

## Courbes rigidifiant les surfaces

Basile AUDOLY

Laboratoire de physique statistique associé au CNRS, École normale supérieure, 24, rue Lhomond, 75231 Paris cedex 05, France

Courriel : Basile.Audoly@physique.ens.fr

(Reçu le 8 octobre 1998, accepté après révision le 1<sup>er</sup> décembre 1998)

---

**Résumé.** Cette Note porte sur la rigidité infinitésimale des surfaces. Soit une variété bidimensionnelle plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , nous étudions les modifications infinitésimales de son plongement qui, au premier ordre, respectent sa métrique. Un critère portant sur l'existence de telles déformations est présenté dans le cas particulier des surfaces de révolution. Il fait apparaître des courbes rigidifiantes sur la surface, appelées cercles asymptotiques. Une interprétation géométrique du caractère rigidifiant de ces cercles permet la mise en évidence de courbes rigidifiantes sur une surface arbitraire. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

### *Rigidifying curves on surfaces*

**Abstract.** *The infinitesimal rigidity of surfaces is addressed in this Note. Let us consider a bidimensional metric manifold imbedded in  $\mathbb{R}^3$ : we seek the infinitesimal changes of imbedding conserving its metric to first order. A criterion for the existence of such deformations is presented in the particular case of surfaces of revolution. It reveals rigidifying curves on the surface, called "a-curves". A geometric interpretation of the rigidity brought about by a-curves leads to the identification of rigidifying curves on arbitrary surfaces. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris*

---

Nous considérons une variété bidimensionnelle  $C^\infty$ ,  $S$ , plongée dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , et munie de la métrique induite par le plongement. Le problème de la rigidité isométrique de  $S$  est le suivant : il s'agit de statuer sur l'existence de plongements de  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$  autres que le plongement initial, et n'en différant pas simplement par un déplacement trivial du type rotation ou translation. Ces déformations s'appellent des déformations isométriques. En cas d'absence de tels plongements, on dira que la surface est rigide isométriquement, ou, tout simplement, rigide. Le problème que nous considérerons ici est celui de la rigidité *infinitésimale*, i.e. de l'existence de modifications infinitésimales du plongement qui conservent la métrique de la variété au premier ordre.

La surface  $S$  étudiée peut posséder ou non un bord : nous envisageons aussi bien le cas d'une calotte sphérique, que d'un tore ou d'une sphère, etc. Pour les surfaces à bord, nous n'imposons pas de conditions aux limites. En physique, le problème de la rigidité infinitésimale d'une surface

---

Note présentée par Yves POMEAU.

## B. Audoly

intervient tout naturellement en théorie de l'élasticité des coques minces (voir [3], [1]), la présence de modes de vibration de basse fréquence dépendant par exemple de l'existence de ces déformations isométriques infinitésimales ; l'absence de conditions aux limites correspond physiquement à des bords libres. Nous nous intéressons de plus à des surfaces *courbées*, les déformations isométriques infinitésimales des plans étant bien connues (voir [4]).

Du point de vue mathématique, le cas de l'espace ambiant  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d = 3$ , est aussi le plus intéressant car une hypersurface est génériquement rigide pour  $d \geq 4$  (voir [2], [4]). Inversement, pour  $d = 2$ , les hypersurfaces ne sont pas rigides (ce sont des courbes). Le cas  $d = 1$  est trivial.

Lorsqu'on cherche à déterminer la rigidité, ou la rigidité infinitésimale, d'une surface  $S$  donnée, des résultats généraux peuvent parfois être invoqués. Ceux-ci concernent par exemple la convexité de  $S$  : ainsi, une surface convexe compacte sans bord n'incluant pas de morceau de plan, est infinitésimalement rigide, et une surface convexe compacte sans bord (typiquement, un ovoïde) est rigide [4], p. V.273–284. À l'opposé, nous trouvons le cas des surfaces minimales, définies par une courbure moyenne identiquement nulle, et possédant donc une courbure de Gauss négative : en l'absence de conditions aux limites aux bords, les surfaces minimales simplement connexes admettent en effet toujours des déformations isométriques et des déformations isométriques infinitésimales par la transformation de Weierstrass (voir [5]).

Le *theoremata egregium* de Gauss, qui impose la conservation de la courbure éponyme lors d'une déformation isométrique, ne permet pas en général de conclure sur la rigidité infinitésimale d'une surface  $S$ , même s'il représente une contrainte sévère sur les déformations isométriques.

Hormis les cas particuliers évoqués ci-dessus, la rigidité infinitésimale d'une surface  $S$  ne peut pas être abordée par un résultat général ; il faut alors tenter de mettre en équation les déformations isométriques infinitésimales. C'est ce que nous nous proposons de faire pour les surfaces de révolution : cela nous conduira, dans la deuxième partie de cette Note, à une classification de ces surfaces d'après leur rigidité infinitésimale. Cette classification faisant apparaître des courbes aux propriétés rigidifiantes, nous nous attacherons à en donner une interprétation géométrique dans la troisième partie ; nous pourrions alors introduire des courbes rigidifiantes sur des surfaces quelconques.

Dans le but de classer les surfaces de révolution selon leur rigidité, nous mettons en équation leurs déformations isométriques infinitésimales. Considérons donc une surface de révolution  $S$  subissant une déformation isométrique infinitésimale ;  $S$  est donnée par sa paramétrisation normale dans un repère cartésien  $(e_x, e_y, e_z)$  :

$$r(s, \theta) = \rho(s)(\cos \theta e_x + \sin \theta e_y) + z(s)e_z \quad \text{avec} \quad \rho'^2(s) + z'^2(s) = 1. \quad (1)$$

Nous utiliserons la courbure  $\kappa$  de la courbe génératrice :  $\kappa(s) = \rho'(s)z''(s) - \rho''(s)z'(s)$ . La courbure de Gauss de la surface se met sous la forme  $K(s) = z'\kappa/\rho = -\rho''/\rho$ .

Pour décrire la déformation isométrique infinitésimale subie par  $S$ , nous introduisons le champ de rotation local  $\Omega : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , qui définit la rotation infinitésimale subie par chaque plan tangent  $T_p S$ ,  $p \in S$ . Soit  $\omega(p)$  la composante normale de  $\Omega(p)$ . En symétrie de révolution, il est naturel de décomposer  $\omega(s, \theta)$  en modes de Fourier  $\omega_q(s) \cos q\theta$  et  $\widehat{\omega}_q(s) \sin q\theta$ . On peut alors montrer que les déformations isométriques infinitésimales s'obtiennent à partir des solutions de l'équation différentielle pour  $\omega_q$  :

$$\forall q \geq 0, \quad \omega_q''(s) + \left( \frac{\rho'}{\rho} - \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \omega_q'(s) + \left( \kappa^2 - \frac{\rho''}{\rho} - q^2 \frac{K}{z'^2} \right) \omega_q(s) = 0, \quad (2)$$

plus les mêmes équations pour les  $\widehat{\omega}_q$ , que nous oublierons donc dans la suite.

Dans l'équation précédente, les rotations d'ensemble de la surface apparaissent sous la forme de solutions de mode  $q = 0$  ou  $1$ . Nous éliminerons donc ces déformations isométriques infinitésimales triviales en nous limitant à  $q \geq 2$ .

L'équation (2) étant du second ordre, il existe *au plus deux* degrés de libertés de déformations isométriques pour chaque mode  $q \geq 2$  sur une surface de révolution donnée. Il y en aura strictement *moins de deux* dans les cas suivants :

- lorsque l'équation (2) présente des points singuliers, certaines solutions  $\omega$  conduisent à des champs de déplacement divergents en certains points, que nous devons éliminer ;
- lorsque la surface de révolution n'est pas simplement connexe, les solutions de (2) déterminées sur un revêtement de  $S$  doivent être ramenées sur  $S$ , ce qui conduit à des conditions de recollement.

Par souci de simplicité, nous ne considérons pas de conditions aux limites imposées sur la surface, qui contribuent évidemment à réduire encore le nombre de modes de déformations isométriques.

Le cas du tore est particulièrement démonstratif : le champ de déplacement obtenu par les solutions de l'équation (2) est toujours multivalué. Il n'existe donc pas de déformations isométriques infinitésimales sur le tore, et ce dernier est *infinitésimalement rigide*. Or ce résultat n'est pas simplement dû au fait que le tore est une variété sans bord. Considérons en effet la surface obtenue en découpant un tore le long de son plus grand parallèle : on montre que l'équation (2) pour les déformations isométriques infinitésimales sur cette surface possède deux points singuliers, et que cette surface est toujours isométriquement rigide, bien que possédant maintenant deux bords.

Il est possible de recenser les modes de déformation isométrique infinitésimale d'une surface isométrique quelconque (voir [1]). On est pour cela amené à définir les *points asymptotiques* comme les points  $s_a$  de la coordonnée  $s$  satisfaisant  $z'(s_a) = 0$ . Sur la surface, on appelle *cercles asymptotiques* les cercles d'équation  $s = s_a$ , où  $s_a$  est un point asymptotique (la terminologie est cohérente car les cercles asymptotiques sont effectivement des courbes asymptotiques). Supposons les points asymptotiques  $s_a$  isolés ; le nombre de déformations isométriques infinitésimales d'une surface de révolution vaut alors :

$$e = (\text{nombre de bords}) - (\text{nombre de cercles asymptotiques}), \quad (3)$$

lorsque cette grandeur est positive. Pour  $e \leq 0$ , la surface est en général rigide, sauf pour des surfaces *exceptionnelles* vérifiant  $(1 - e)$  conditions de « quantification » (voir [1]).

Lorsque les points  $s_a$  sont isolés, la formule (3) résout le problème de la rigidité infinitésimale isométrique des surfaces de révolution. On peut citer comme exemples de surfaces infinitésimalement rigides : le tore (deux cercles asymptotiques et pas de bord, d'où  $e = -2$ ), le tore découpé comme expliqué plus haut (idem mais deux bords,  $e = 0$ ), le « chapeau mexicain » (un bord et un cercle asymptotique, d'où  $e = 0$ ), la sphère (ni bord ni cercle asymptotique – et nous retrouvons là une propriété déjà connue par la convexité (voir [4])). Comme surface non rigide, nous trouvons : la sphère avec un trou circulaire (un bord, pas de cercle asymptotique,  $e = 1$ ), le morceau de paraboléoïde  $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq \rho^2$  (idem), le cylindre à section circulaire et de longueur finie (deux bords, pas de cercle asymptotique, d'où  $e = 2$ , et nous retrouvons là encore une propriété connue (voir [3]))...

Par la formule (3), il apparaît que la rigidité d'une surface de révolution dépend non seulement d'une grandeur topologique, le nombre de bords de la surface, mais aussi, de façon quelque peu inattendue, du nombre de cercles asymptotiques sur la surface. Cette même formule montre que ces derniers apportent un *surcroît de rigidité* à la surface sur laquelle ils sont inscrits. Nous allons maintenant nous attacher à interpréter ce résultat géométriquement, ce qui nous permettra de généraliser à des surfaces quelconques.

Considérons tout d'abord les propriétés rigidifiantes d'un cercle asymptotique  $s = s_a$  sur une surface de révolution – par « propriété rigidifiante », nous entendons simplement un *surcroît* de rigidité, voir

## B. Audoly

l'équation (3). Au cours d'une déformation isométrique d'une telle surface, la courbure intrinsèque (au sein de la surface) du cercle asymptotique est conservée. Or, pour une courbe inscrite sur une surface, la courbure extrinsèque (en tant que courbe tridimensionnelle) est toujours supérieure à la courbure intrinsèque, l'égalité étant atteinte lorsque la courbe suit une direction asymptotique de la surface. Les cercles asymptotiques réalisent donc un minimum de leur courbure extrinsèque dans leur configuration de repos, par rapport aux configurations qu'ils seront amenés à adopter suite à d'éventuelles déformations isométriques de la surface de révolution. On peut montrer (*voir* [1]) que ce principe de minimum contraint la déformation du cercle asymptotique à être purement normale au plan dans lequel il était initialement contenu, et ce, au *premier ordre* en les déformations.

La démonstration évoquée ci-dessus pour les cercles asymptotiques se généralise sans peine. Les courbes *asymptotiques planes et strictement convexes* (caps-courbes), quand elles sont inscrites sur une surface quelconque subissant une déformation isométrique infinitésimale, se déforment normalement à leur plan de repos, au premier ordre en la déformation.

Particularisons notre étude de la rigidité des surfaces au cas très générique d'une surface  $S$  dont la courbure de Gauss ne s'annule que le long de courbes : comme pour la démonstration de Killing (*voir* [2]), nous sommes ici amenés à nous limiter aux surfaces « suffisamment courbées », en excluant en particulier les hyperplans. Par le théorème de Beltrami–Enneper ([4], p. III.291), les caps-courbes font justement partie de ces courbes où la courbure de Gauss s'annule.

Au cours d'une déformation isométrique infinitésimale d'une telle surface  $S$ , les portions de courbes non asymptotiques peuvent se déformer de manière tout à fait quelconque, la seule contrainte étant bien évidemment qu'elles conservent leur longueur ([4], p. V.314), tout comme les courbes asymptotiques mais non caps (*voir* [1]). La propriété de la déformation normale énoncée plus haut représente donc une contrainte sur les déformations des caps-courbes qui n'a pas d'équivalent pour les autres courbes.

Par conséquent, la présence de caps-courbes supprime des modes de déformation isométrique infinitésimale pour la surface, d'où le nom de courbes rigidifiantes et l'interprétation géométrique annoncée de la formule (3). Par manque de place, nous nous bornerons à illustrer cette propriété par un exemple : considérons une surface ressemblant au tore déchiré introduit plus haut, mais qui n'est plus de révolution ; remplaçons-y les deux cercles asymptotiques par deux caps-courbes. Celles-ci délimitent maintenant une portion de surface hyperbolique (la partie « intérieure » du tore, qui a la topologie d'un morceau de cylindre), où l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre pour les déformations isométriques infinitésimales est elle-même hyperbolique ([4], p. V.279). Or, pour cette équation aux dérivées partielles, la propriété de déformation normale des deux caps-courbes intervient comme une condition aux limites à vérifier sur *les deux bords* de la région hyperbolique. Le problème des déformations isométriques infinitésimales apparaît donc surdéterminé : le pseudo-tore est rendu rigide par les deux caps-courbes, ce qui généralise la rigidité du tore de révolution découlant de l'équation (3).

## Références bibliographiques

- [1] Audoly B., Geometric Rigidity of Curved Elastic Shells, (soumis à Nonlinearity).
- [2] Killing W., Die Nicht-euklidischen Raumformen in Analytischer Behandlung, G.B. Teubner, Leipzig, 1885 : Une surface dont la courbure est de rang supérieur à trois sur une partie dense est rigide ; ce cas est générique pour  $d \geq 4$ , mais exclut les hyperplans.
- [3] Rayleigh J.W.S., The Theory of Sound, Dover Publications, New York, 1945.
- [4] Spivak M., Differential Geometry, Vol. III to V, Publish or perish Inc, Houston, 1979.
- [5] Struik D.J., Lectures on Classical Differential Geometry, second edition, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1961.