nu)[\zeta, \zeta]\} + \frac{h}{2E} (\Delta\chi + 2\sigma_0)^2 - \frac{h(1+\nu)}{E} ([\chi, \chi] + \sigma_0 \Delta\chi + \sigma_0^2) \right\}, \quad (5)$$

where  $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ ,  $\Delta$  is the 2D laplacian operator, and  $[f, f] = f_{,xx}f_{,yy} - f_{,xy}^2$ . Minimization of this energy with respect to functions  $\zeta$  and  $\chi$  yields the equilibrium equations for the film, the Föppl–von Kármán equations [18]:

$$\Delta^2 \chi + E \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} = 0, \quad (6-a)$$

$$D \Delta^2 \zeta - h \sigma_0 \Delta \zeta - h \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (6-b)$$

Because the substrate is infinitely thick, the film may be considered as clamped along its edge  $\mathcal{C}$ . In order to enforce the corresponding boundary conditions, the horizontal components of the displacement,  $(u_x, u_y)$ , are needed. They have been eliminated in the Föppl–von Kármán equations, but can be recovered from the following relations [18], which are compatible by Eq. (6-b):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2, \quad (7-a)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2, \quad (7-b)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{-2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (7-c)$$

## 1.2.2 The buckling is supercritical

We shall now prove the following intermediate result: if there exists a buckled configuration  $(\zeta_b, \chi_b)$  of the film, solution of the Föppl–von Kármán equations in the domain  $\mathcal{D}$ , then any *unbuckled* equilibrium configuration  $(\zeta_u \equiv 0, \chi_u)$  is unstable with respect to this buckled configuration. As a result, an unbuckled configuration of the film cannot be metastable above the buckling threshold, and the initial buckling of the film is necessarily a supercritical bifurcation. This will permit to derive scaling laws for the edges loads,  $M$  and  $\Sigma$ , later in §1.2.3.

To prove the intermediate result, we assume that a buckled equilibrium configuration  $(\zeta_b, \chi_b)$  exists; then, we introduce a one parameter family of configurations for the film,  $(\zeta_v, \chi_v)$ , indexed by a parameter  $v$ :

$$\zeta_v = v \zeta_b \quad \chi_v = (1 - v^2) \chi_u + v^2 \chi_b. \quad (8)$$

One recovers the unbuckled configuration  $(0, \chi_u)$  for  $v = 0$ , the buckled configuration  $(\zeta_b, \chi_b)$  for  $v = 1$ , and the mirrored one  $(-\zeta_b, \chi_b)$  for  $v = -1$ . Because of the horizontal mirror symmetry  $\mathcal{S} : (\zeta, \chi) \mapsto (-\zeta, \chi)$  in the Föppl–von Kármán equations,  $v = -1$  is an equilibrium state of the film, as well as  $v = 0, 1$  by assumption. For other values of  $v$ , the film is not in equilibrium, and equations (6) do *not* hold.

An important point is that *all* configurations indexed by  $v$  satisfy the clamped boundary conditions, provided the two original states  $(0, \chi_u)$  and  $(\zeta_b, \chi_b)$  do. Indeed, these boundary conditions read, along the edge of the blister,  $\mathcal{C}$ :  $u_x = u_y = 0$  (no horizontal displacement), and  $\zeta = \zeta_{,n} = 0$ , where the subscript “n” stands for a normal derivative. The horizontal components of the displacement are solutions of equations (7), which, by definition (8), only depend on  $v$  through terms proportional to  $v^2$ . Therefore, they necessarily take the form:  $u_x^v = u_x^u + v^2 (u_x^b - u_x^u)$ , and a similar formula for  $u_y^v$ . Since, by assumption, the clamped boundary conditions are satisfied for  $v = 0, 1$ , one has  $u_x^u = (u_x^b - u_x^u) = 0$ , hence  $u_x^v = 0$  along the edge  $\mathcal{C}$ , for all  $v$ . The same holds for  $u_y^v$ , and the first set of boundary conditions is satisfied for any configuration in the family indexed by  $v$ . Finally, using similar arguments,  $\zeta_v = (v \zeta_b) = 0$  and  $\zeta_{,n}^v = v (\zeta_b)_{,n} = 0$  on the edge of the blister, and the second set of boundary conditions is also satisfied for any  $v$ .

All configurations  $(\zeta_v, \chi_v)$  therefore correspond to the *same* blister with a fixed boundary,  $\mathcal{C}$ , and it makes sense to plot the elastic energy of the film as a function of  $v$ . The constraints on this plot are: (i) it must be symmetric under the mirror symmetry  $\mathcal{S} : v \mapsto (-v)$ ; (ii) the energy is stationary for  $v = -1, 0, 1$ ; (iii) finally, combination of Eq. (5) and (8) shows that this energy is a polynomial in  $v$  of degree 4. In order to feature two symmetric

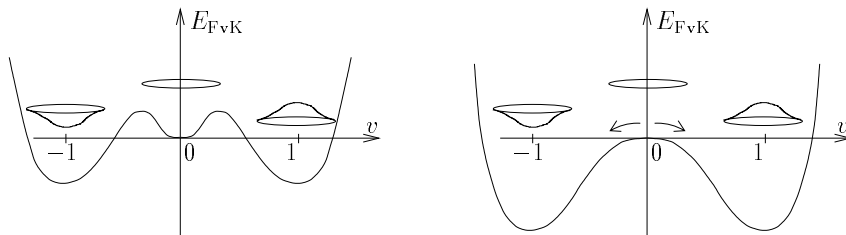


Fig. 2. The initial buckling of a 2D blister is always supercritical: metastability of the unbuckled configuration in the presence of a buckled equilibrium configuration (left) would be incompatible with the actual form of the Föppl-von Kármán energy (right).

stable equilibrium states at  $v = \pm 1$ , plus a metastable one at  $v = 0$ , the energy would need to be a polynomial of degree at least 6 in  $v$  (see figure 2, left). This shows, by contradiction, that any unbuckled equilibrium state of the film,  $v = 0$ , is unstable above the buckling threshold (figure 2, right), and not metastable. Therefore, we have proved that the buckling of the film is always supercritical.

That the buckling bifurcation is supercritical implies that the critical compression  $\sigma_0$  can be determined by studying the linear stability of the unbuckled configuration. Let  $\zeta^{[1]}$ ,  $\chi^{[1]}$ ,  $u_x^{[1]}$ , and  $u_y^{[1]}$  be an infinitesimal change in the configuration of the film near the unbuckled state. Linearization of equations (6) yields the equation for a marginal mode:

$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \zeta^{[1]} - h \sigma_0 \Delta \zeta^{[1]} = 0 \text{ on } \mathcal{D}, \quad (9)$$

with the boundary conditions  $\zeta^{[1]} = \zeta_{,n}^{[1]} = 0$  along  $\mathcal{C}$ . The Airy potential and the in-plane displacements vanish for a marginal mode, as the linearization of equations (6) and (7) yields  $\chi^{[1]} = 0$  and  $u_x^{[1]} = u_y^{[1]} = 0$ . That the marginal mode involves only vertical displacements will be explained below by symmetry arguments.

Dimensional analysis of Eq. (9) for the marginal mode again leads to Eq. (1) for the critical stress  $\sigma_c$ . Therefore, the critical stress for buckling in the region  $\mathcal{D}$  is comparable to that for buckling in a circular region of comparable extent,  $b$ . Now,  $k^{\mathfrak{s}}$  is a coefficient depending only on the blister geometry [and not on  $b$ , which appears independently in Eq. (1)]. This geometrical coefficient  $k^{\mathfrak{s}}$  could be calculated for any particular blister geometry by solving Eq. (9), but this is unnecessary: since we consider blisters having a *single* typical length scale,  $k^{\mathfrak{s}}$  has to be of order 1. This is all we shall need to know about  $k^{\mathfrak{s}}$  for the rest of the analysis. Incidentally, this paragraph proves that for the class of

blisters studied here, the dimensionless buckling parameter,  $\eta$ , is still given by Eq. (2).

### 1.2.3 Weakly nonlinear analysis above the buckling threshold

If the buckling were subcritical (as in figure 2, left), the only way to approach the buckled state would be by solving exactly the Föppl–von Kármán equations. Luckily, we have been able to prove that the buckling bifurcation is supercritical (figure 2, right), and a weakly nonlinear analysis of the buckling can be performed. This approximate approach is considerably simpler than the exact solution of the Föppl–von Kármán equations; other plate buckling problems suggest that this method gives accurate results, including well above the threshold, although it is valid in full rigor for  $\eta \ll 1$  only. In fact, it is not even necessary to carry out the weakly nonlinear analysis in full details (which is anyway still intractable for an arbitrary blister): a symmetry argument straightforwardly yields the weakly nonlinear behavior of a 2D blister. Indeed, as noted above, the Föppl–von Kármán equations are invariant under the horizontal mirror symmetry,  $\mathcal{S}$ . Under this symmetry, the moment,  $M$ , and the in-plane stress release caused by buckling,  $\Sigma$ , change according to  $M \rightarrow -M$  and  $\Sigma \rightarrow +\Sigma$ . As usual for supercritical bifurcations [19], the invariance of the Föppl–von Kármán equations under the symmetry  $\mathcal{S}$  imposes a scaling law for the quantities in the buckled state:  $M \propto \eta^{\frac{1}{2}}$  and  $\Sigma \propto \eta$  above the buckling threshold. The reversal of the sign of  $M$  upon  $\mathcal{S}$  indeed corresponds to an indeterminacy in the sign of  $\eta^{\frac{1}{2}}$  when the square root is extracted.

Given that  $\eta$  is the only dimensionless parameter of the problem that depends upon the size of the blister,  $b$ , the full expression for the edge loads follows from dimensional analysis:

$$\Sigma = c_1^g(\nu, s/b) \frac{Eh^2}{b^2} \eta^{\frac{1}{2}} \quad M = c_2^g(\nu, s/b) \frac{Eh^4}{b^2} \eta. \quad (10)$$

Unknown numerical functions,  $c_{1,2}^g$ , had to be introduced; we shall see that their precise calculation, which goes beyond the present dimensional analysis, is not required. These functions may not depend on  $\eta$ , which has already been factored out. They depend on the blister shape, hence the superscript “g”, and may vary along the edge of the blister:  $s$  is the curvilinear coordinate along the delamination front, and  $s/b$  is the dilatation-invariant coordinate. By definition of the typical size of the blister  $b$ ,  $s/b$  is of order 1. As a result, the values taken by these functions  $c_{1,2}^g$  have to be of order 1 as well. As for 1D blisters, the loading at the crack tip,  $(G, \psi)$  can be derived using Ref. [15] from the edge loads in Eq. (10):

$$G(r) = \frac{6(1 - \nu^2) Eh^5}{b^4} \left( [c_1^g(s/b, \nu)]^2 \eta + [c_2^g(s/b, \nu)]^2 \eta^2 \right) \quad (11-a)$$

$$\psi(r) = -90^\circ + \omega(E/E_s, \nu, \nu_s) - \tan^{-1} \left( c_3^g(s/b, \nu) \eta^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (11-b)$$

where, as before,  $c_3^g = c_1^g/(c_2^g\sqrt{12})$ , and  $s/b = O(1)$ . All functions  $c_i$  take positive values: in Eq. (10), the buckling is upwards, hence  $c_2^g > 0$ . Since buckling permits a *release* of the initial compressive stress,  $\sigma_0 < 0$ , one must have  $c_1^g > 0$ , as in the 1D case.

#### 1.2.4 Stabilization of 2D patterns

Equations (11) show that the dependence of the crack tip loading on  $\eta$  in Eq.s (4) could be extended to the 2D case. The only difference is in the coefficients  $c_i$ , which now vary along the edge of the blister. Although the functions  $c_i$  are unknown, it must be pointed out that the dependence on the blister size,  $b$ , and on the initial compression,  $\sigma_0$ , is fully captured in the two equations above, through  $\eta$ . This remark makes the determination of the  $c_i$ 's unimportant to our problem. Indeed, during self similar growth of a blister at constant residual stress, the dimensionless buckling parameter  $\eta$  increases by Eq. (2), while other quantities remain constant. In consequence, the energy release rate,  $G$ , uniformly increases along the delamination front. In the absence of mode dependent toughness, this would make all blisters unstable against full delamination of the film, like in 1D. However, the mode mixity parameter,  $\psi$ , takes more and more negative values as  $\eta$  becomes larger, because  $c_3 > 0$  in Eq. (11-b). Therefore, the interface toughness increases uniformly along the edge of the blister as it spreads. This results in a effective toughening of the interface, which can prevent widespread delamination of the film: on the basis of the similarity of Eq.s (4-b) and (11-b), the mechanism proposed for 1D blisters can be extended word by word to 2D patterns.

Finally, we shortly discuss a few points. First, we have only considered blisters having a single typical length scale,  $b$ . We also have considered self-similar growth, and not growth in only one direction at constant width. For these reasons, elongated blisters, as telephone-cords, are excluded from the present analysis. The need to exclude elongated blisters may not be simply a weakness of the present theory. It may indicate that the mode dependence of the interface *cannot* prevent large scale delamination in just one direction. As a matter of fact, telephone-cords blisters have been observed in a variety of experimental conditions [20]. Secondly, we have neglected mode *III* (transverse) loading on the crack tip, which is in general present for non-axisymmetric 2D blisters. It is possible to extend the present analysis to determine the weakly nonlinear mode *III* loads on the crack. In the absence of experimental toughness data with transversal loading, however, this would be useless. Presumably, the enhancement of the interface toughness, which is reckoned as a consequence of

progressive crack closure (see next section), should not be too sensitive to transverse loading. Thirdly, we must emphasize that the mode dependence of the interface toughness does not systematically *prevent* complete delamination of the film (in particular, if the initial compression of the film is too high), but *unfavors* it, allowing blisters of finite size to be stable in certain mechanical conditions.

## 2 Friction induced mode dependence in brittle materials

In this section, we study a mechanism responsible for the mode dependence of the interface toughness. Several dissipative processes [21], like interfacial friction [22,23] and plasticity [24] are potential sources of mode dependence. We focus on the role of friction; to remove the other sources of mode dependence, we consider a brittle interface made of materials following linear elasticity, except of course in a *very small* nonlinear region near the tip where the stress diverges. When the loading on the interface crack is such that the crack faces contact ( $K_I \leq 0$ , *i.e.*  $|\psi| > 90^\circ$ ), the interaction of the crack lips causes dissipation. This certainly results in an increased toughness of the interface. This effect is, by nature, highly sensitive to the degree of closure of the crack, and is therefore mode dependent. Two models have been proposed to assess the effect of interfacial friction on the propagation of the crack. Evans and Hutchinson have studied the screening of the crack tip by asperities on the crack surface [22]. Following Stringfellow and Freund [23], we instead study a model of interface fracture in which the crack faces remain planar, as the fracture follows a planar interface (see figure 3). The loading is such that  $K_I < 0$ , and the crack faces contact along a macroscopic region. In this region, the contact interaction is modelled by a Coulomb law of friction.

Coulomb friction in interface cracks leads to anomalous divergence of the stress, as has been found more than two decades ago [25]: in Eq. (12), the stress does not follow the usual  $1/\sqrt{r}$  behavior, where  $r$  is the distance to the tip. This unusual divergence has widely been overlooked, perhaps because it was believed to introduce inconsistencies in the theory of fracture (in the form of infinite energy release rates); for the same reason, observable effects following from it do not seem to have been investigated. Only recently [26], we have been able to prove that the anomalous law (12) does not introduce inconsistencies in the theory: it is perfectly safe to introduce the Coulomb friction in closed interface cracks. In consequence, the asymptotic law (12) for the stress should *not* be disregarded, and the discussion of frictional effects in interface cracks has to rely on it. This is the aim of the present section.

We present the model of interface crack introduced by Stringfellow and Freund. For sake of convenience, we shall continue to call “film” and “substrate” the

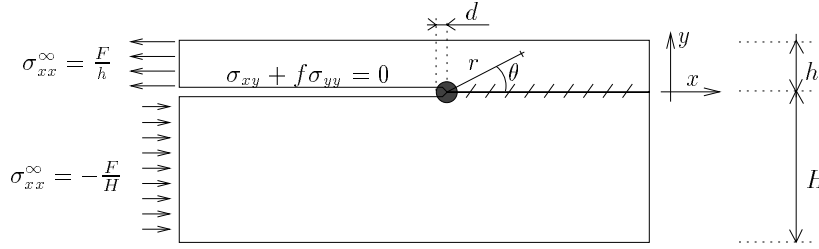


Fig. 3. An interface crack model allowing to assess the effect of interfacial friction on the interface toughness, as introduced by Stringfellow and Freund [23]. A small nonlinear region of size  $d$  centered on the tip has been represented in dark.

two materials merging at the interface, although our arguments are not specific to delamination of thin films. The geometry is as in figure 3: a force  $F$  is pulling an elastic layer of width  $h$  partially bound to an infinitely thick substrate ( $H \gg h$ );  $f$  is the Coulomb coefficient of friction at the interface;  $E_f$ ,  $\nu_f$ ,  $E_s$ ,  $\nu_s$  are the Young's modulus and Poisson ratio for the film and substrate, respectively. The mode mixity at the crack tip is known for this particular loading geometry: from Ref. [15], one obtains  $\psi_{\text{SF}} \approx -124^\circ$ . This is of course only an *apparent* value, as the definition of  $\psi$  is somewhat arbitrary when the crack lips contact.

When the film is stiffer than the substrate, the formation of a bubble near the tip has been observed numerically, a fact that has recently been explained [26]. To keep the arguments as simple as possible, we shall not be concerned with this possibility: we consider only the case when the substrate is weaker than the film. Then, there is no bubble. Because of dissipation in the contact region, the Rice integral [10,11] is *not* path independent, and the energy release rate at the tip,  $G_t$ , is less than the Rice integral calculated along the outer boundary of the sample,  $J_{\text{ld}}$  ( $J_{\text{ld}} \propto F^2$  measures the intensity of external loading, hence the subscript “ld”). This effect is referred to as “frictional screening”. We shall call  $T$  the transmission coefficient  $T = G_t/J_{\text{ld}}$ , which depends on the coefficient of interfacial friction, and on the mismatch of elastic properties between film and substrate. Linear elasticity is used, so that  $T$  does not depend on the magnitude of  $F$ , as long as  $F$  remains positive (when  $F < 0$ , the crack opens, and the problem has different boundary conditions on the interface). Stringfellow and Freund have calculated  $T$  for different typical values of the parameters; to do this, they used a numerical scheme based on finite elements, and they evaluated the Rice integral along a small contour around the crack tip. A typical value of transmission coefficient (hence a typical frictional screening) for realistic values of the parameters is  $T_{\text{SF}} = .68$  for  $f = .5$ , and  $E_f/E_s = .25$  [23].

We note that the value of  $T$  can be used to estimate the contribution of

interfacial friction to the mode dependence of the crack. Retaining only friction among the various contributions, we shall indeed assume that the crack has an intrinsic toughness  $\Gamma_i$ : propagation of the crack occurs when the crack tip loading reaches the critical value  $G_t = \Gamma_i$ . For a loading such that the crack is well open ( $\psi = 0^\circ$ ), the crack faces do not contact, and the Rice integral is contour independent,  $T = 1$ ; the critical *external* loading at the onset of crack propagation is simply  $J_{ld} = G_t = \Gamma_i$ . This quantity is also called the *effective* toughness:  $\Gamma_{\text{eff}}^{\text{open}} = \Gamma_{\text{eff}}(\psi = 0^\circ) = \Gamma_i$ . In contrast, the effects of interfacial friction are maximized for the loading in figure 3, because  $K_I < 0$ ; then, the onset of crack propagation is still at  $G_t = \Gamma_i$ , but in terms of the *external* loading, this yields  $T J_{ld} = \Gamma_i$ , hence the effective toughness:  $\Gamma_{\text{eff}}^{\text{closed}} = \Gamma_i/T$  when  $\psi = \psi_{\text{SF}}$ . The relative increase in the effective toughness for large  $|\psi|$  is therefore of order  $\gamma = (\Gamma_{\text{eff}}^{\text{closed}} - \Gamma_{\text{eff}}^{\text{open}})/\Gamma_{\text{eff}}^{\text{open}} = T^{-1} - 1$ . Using the value of  $T$  obtained by Stringfellow and Freund, given above, a relative increase of the interface toughness by a factor  $\gamma_{\text{SF}} = 47\%$  is obtained when the crack closes.

An asymptotic analysis of the interfacial crack with friction has been performed by Comninou and Dundurs [27]. We have recently complemented it [26] by showing that the energy release rate at the tip,  $G_t$ , in fact *vanishes* in the model in figure 3. Indeed, when the faces of an interface crack contact near the tip, the components of the stress diverge near the tip according to:

$$\sigma_{ab}(r, \theta) \propto r^{\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}} \quad \text{where} \quad \begin{aligned} \delta &= \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(\beta f), \\ \beta &= \frac{\mu_s(\kappa_t - 1) - \mu_t(\kappa_s - 1)}{\mu_s(\kappa_t + 1) + \mu_t(\kappa_s + 1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Here  $\mu = E/(2(1 + \nu))$  is the shear modulus of either material,  $\kappa = (3 - 4\nu)$  (plane strain is imposed by the substrate of thickness  $H \gg h$ ), and  $a, b = x$  or  $y$ . Polar coordinates  $(r, \theta)$  centered on the tip are used. The azimuthal dependence of  $\sigma_{ab}$  is not needed here, but can be found in Ref. [28]. We shall assume some elastic mismatch,  $\beta \neq 0$ , between film and substrate, as these materials differ; then, the exponent  $\delta$  is nonvanishing. This coefficient is moreover positive, as was generally proven in Ref. [26]:  $\delta < 0$  in the above formula would correspond to  $\beta < 0$ , *i.e.* film stiffer than substrate, but the model is then inappropriate, because a bubble is formed near the tip and Eq. (12) does not hold. The positivity of  $\delta$  means that the divergence of the stress is *abnormally weak* near the crack tip, in comparison with standard crack theory. Dimensional analysis using Eq. (12) shows that the energy release rate calculated along a circle of vanishingly small radius  $r$ , centered on the tip, vanishes like:  $G_r \propto r^\delta$  for  $r \rightarrow 0$  ( $\delta > 0$ ). In the presence of friction *and* elastic mismatch, the energy release rate  $G_t$  is therefore vanishing. The predictions of the asymptotic analysis are therefore:  $T = 0$ , and  $\gamma_{\text{AA}} = +\infty$ . The effective toughness is infinite when the interface crack is closed. This shows that the energy available from external loading is completely dissipated at the interface, and no finite energy flux enters the crack tip; in the absence of energy for



breaking interfacial bonds, complete frictional locking of the crack is predicted by this analysis (for loadings such that the crack is closed near the tip).

Analytical and numerical results therefore seem to contradict each other. The consistency is restored, using the following remark. The mismatch parameter is of order  $|\beta| \sim .1$  for most interfaces [9]; by Eq. (12), with a coefficient of friction of order unity, the anomalous exponent is of order  $\delta \sim .05$ . As a result, the energy release rate,  $G_r \propto r^\delta$ , decreases very slowly to zero as the tip of the crack is approached ( $r \rightarrow 0$ ). The value of  $T$  calculated numerically depends on the size of the mesh elements near the tip, although this size is small compared to all other lengths in the problem. This probably accounts for the discrepancy between numerical and analytical approaches: in the limit of vanishingly small mesh elements, the analytical result would have been recovered numerically, *i.e.*  $T = 0$ .

Neither the numerical nor the analytical predictions represent reality in an absolute sense. By the paragraph above, the numerical results depend on a hidden parameter, the mesh resolution. Using linear elasticity of continuous media, the analytical approach predicts a complete dissipation of the external loading; however, part of this dissipation occurs at very small scales, in a region near the tip where both the approximations of linear and continuous medium cease to be valid. This serves as a warning that any small (eventually microscopic) scale near the tip shall strongly influence the value of  $T$ , and, therefore, the importance of frictional effects. In order to model interfacial friction consistently, a small length scale near the tip,  $d$ , must therefore be introduced explicitly in the model. This length scale is the size of the region where the materials do not behave like a linear elastic and continuous medium, due to plasticity or cohesion for example.

To focus on interfacial friction among other sources of mode dependence, we chose to consider ideally brittle materials. Barenblatt has proposed an estimate of the length  $d$  in such materials; it is the size of the region over which the stress overcomes the atomic cohesion:  $K_{Ic}/\sqrt{d} = \sigma_m$ , where  $\sigma_m$  is the maximal intensity of forces of cohesion, and  $K_{Ic}$  is the critical stress intensity factor for crack propagation. For a perfect crystal with inter-atomic spacing  $a$ ,  $\sigma_m \sim \mu/10$ , where  $\mu$  is a typical modulus of the material [29]. Moreover, a useful estimate for the critical stress is:  $K_{Ic} \sim \mu\sqrt{a}$ . Combining these results, the width of the Barenblatt region is estimated as:  $d_{br} \sim (100a) \sim 10^{-8}$  m in the ideally brittle case; in materials that are not perfectly brittle, this length can be larger by several orders of magnitude.

We arrive to a situation very similar to the one studied by Barenblatt in his famous regularization procedure [29]. In order to remove the stress singularities from the theory of cracks, he has introduced a nonlinear zone near the tip, which can be seen as a black box. Making a balance of the energy flowing

into this nonlinear zone, Barenblatt derived a simple criterion for quasi-static advance of the crack: the energy release rate calculated around this black box of size  $d$ ,  $G_d$ , must equal a fracture energy,  $\Gamma_i$ . This fracture energy is related to the cohesive and plastic properties of the crack. In standard crack theory,  $G_r$  converges to  $G_t \neq 0$  for  $r \rightarrow 0$ , and the length  $d$  is much smaller than any other length, so that Barenblatt's approach is sometimes seen as a refined manner to establish the Griffith's criterion for crack propagation:  $G_t \geq \Gamma_i$ . Being very small, the length scale  $d$  disappears from the standard theory of cracks. However, in the framework of interfacial cracks with friction, Barenblatt's criterion does *not* reduce to Griffith's one: because of the very slow vanishing of  $G_r$  at the tip ( $\delta$  is small),  $G_d$  is very different from  $G_t = 0$ , and the length scale  $d$  must be kept. The Barenblatt criterion for crack advance,  $G_d \geq \Gamma_i$ , can be rewritten  $J_{ld} \geq \Gamma_{\text{eff}}$ , when  $\Gamma_{\text{eff}}$  is defined as  $\Gamma_{\text{eff}} = \Gamma_i/T$ , with  $T = G_d/J_{ld}$ . This shows that a consistent definition of the frictional screening  $T$  should involve  $G_d$ , not  $G_t$ . The very small scale that we need to introduce in the theory is Barenblatt's length,  $d$ .

The effect of the interfacial friction on the interface toughness of a brittle interface can now be estimated. We shall rely on the numerical simulations performed by Stringfellow and Freund, which have already solved the "macroscopic" part of the problem in figure 3; we simply need to extend their approach so as to correctly account for frictional effects below their numerical resolution. The same (typical) values for the parameters are used as theirs:  $f = .5$ ,  $E_f/E_s = .25$ ,  $\nu_f = \nu_s = .3$ . We define the numerical resolution,  $q$ , as the ratio of the radius of the smallest numerical contour around the tip,  $r_{\text{SF}}$ , to the thickness of the film,  $h$ :  $q = r_{\text{SF}}/h$ . We remind that the calculated value  $T_{\text{SF}}$  in fact depends on  $q$ , as it would vanish for  $q \rightarrow 0$  (perfect mesh). For the particular mesh of finite elements used in Ref. [23],  $q \approx .06$ . Using definition (12), the anomaly in the stress divergence is  $\delta = .054$ . Assuming that the asymptotic law  $G_r \propto r^\delta$  is satisfied in the small region of size  $r_{\text{SF}}/h$ , the energy release rate is damped by a factor  $(d_{\text{br}}/r_{\text{SF}})^\delta$  when passing from the *numerical* resolution  $r_{\text{SF}}$ , to the *physically* relevant Barenblatt scale,  $d_{\text{br}}$ . Therefore, the energy release rate entering in the Barenblatt criterion for crack advance is:  $G_d = (d/r_{\text{SF}})^\delta G_{\text{SF}}$ , where  $G_{\text{SF}} = G_{r_{\text{SF}}}$  is the energy release rate obtained numerically in Ref. [23]. The relative increase of interface toughness for brittle materials therefore reads:

$$\gamma_{\text{br}} = \frac{1}{T_{\text{br}}} - 1 \quad \text{where} \quad T_{\text{br}} = T_{\text{SF}} \left( \frac{d_{\text{br}}}{r_{\text{SF}}} \right)^\delta = T_{\text{SF}} \left( \frac{d_{\text{br}}}{qh} \right)^\delta. \quad (13)$$

Assuming that the above layer has a thickness  $h = 300 \mu\text{m}$ , and using the Barenblatt estimate for  $d_{\text{br}}$ , we obtain  $\gamma_{\text{br}} = 121\%$ . As noted above,  $\gamma$  measures the contribution of interfacial friction in the effective toughness of the crack when  $K_I < 0$ : when one arbitrary unit of energy is brought to the tip for breaking interfacial bonds, 1.21 units are at the same time dissipated by

friction; as a result, most of the toughness is due to friction. The value of  $\gamma$  also permits to characterize the mode dependence of the interface: due to friction, its toughness is multiplied by a factor about  $\Gamma_{\text{eff}}^{\text{closed}}/\Gamma_{\text{eff}}^{\text{open}} = 2.21$  upon crack closure.

For comparison, the value  $\gamma_{\text{SF}} = 47\%$  has been obtained [23], when dissipation below the numerical resolution (6% of the film thickness) is neglected. It is much less than  $\gamma_{\text{br}} = 121\%$ . This demonstrates that dissipation at small scales near the tip can be quite important in the fracture of interfaces; in numerical simulations, a significant contribution to the interface toughness can be missed if dissipation below the numerical resolution is neglected. This result is after all quite intuitive: near the tip, the contact pressure diverges, which makes frictional screening especially efficient.

All the present analysis is based on the anomaly in the scaling law (12) for the stress in a closed interface crack ( $\delta \neq 0$ ): in the presence of friction and elastic mismatch, frictional screening does not simply result in a decrease of the stress intensity factor at the tip; more dramatically, it changes the nature of the divergence of the stress, making it smoother. In this section, we argued that the weakness of the stress singularity underlies observable effects: a strong frictional dissipation at small scales near the tip has been pointed out, which strongly enhances the effective toughness of the interface. As a result, our estimate of the mode dependence induced by friction is higher than when the anomalous law (12) is overlooked, and seems more compatible with experimental plots of  $\Gamma(\psi)$ . Finally, we note that, by Eq. (13), the effects of interfacial friction are stronger when the Barenblatt length is smaller, *i.e.* for more brittle materials (in plastic materials, the length  $d$  must be taken as the size of the plastic region, which is often larger than  $d_{\text{br}}$  by several orders of magnitude [29]). The effects of interfacial friction on the mode dependence are stronger when that of plasticity are weaker: plasticity and interfacial friction act as *complementary* sources of mode dependence. Which one dominates in a particular interface depends on the brittleness of the materials.

### 3 Conclusion

We have first considered the effect on the mode dependence on the patterns of delamination. In the absence of exact analytical solutions to the nonlinear Föppl–von Kármán equations, an approach based on dimensional analysis turned out to be effective: the evolution of the mode mixity parameter along the crack front during growth of a blister could be derived for quite generic geometries. We have found that the delamination front is more and more a mode II crack as the blister spreads in all directions. As a result, the mode dependence of the film-substrate interface can prevent widespread delamination.

Experimental observation of finite size blisters, and of elongated ones, could be understood. All these arguments generalize results obtained previously for circular or straight-sided blisters.

In a second step, we have shown that interfacial friction can explain mode dependence. Coulomb friction leads to an anomalous divergence of the stress near the tip of a closed interface crack. As a result, the effective toughness severely increases upon crack closure (typically by 120%, *i.e.* the interface becomes more than twice tougher). A physical interpretation was given: the frictional screening of the external load is very effective in the contact region near the tip, where the contact pressure is high. It was emphasized that these frictional effects are sensitive to a very small scale,  $d$ , which depends on the brittleness of the materials. Our treatment of Eq. (12) may be applicable to other mechanical problems involving anomalous asymptotic laws, which often appear in elasticity when non-standard boundary conditions are considered.

Collecting the results presented in the present paper, we are led to the following picture: when a blister spreads, the delamination front is more and more a mode II crack. Above a critical blister size, the lips of the crack contact ( $K_I = 0$ ), and strong frictional effects can prevent further expansion of the blister. This picture is of course simplified, as other sources of mode dependence arising in real materials are ignored. This scenario is nevertheless perfectly valid in the limit of an ideally brittle interface. Quite remarkably, it provides a picture of a complex process, which is both simple (its ingredients are linear elasticity and Coulomb friction) and consistent with experiments (the existence of blisters of finite extent is explained).

### Acknowledgements

It is a pleasure to thank M. Adda-Bedia, J. W. Hutchinson, Y. Pomeau and J. R. Rice for helpful discussions, comments and encouragements. The Laboratoire de Physique Statistique is associated with the CNRS, the École normale supérieure, and the Universités Paris 6 and Paris 7.

### References

- [1] D. Nir. Stress relief forms of diamond-like carbon thin films under internal compressive stress. *Thin solid films*, 112:41–49, 1984.
- [2] A. S. Argon, V. Gupta, H.S. Landis, and J. A. Cornie. Intrinsic toughness of interfaces between SiC coatings and substrates of Si or C fibre. *Journal of material science*, 24:1207–1218, 1989.

- [3] G. Gille and B. Rau. Buckling instability and adhesion of carbon layers. *Thin Solid Films*, 120:109–21, 1984.
- [4] J. S. Wang and Z. Suo. Experimental determination of interfacial toughness using brazil-nut-sandwich. *Acta Met.*, 38:1279–90, 1990.
- [5] K. M. Liechti and Y.-S. Chai. Asymmetric shielding in interfacial fracture under inplane shear. *J. Applied Mech.*, 59:294–304, 1992.
- [6] J. D. Whitcomb. Parametric analytical study of instability-related delamination growth. *Compos. Sci. Technol.*, 25:19–48, 1986.
- [7] J. W. Hutchinson, M. D. Toughless, and E. G. Liniger. Growth and configurational stability of circular, buckling-driven film delaminations. *Acta metall. mater.*, 40:295–308, 1992.
- [8] J. W. Hutchinson and Z. Suo. Mixed mode cracking in layered materials. *Advances in Applied Mechanics*, 29:63–191, 1991.
- [9] J. R. Rice. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 110:98–103, 1988.
- [10] J. R. Rice. *Fracture: an advanced treatise*, volume 2, pages 191–311. Liebowitz, H. (editor), Academic press, 1968.
- [11] J. R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, 35:379–86, 1968.
- [12] A. G. Evans and J. W. Hutchinson. On the mechanics of delamination and spalling in compressed films. *Int. J. Solids Structures*, 20:455–66, 1984.
- [13] H. Chai, C. D. Babcock, and W. G. Knauss. One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling. *Int. J. Solids Structures*, 17:1069–83, 1981.
- [14] S. Timoshenko and J. M. Gere. *Theory of Elastic Stability*. MacGraw Hill, New York, 2nd edition, 1961.
- [15] Zhigang Suo and John W. Hutchinson. Interface crack between two elastic layers. *Int. J. Frac.*, 43:1–18, 1990.
- [16] P. Patricio and W. Krauth. Numerical solutions of the von Karman equations for a thin plate. *International Journal of Modern Physics C*, 8:427–434, 1997.
- [17] M. Ben Amar and Y. Pomeau. Crumpled paper. *Proc. R. Soc. London A*, 453:729–55, 1997.
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Theory of Elasticity*. Pergamon Press, New York, 1986.
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Fluid mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1986.
- [20] G. Gioia and M. Ortiz. *Adv. Appl. Mech.*, 33:119–92, 1997.

- [21] A. G. Evans, M. Rühle, B. J. Dalgleish, and P. G. Charalambides. The fracture energy of bimaterial interfaces. *Material Science and Engineering, A* 126:53–164, 1990.
- [22] A. G. Evans and J. W. Hutchinson. Effects of non-planarity on the mixed mode fracture resistance of bimaterial interfaces. *Acta metall.*, 37:909–16, 1989.
- [23] R. G. Stringfellow and L. B. Freund. The effect of interfacial friction on the buckle-driven spontaneous delamination of a compressed thin film. *Int. J. Solids Structures*, 30:1379–1395, 1993.
- [24] J. G. Swadener and K. M. Liechti. Asymmetric shielding mechanisms in the mixed-mode fracture of glass/epoxy interface. *Journal of applied mechanics-Transactions of the ASME*, 65:25–29, 1998.
- [25] M. Comninou and J. Dundurs. An example for frictional slip progressing into a contact zone of a crack. *Engineering Fracture Mechanics*, 12:191–7, 1979.
- [26] B. Audoly. Asymptotic study of the interfacial crack with friction. Submitted to *J. Mech. Phys. Sol.*
- [27] Maria Comninou and J. Dundurs. Effect of friction on the interface crack loaded in shear. *Journal of Elasticity*, 10:203–12, 1980.
- [28] M. Comninou. Interface crack with friction in the contact zone. *Journal of applied mechanics, Transactions of the ASME*, 44:780–1, 1977.
- [29] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7:55–125, 1963.

# Conclusion

Although decisive experimental evidences are still lacking and further series of experiments are needed before the complete elucidation of the YR can be achieved, it seems logical to advance that above combined arguments along with experimental results described in our work are likely to support the hypothesis of a semi-linear multi-stable multi-switching net-back feedwork organization of the YR whose a tentative anatomical model can therefore be proposed (fig. 4).

GEORGES PEREC  
in « Cantatrix Sopranica L. »

Nous espérons avoir illustré la richesse et la diversité des problèmes qui surviennent en théorie de l'élasticité. Les questions abordées se situent à la croisée de diverses branches des sciences : théorie des bifurcations, géométrie différentielle des surfaces, mécanique de la fracture, du frottement, de la fatigue. En ce sens, l'élasticité incarne parfaitement les liens forts qu'entretiennent la physique, la mécanique et la mathématique. Les méthodes utilisées dans ce travail empruntent d'ailleurs un peu à chacun des domaines abordés : développement faiblement non linéaires (et rôle des symétries sous-jacentes), étude asymptotique d'un champ mécanique près d'un point singulier, perturbations singulières, principe du maximum pour les ÉDP elliptiques, etc. Il aurait été trop long d'exposer l'apport décisif de l'analyse complexe à la mécanique. Un livre [8] à paraître prochainement incluera ce complément parmi d'autres.

Plusieurs pistes ouvertes par le présent travail mériteraient à notre avis d'être

explorées plus avant. Nous aimerions caractériser précisément l'influence des courbes rigidifiantes sur le comportement mécanique d'une coque : raideur, spectre de vibrations, et résistance au flambage. En ce qui concerne la délamination, des simulations numériques nous sembleraient très utiles pour valider les prédictions que nous avons avancées : motif de délamination en gouttelettes pour un film à faible coefficient de Poisson, forme oscillante des cloques attribuée à un flambage élastique du film. Bien que démarrant tout juste, l'expérience de thermoflambage à l'IRPHE s'annonce à ce titre passionnante : l'enjeu est de vérifier que le caractère universel des motifs de délamination en fil de téléphone s'explique simplement par l'élasticité du film, et non par la fracture. Cette expérience permettrait aussi d'explorer les fortes compressions, bien au-delà du seuil de flambage secondaire, où il faut s'attendre à des bifurcations supplémentaires.



# Références bibliographiques

- [1] M. ADDA-BEDIA, R. ARIAS, M. B. AMAR, F. LUND. *Dynamic instability of brittle fracture*. Phys. Rev. Lett. **82** 2314 (1999).
- [2] M. ADDA-BEDIA, Y. POMEAU. *Instability of a heated glass strip*. Physical Review E **52** 4105 (1995).
- [3] A. D. ALEXANDROV. *On a class of closed surfaces*. Recueil Math. (Moscou) **4** 69 (1938).
- [4] A. S. ARGON, V. GUPTA, H. LANDIS, J. A. CORNIE. *Intrinsic toughness of interfaces between SiC coatings and substrates of Si or C fibre*. Journal of material science **24** 1207 (1989).
- [5] B. AUDOLY. *Asymptotic study of the interfacial crack with friction* (1999). À paraître dans *J. Mech. Phys. Sol.*
- [6] B. AUDOLY. *Mode dependent toughness and the delamination of compressed thin films* (1999). À paraître dans *J. Mech. Phys. Sol.*
- [7] B. AUDOLY. *Stability of straight delamination blisters*. Physical Review Letters **83** 4124 (1999).
- [8] B. AUDOLY, M. BEN AMAR, Y. POMEAU. *Elasticity and geometry*. À paraître chez Oxford University Press.
- [9] G. I. BARENBLATT. *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*. Advances in Applied Mechanics **7** 55 (1963).
- [10] M. BOUCIF, J. E. WESFREID, E. GUYON. *Experimental study of wavelength selection in the elastic buckling instability of thin plates*. European Journal of Mechanics, A/Solids **10** 641 (1991).
- [11] E. CERDA, S. CHAIEB, F. MELO, L. MAHADEVAN. *Conical dislocations in crumpling*. Nature **401** 46 (1999).
- [12] H. CHAI, C. D. BABCOCK, W. G. KNAUSS. *One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling*. Int. J. Solids Structures **17** 1069 (1981).

- [13] D. CHOÏ. *Sur la rigidité géométrique des surfaces. Application à la théorie des coques élastiques minces*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI (1995).
- [14] P. G. CIARLET. *A justification of the von Kármán equations*. Arch. Rat. Mech. Analysis **73** 349 (1980).
- [15] P. G. CIARLET. *Introduction to Linear Shell Theory*. Series in applied mathematics. Elsevier (1998).
- [16] S. COHN-VOSSEN. *Unstarre geschlossene Flächen*. Math. Annalen **102** 10 (1929).
- [17] M. COMNINOU. *Interface crack with friction in the contact zone*. Journal of applied mechanics, Transactions of the ASME **44** 780 (1977).
- [18] M. COMNINOU, J. DUNDURS. *An example for frictional slip progressing into a contact zone of a crack*. Engineering Fracture Mechanics **12** 191 (1979).
- [19] M. COMNINOU, J. DUNDURS. *Effect of friction on the interface crack loaded in shear*. Journal of Elasticity **10** 203 (1980).
- [20] M. COMNINOU, J. DUNDURS. *On the behaviour of interface cracks*. Res Mechanica **1** 249 (1980).
- [21] K. M. CROSBY, R. M. BRADLEY. *Pattern formation during delamination and buckling of thin films*. Phys. Rev. E **59** R2542 (1999).
- [22] X. DENG. *An asymptotic analysis of stationary and moving cracks with frictional contact along bimaterial interfaces and in homogeneous solids*. International of Solids and Structures **31** 2407 (1994).
- [23] X. DENG. *A note on interface cracks with and without friction in contact zone*. Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics **61** 994 (1994).
- [24] J. DUNDURS, M. COMNINOU. *Some consequences of the inequality conditions in contact and crack problems*. Journal of Elasticity **9** 71 (1979).
- [25] A. G. EVANS, J. W. HUTCHINSON. *On the mechanics of delamination and spalling in compressed films*. Int. J. Solids Structures **20** 455 (1984).
- [26] A. G. EVANS, J. W. HUTCHINSON. *Effects of non-planarity on the mixed mode fracture resistance of bimaterial interfaces*. Acta metall. **37** 909 (1989).
- [27] A. G. EVANS, M. RÜHLE, B. J. DALGLEISH, P. G. CHARALAMBIDES. *The fracture energy of bimaterial interfaces*. Material Science and Engineering A **126** 53 (1990).
- [28] É. G. H. BANCROFT, réd. *Trans. of the Ninth National Symp. of the Amer. Vacuum Soc.* Mac-Millan (1962).

- [29] G. GILLE, B. RAU. *Buckling instability and adhesion of carbon layers*. Thin Solid Films **120** 109 (1984).
- [30] G. GIOIA, M. ORTIZ. *Delamination of compressed thin films*. Adv. Appl. Mech. **33** 119 (1997).
- [31] L. E. GOODMAN. *Contact stress analysis of normally loaded rough spheres*. Journal of applied mechanics **29** 515 (1962).
- [32] M.-Y. HE, J. W. HUTCHINSON. *Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials*. International Journal of Solids and Structures **25** 1053 (1989).
- [33] J. W. HUTCHINSON, Z. SUO. *Mixed mode cracking in layered materials*. Advances in Applied Mechanics **29** 63 (1991).
- [34] J. W. HUTCHINSON, M. D. TOUGHLESS, E. G. LINIGER. *Growth and configurational stability of circular, buckling-driven film delaminations*. Acta metall. mater. **40** 295 (1992).
- [35] J. H. JELLET. *On the properties of inextensible surfaces*. Transactions of the royal Irish academy, Part V (science) **22** 343 (1853).
- [36] W. KILLING. *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*. G. B. Teubner (1885).
- [37] L. D. LANDAU, E. M. LIFSCHITZ. *Fluid mechanics*. Pergamon Press, Oxford (1986).
- [38] L. D. LANDAU, E. M. LIFSCHITZ. *Theory of Elasticity*. Pergamon Press, New York (1986).
- [39] J.-B. LEBLOND. *Mécanique de la rupture fragile*. École Polytechnique, Département de mécanique (1992).
- [40] D. LEGUILLON. *Interface crack tip singularity with contact and friction*. Comptes-rendus de l'académie des sciences de Paris **327 II b** 437 (1999).
- [41] D. LEGUILLON. *Mode mixity for an interface crack and related problems of contact and friction*. Dans *Proceedings of the international conference on multifield Problems (Univ. of Stuttgart, Oct 1999)* (2000).
- [42] K. M. LIECHTI, Y.-S. CHAI. *Asymmetric shielding in interfacial fracture under inplane shear*. J. Applied Mech. **59** 294 (1992).
- [43] J. L. LIONS, É. SANCHEZ-PALENCIA. *Problèmes aux limites sensitifs*. C. R. Acad. Sci. Paris **I 319** 1021 (1994).
- [44] J. L. LIONS, É. SANCHEZ-PALENCIA. *Example of sensitivity in shells with edges*. Dans M. BERNADOU, éd., *Shells, modelling and Scientific computing*, pp. 151–154. Univ. Santiago de Compostela (1997).

- [45] A. E. LOBKOVSKY. *Boundary layer analysis of the ridge singularity in a thin plate*. Phys. Rev. E **53** 3750 (1996).
- [46] B. M. MALYSHEV, R. L. SALGANIK. *The strength of adhesive joints using the theory of cracks*. Inter. J. Frac. Mech. **1** 114 (1965).
- [47] G. A. MAUGIN. *On the j-integral and energy-release rates in dynamical fracture*. Acta Mechanica **105** 33 (1994).
- [48] N. I. MUSKHELISHVILI. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity : fundamental equations, plane theory of elasticity, torsion, and bending*. P. Noordhoff (1953).
- [49] F. I. NIORDSON. *Shell theory*, tome 29 de *North-Holland series in applied mathematics and mechanics*. North-Holland (1985).
- [50] D. NIR. *Stress relief forms of diamond-like carbon thin films under internal compressive stress*. Thin solid films **112** 41 (1984).
- [51] L. NIRENBERG. *Rigidity of a class of closed surfaces*. Dans *Nonlinear problems (Proc. Sympos., Madison, Wis., 1962)*, pp. 177–193. Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis. (1963).
- [52] P. PATRICIO. *Instabilités géométriques en élasticité*. Thèse de doctorat, Université Paris VII (1998).
- [53] P. PATRICIO, W. KRAUTH. *Numerical solutions of the von Karman equations for a thin plate*. International Journal of Modern Physics C **8** 427 (1997).
- [54] L. PAUCHARD, Y. POMEAU, S. RICA. *La physique non linéaire des balles de ping-pong*. Bulletin de la Société Française de Physique **119** (1999).
- [55] L. PAUCHARD, S. RICA. *Contact and compression of elastic spherical shells : the physics of a “ping-pong” ball*. Philosophical Magazine **78** 235 (1998).
- [56] A. V. POGORELOV. *Bendings of surfaces and stability of shells*, tome 72 de *Translation of mathematical monographs*. American Mathematical Society (1988).
- [57] Y. POMEAU, M. BEN AMAR. *Crumpled paper*. Proceedings of the Royal Society A **453** 729 (1997).
- [58] J. W. S. RAYLEIGH. *The theory of sound*. Dover publications, New York (1945).
- [59] J. R. RICE. *Fracture : an advanced treatise*, tome 2, pp. 191–311. Liebowtiz, H. (editor), Academic press (1968).
- [60] J. R. RICE. *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*. J. Appl. Mech. **35** 379 (1968).

- [61] J. R. RICE. *Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks*. Journal of Applied Mechanics **110** 98 (1988).
- [62] B. ROMAN, A. POCHÉAU. *Buckling cascade of thin plates : forms, constraints and similarity*. Europhysics Letters **46** 602 (1999).
- [63] I. KH. SABITOV. *Local theory of bendings of surfaces*, tome 48, chapitre 3, pp. 179–256. Springer (1992).
- [64] É. SANCHEZ-PALENCIA. *Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces*. Comptes-rendus de l'académie des sciences de Paris **II 311** 909 (1990).
- [65] É. SANCHEZ-PALENCIA. *Surfaces et coques élastiques minces : problèmes et défis*. La vie des sciences **12** 239 (1995).
- [66] C. F. SHIH, R. J. ASARO. *Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces*. ASME Journal of Applied Mechanics **58** 450 (1991).
- [67] M. SPIVAK. *Differential geometry*, tome 5. Publish or Perish Inc. (1979).
- [68] R. G. STRINGFELLOW, L. B. FREUND. *The effect of interfacial friction on the buckle-driven spontaneous delamination of a compressed thin film*. Int. J. Solids Structures **30** 1379 (1993).
- [69] D. J. STRUIK. *Lectures on classical differential geometry*. Addison-Wesley, 2<sup>e</sup> édition (1961).
- [70] Z. SUO, J. W. HUTCHINSON. *Interface crack between two elastic layers*. Int. J. Frac. **43** 1 (1990).
- [71] J. G. SWADENER, K. M. LIECHTI. *Asymmetric shielding mechanisms in the mixed-mode fracture of glass/epoxy interface*. Journal of applied mechanics-Transactions of the ASME **65** 25 (1998).
- [72] S. TIMOSHENKO, J. M. GERE. *Theory of Elastic Stability*. MacGraw Hill, New York, 2<sup>e</sup> édition (1961).
- [73] R. M. WALD. *General Relativity*. University of Chicago Press (1984).
- [74] J.-S. WANG. *Interfacial fracture toughness of a copper/alumina system and the effect of the loading phase angle*. Mechanics of materials **20** 251 (1995).
- [75] J. S. WANG, Z. SUO. *Experimental determination of interfacial toughness using brazil-nut-sandwich*. Acta Met. **38** 1279 (1990).
- [76] J. D. WHITCOMB. *Parametric analytical study of instability-related delamination growth*. Compos. Sci. Technol. **25** 19 (1986).
- [77] N. YAMAKI. *Elastic stability of circular cylindrical shells*, tome 27 de North-Holland series in applied mathematics and mechanics. North-Holland (1984).

- [78] H. Y. YU, C. KIM, S. C. SANDAY. *Buckle formation in vacuum-deposited thin films*. *Thin Solid Films* **196** 229 (1991).

# Elasticity and geometry : from the rigidity of surfaces to telephone cord-like delamination.

## **Abstract**

This thesis deals with the elasticity of thin (2D) elastic materials. The connection between geometry and the theory of elasticity is emphasised.

We first study shells, which are defined as thin elastic materials having some curvature at rest. It is known that the elastic behaviour of a shell depends to a large extent on the infinitesimal rigidity of its mean surface : if this surface can be deformed without stretching, the shell is said to be bendable. If, contrarily, any deformation of the shell involves some extension of the mean surface, it is said to be infinitesimally rigid. The classification of shells of revolution by Cohn-Vossen is interpreted, and extended to arbitrary surfaces. Rigidifying curves are pointed out.

We also consider the delamination of compressed thin films. Under certain mechanical conditions, these films lift off the substrate to which they were bound. The fracture of the film/substrate interface is studied using a model of interfacial crack with Coulomb friction between the lips.

Delamination patterns looking like telephone cord have been widely observed in experiments. They are interpreted as the result of a secondary bifurcation in the Föppl–von Kármán equations. Finally, it is shown that the stability of delamination blisters can be understood from the structure of the Föppl–von Kármán equations and from the properties of the interfacial crack.

## **Keywords**

Elasticity. Geometric rigidity. Interfacial cracks. Friction. Mode-dependent toughness. Delamination. Delamination patterns. Föppl–von Kármán equations. Elastic buckling.

## Résumé

Cette thèse porte sur l'élasticité des corps minces bidimensionnels. Nous insistons sur les rapports entre les équations de l'élasticité et la géométrie.

Nous envisageons tout d'abord le cas des coques, qui sont définies comme les corps élastiques minces possédant une courbure au repos. On sait que le comportement élastique d'une coque est largement conditionné par la rigidité infinitésimale de sa surface moyenne : selon qu'il est possible ou non de déformer cette surface tout en conservant les longueurs de toutes les courbes inscrites, on dira que la coque est isométriquement déformable, ou inhibée. Nous interprétons la classification des surfaces de révolution due à Cohn-Vossen, et la généralisons aux surfaces quelconques. Nous mettons en évidence des courbes rigidifiantes.

Nous considérons ensuite la délamination des films minces comprimés : sous certaines conditions mécaniques, ces films se décolent du substrat auxquels ils adhéraient. Nous étudions la fracture de l'interface film/substrat au moyen d'un modèle de fissure avec frottement de Coulomb entre les lèvres.

Des motifs de délamination en forme de fil de téléphone ont été largement observés expérimentalement. Nous les interprétons comme le résultat d'un flambage élastique secondaire dans les équations de Föppl-von Kármán. Enfin, nous montrons que la structure des équations de Föppl-von Kármán d'une part, et les propriétés de la fissure interfaciale d'autre part, permettent d'expliquer la stabilité des cloques de délamination.

## Mots-clé

Elasticité. Rigidité géométrique. Fracture interfaciale. Frottement. Ténacité dépendante de mode. Délamination. Motifs de délamination. Équations de Föppl-von Kármán. Flambage élastique.